ГЛАВА 5

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В этой главе (за исключением последнего раздела) мы будем заниматься только *вещественными* функциями, определенными на сегментах или интервалах. Это вызвано не просто соображениями удобства — при переходе от вещественных к векторнозначным функциям возникают значительные трудности. Дифференцирование функций, определенных в R^k, будет рассматриваться в главе 9.

Производная вещественной функции

5.1. Определение. Пусть f — вещественная функция, определенная на $[a, b]$. Взяв произвольное число $x \in [a, b]$, составим отношение

$$\varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad (a < t < b,\ t \neq x) \tag{1}$$

и положим

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \varphi(t), \tag{2}$$

если этот предел существует, в соответствии с определением 4.1.

Таким образом, с функцией f связана функция f', область определения которой — множество всех точек x, в которых существует предел (2); функция f' называется *производной* функции f.

Если производная f' определена в точке x, то мы будем говорить, что функция f *дифференцируема* в точке x. Если f' определена в каждой точке некоторого множества $E \subset [a, b]$, то мы будем говорить, что f дифференцируема на E.

В формуле (2) можно брать правосторонний или левосторонний предел; это приводит к определению правосторонней и левосторонней производной. В частности, в концах сегмента a и b производная (если она существует) всегда является соответственно правосторонней и левосторонней. Мы, однако, не будем подробно рассматривать такие производные.

Если f определена на интервале (a, b) и если $a < x < b$, то $f'(x)$ определяется равенствами (1) и (2), как выше. Но $f'(a)$ и $f'(b)$ в этом случае не определены.

5.2. Теорема. *Пусть функция f определена на сегменте $[a, b]$. Если f дифференцируема в точке $x \in [a, b]$, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. По теореме 4.4 при $t \to x$ мы имеем

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot (t - x) \to f'(x) \cdot 0 = 0.$$

Теорема, обратная к только что доказанной, неверна. Легко построить непрерывные функции, не дифференцируемые в изолированных точках. В гл. 7 мы познакомимся даже с такой функцией, которая, будучи непрерывной на всей прямой, не дифференцируема ни в одной точке!

5.3. Теорема. *Пусть f и g определены на $[a, b]$ и дифференцируемы в точке $x \in [a, b]$. Тогда $f+g$, fg и f/g дифференцируемы в точке x и*

(*a*) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

(*b*) $(fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$;

(*c*) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)\,f'(x) - g'(x)\,f(x)}{g^2(x)}$.

В утверждении (*c*) мы, разумеется, предполагаем, что $g(x) \neq 0$.

Доказательство. Утверждение (*a*) следует из теоремы 4.4. Пусть $h = fg$. Тогда

$$h(t) - h(x) = f(t)\,[g(t) - g(x)] + g(x)\,[f(t) - f(x)].$$

Если мы разделим это равенство на $t - x$ и заметим, что $f(t) \to f(x)$ при $t \to x$ (теорема 5.2), то получим (*b*). Наконец, пусть $h = f/g$. Тогда

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = \frac{1}{g(t)\,g(x)} \left[g(x) \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f(x) \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \right].$$

Устремляя t к x и применяя теоремы 4.4 и 5.2, мы получаем (*c*).

5.4. Примеры. Производная каждой постоянной функции равна, очевидно, нулю. Если f определена равенством $f(x) = x$, то $f'(x) = 1$. Повторное применение утверждений (*b*) и (*c*) последней теоремы показывает, что функция x^n дифференцируема и что ее производная равна nx^{n-1}, каково бы ни было целое n (если $n < 0$, то мы должны ограничиться точками $x \neq 0$). Таким образом, любой многочлен дифференцируем. То же верно в отношении любой рациональной функции, если исключить точки, в которых обращается в нуль ее знаменатель.

Следующая теорема дает правило дифференцирования сложной функции. Более общий ее вариант встретится нам в гл. 9.

5.5. Теорема. *Пусть f непрерывна на $[a, b]$, $f'(x)$ существует в некоторой точке $x \in [a, b]$, g определена на сегменте I, содержащем множество значений функции f, и g дифференцируема в точке $f(x)$. Если*

$$h(t) = g(f(t)) \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

то h дифференцируема в точке x и

$$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $y = f(x)$. По определению производной имеем

$$f(t) - f(x) = (t - x)\,[f'(x) + u(t)], \tag{4}$$

$$g(s) - g(y) = (s - y)\,[g'(y) + v(s)], \tag{5}$$

где $t \in [a, b]$, $s \in I$ и $u(t) \to 0$ при $t \to x$, $v(s) \to 0$ при $s \to y$. Пусть $s = f(t)$. Используя сначала (5), а затем (4), получим

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= g(f(t)) - g(f(x)) = \\ &= [f(t) - f(x)] \cdot [g'(y) + v(s)] = \\ &= (t - x) \cdot [f'(x) + u(t)] \cdot [g'(y) + v(s)], \end{aligned}$$

или, если $t \neq x$,

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = [g'(y) + v(s)] \cdot [f'(x) + u(t)]. \tag{6}$$

Устремляя t к x, мы видим, что, в силу непрерывности функции f, $s \to y$, поэтому правая часть равенства (6) стремится к $g'(y) f'(x)$, откуда и следует (3).

5.6. Примеры. (*a*) Пусть функция f определена равенством

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases} \tag{7}$$

Будем считать доказанным, что производная функции $\sin x$ равна $\cos x$ (мы будем рассматривать тригонометрические функции в гл. 8). Тогда мы можем применить теоремы 5.3 и 5.5, если $x \neq 0$, и получить

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0). \tag{8}$$

В точке $x = 0$ эти теоремы уже не применимы, так как дробь $1/x$ там не определена, и мы сошлемся непосредственно на опре-

деление: при $t \neq 0$

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \sin\frac{1}{t}.$$

При $t \to 0$ это отношение не стремится ни к какому пределу, так что $f'(0)$ не существует.

(*b*) Пусть функция f определена равенствами

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases} \tag{9}$$

Как и выше, мы получаем

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \qquad (x \neq 0). \tag{10}$$

При $x = 0$ мы вспомним определение и получим

$$\left|\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\right| = \left|t\sin\frac{1}{t}\right| \leqslant |t| \qquad (t \neq 0);$$

полагая $t \to 0$, мы видим, что

$$f'(0) = 0. \tag{11}$$

Таким образом, функция f дифференцируема во всех точках x, но f' не является непрерывной функцией, так как $\cos(1/x)$ в (10) не стремится ни к какому пределу при $x \to 0$.

Теоремы о среднем значении

5.7. Определение. Пусть f — вещественная функция, определенная на метрическом пространстве X. Будем говорить, что f имеет *локальный максимум* в точке $p \in X$, если существует $\delta > 0$, такое, что $f(q) \leqslant f(p)$ при всех $q \in X$, таких, что $d(p, q) < \delta$.

Локальные минимумы определяются сходным образом.

Наша следующая теорема лежит в основе многих применений дифференцирования.

5.8. Теорема. *Пусть функция f определена на сегменте $[a, b]$; если f имеет локальный максимум в точке $x \in (a, b)$ и если существует $f'(x)$, то $f'(x) = 0$.*

Аналогичное утверждение, относящееся к локальному минимуму, конечно, тоже верно.

Доказательство. Выберем δ в соответствии с определением 5.7, так что

$$a < x - \delta < x < x + \delta < b.$$

Если $x-\delta<t<x$, то

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\geqslant 0.$$

Устремляя t к x, мы видим, что $f'(x)\geqslant 0$.

Если $x<t<x+\delta$, то

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\leqslant 0,$$

откуда следует, что $f'(x)\leqslant 0$. Значит, $f'(x)=0$.

5.9. Теорема. *Если f и g — непрерывные вещественные функции на сегменте $[a, b]$, дифференцируемые на интервале (a, b), то существует точка $x\in(a, b)$, в которой*

$$[f(b)-f(a)]\,g'(x)=[g(b)-g(a)]\,f'(x).$$

Заметим, что здесь не требуется дифференцируемость в точках a и b.

Доказательство. Положим

$$h(t)=[f(b)-f(a)]\,g(t)-[g(b)-g(a)]\,f(t)\qquad(a\leqslant t\leqslant b).$$

Функция h непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и

$$h(a)=f(b)\,g(a)-f(a)\,g(b)=h(b). \tag{12}$$

Для доказательства теоремы мы должны проверить, что $h'(x)=0$ при некотором $x\in(a, b)$.

Если h постоянна, то $h'(x)=0$ при любом $x\in(a, b)$. Если $h(t)>h(a)$ при некотором $t\in(a, b)$, то пусть x — та точка сегмента $[a, b]$, в которой h достигает своего максимума (теорема 4.16). В силу (12), $x\in(a, b)$, и теорема 5.8 показывает, что $h'(x)=0$. Если $h(t)<h(a)$ при некотором $t\in(a, b)$, то можно применить такое же рассуждение, выбрав в качестве x ту точку сегмента $[a, b]$, в которой h достигает своего минимума.

Эту теорему часто называют обобщенной теоремой о среднем значении; следующий ее частный случай называют теоремой о среднем значении.

5.10. Теорема. *Если f — вещественная непрерывная функция на $[a, b]$, дифференцируемая на (a, b), то существует точка $x\in(a, b)$, в которой*

$$f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(x).$$

Доказательство. Положим $g(x)=x$ в теореме 5.9.

5.11. Теорема. *Пусть функция f дифференцируема в интервале (a, b).*

(*a*) *Если* $f'(x) \geqslant 0$ *при всех* $x \in (a, b)$, *то* f *монотонно возрастает.*

(*b*) *Если* $f'(x) = 0$ *при всех* $x \in (a, b)$, *то* f *постоянна.*

(*c*) *Если* $f'(x) \leqslant 0$ *при всех* $x \in (a, b)$, *то* f *монотонно убывает.*

Доказательство. То, что все эти заключения справедливы, можно усмотреть из равенства

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x),$$

верного для любой пары чисел x_1, x_2, лежащих в (a, b) при *некотором* x, расположенном между x_1 и x_2.

Непрерывность производных

Мы уже видели [пример 5.6 (*b*)], что функция f может иметь производную f', которая существует во всех точках, но разрывна в некоторых точках. Однако не каждая функция может быть производной. В частности, производные, которые существуют в каждой точке некоторого сегмента, так же как и функции, непрерывные на сегменте, обладают следующим важным свойством: они принимают промежуточные значения (ср. с теоремой 4.23). Точная формулировка такова.

5.12. Теорема. *Пусть* f — *вещественная функция, дифференцируемая на* $[a, b]$, *и пусть* $f'(a) < \lambda < f'(b)$. *Тогда существует точка* $x \in (a, b)$, *такая, что* $f'(x) = \lambda$.

Подобный результат верен, конечно, и тогда, когда $f'(a) > f'(b)$.

Доказательство. Положим $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Если $a \leqslant t \leqslant c$, то пусть $\alpha(t) = a$, $\beta(t) = 2t - a$. Если $c \leqslant t \leqslant b$, то пусть $\alpha(t) = 2t - b$, $\beta(t) = b$. Тогда $a \leqslant \alpha(t) < \beta(t) \leqslant b$ в интервале (a, b). Положим

$$g(t) = \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)} \qquad (a < t < b).$$

Тогда g непрерывна на (a, b), $g(t) \to f'(a)$ при $t \to a$, $g(t) \to f'(b)$ при $t \to b$ и поэтому из теоремы 4.23[1]) следует, что $g(t_0) = \lambda$ при некотором $t_0 \in (a, b)$. Зафиксируем t_0. По теореме 5.10 существует точка x, такая, что $\alpha(t_0) < x < \beta(t_0)$ и $f'(x) = g(t_0)$. Значит, $f'(x) = \lambda$.

Следствие. *Если* f *дифференцируема на* $[a, b]$, *то* f' *не имеет простых разрывов на* $[a, b]$.

Однако f' вполне может иметь разрывы второго рода.

---

[1]) В теореме 4.23 речь идет о функции, непрерывной на *сегменте* $[a, b]$. Здесь имеется в виду, что функцию g можно доопределить в точках a и b, полагая $g(a) = f'(a)$, $g(b) = f'(b)$, так что g станет непрерывной и в точках a, b по теореме 4.6. — *Прим. перев.*

Правило Лопиталя

Следующая теорема часто бывает полезной при вычислении пределов.

5.13. Теорема. *Пусть f и g вещественны и непрерывны в интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Пусть*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \quad \text{при} \quad x \to a. \tag{13}$$

Если

$$f(x) \to 0 \quad \text{и} \quad g(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to a, \tag{14}$$

или если

$$g(x) \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to a, \tag{15}$$

то

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \quad \text{при} \quad x \to a. \tag{16}$$

Аналогичное утверждение, конечно, верно и тогда, когда $x \to b$ или когда в (15) $g(x) \to -\infty$. Заметим, что сейчас мы используем понятие предела в расширенном смысле в соответствии с определением 4.33.

Доказательство. Сначала предположим, что $-\infty \leqslant A < +\infty$. Выберем вещественное число q, такое, что $A < q$, а затем выберем r так, чтобы выполнялось неравенство $A < r < q$. Согласно (13), существует точка $c \in (a, b)$, такая, что при $a < x < c$ имеем

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r. \tag{17}$$

Если $a < x < y < c$, то, как показывает теорема 5.9, существует точка $t \in (x, y)$, такая, что

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r. \tag{18}$$

Допустим, что выполнено условие (14). Устремляя в (18) x к a, мы видим, что

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leqslant r < q \qquad (a < y < c). \tag{19}$$

Теперь допустим, что выполнено условие (15). Считая y в формуле (18) фиксированным, мы можем выбрать такую точку $c_1 \in (a, y)$, что $g(x) > g(y)$ и $g(x) > 0$, если $a < x < c_1$. Умножая (18) на $[g(x) - g(y)]/g(x)$, мы получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\,\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad (a < x < c_1). \tag{20}$$

Если в (20) устремить x к a, то, как показывает (15), можно найти точку $c_2 \in (a, c_1)$, такую, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \qquad (a < x < c_2). \tag{21}$$

Итак, неравенства (19) и (21) показывают, что для любого q, подчиненного единственному условию $A < q$, найдется точка $c_2 \in (a, b)$, такая, что $f(x)/g(x) < q$, если $a < x < c_2$.

Точно таким же способом в том случае, когда $-\infty < A \leqslant \leqslant +\infty$, а p выбрано так, что $p < A$, мы найдем точку $c_3 \in (a, b)$, такую, что

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (a < x < c_3). \tag{22}$$

Из этих двух утверждений следует соотношение (16).

Производные высших порядков

5.14. Определение. Если f имеет производную f' на некотором сегменте и если функция f' в свою очередь дифференцируема, то производную функции f' мы будем обозначать через f'' и называть второй производной функции f. Продолжая таким образом, мы получим функции

$$f,\ f',\ f'',\ f^{(3)},\ \ldots,\ f^{(n)},$$

каждая из которых служит производной для предшествующей. Функция $f^{(n)}$ называется n-й производной, или производной порядка n функции f.

Для того чтобы $f^{(n)}(x)$ существовала в точке x, производная $f^{(n-1)}(t)$ должна существовать в окрестности точки x (или в односторонней окрестности, если x является концом сегмента, на котором определена функция f) и должна быть дифференцируемой в точке x. При этом $f^{(n-2)}$ должна быть дифференцируемой в той окрестности точки x, в которой существует $f^{(n-1)}$.

Теорема Тейлора

5.15. Теорема. *Допустим, что f — вещественная функция на $[a, b]$, n — положительное целое число, $f^{(n-1)}$ непрерывна на $[a, b]$, $f^{(n)}(t)$ существует в любой точке $t \in (a, b)$. Пусть α, β — различные точки сегмента $[a, b]$. Положим*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k. \tag{23}$$

Тогда существует точка x, лежащая между α и β, такая, что

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n. \tag{24}$$

При $n=1$ это утверждение превращается в теорему о среднем значении. В общем случае теорема показывает, что функцию f можно приблизить многочленом степени $n-1$; равенство (24) позволяет оценить погрешность, если известна верхняя граница величины $|f^n(x)|$.

Доказательство. Пусть M — число, определяемое равенством

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta-\alpha)^n, \tag{25}$$

и пусть

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t-\alpha)^n \qquad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{26}$$

Мы должны показать, что $n!M = f^{(n)}(x)$ при некотором x, лежащем между α и β. Согласно (23) и (26),

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!\,M \quad (a < t < b). \tag{27}$$

Значит, доказательство будет закончено, если мы проверим, что $g^{(n)}(x) = 0$ при некотором x, лежащем между α и β.

Поскольку $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$ при $k = 0, \ldots, n-1$, мы имеем

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \ldots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0. \tag{28}$$

Число M было выбрано так, что $g(\beta) = 0$; поэтому, согласно теореме о среднем, $g'(x_1) = 0$ при некотором x_1, лежащем между α и β. Так как $g'(\alpha) = 0$, то подобным же образом мы заключаем, что $g''(x_2) = 0$ при некотором x_2, лежащем между α и x_1. После n шагов мы придем к выводу, что $g^{(n)}(x_n) = 0$ при некотором x_n, лежащем между α и x_{n-1}, т. е. между α и β.

Дифференцирование векторнозначных функций

5.16. Замечания. Определение 5.1 без всяких изменений применимо к комплексным функциям f, определенным на $[a, b]$. При этом теоремы 5.2 и 5.3 остаются верными, так же как и их доказательства. Если f_1 и f_2 — вещественная и мнимая части функции f, т. е. если $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ при $a \leqslant t \leqslant b$, где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ вещественны, то, очевидно,

$$f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x), \tag{29}$$

причем f дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда обе функции f_1 и f_2 дифференцируемы в этой точке.

Переходя к общим векторнозначным функциям, т. е. к функциям $\mathbf{f}$, отображающим $[a, b]$ в некоторое пространство R^k, мы все еще можем применить определение 5.1 для построения $\mathbf{f}'(x)$. Теперь $\varphi(t)$ в формуле (1) при каждом t является точкой пространства R^k, а предел в (2) вычисляется в смысле сходимости по норме этого пространства. Иными словами, $\mathbf{f}'(x)$ — это та точка пространства R^k (если она существует), для которой

$$\lim_{t\to x}\left|\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(x)}{t-x}-\mathbf{f}'(x)\right|=0, \tag{30}$$

и $\mathbf{f}'$ — снова функция со значениями в R^k.

Если $f_1, \ldots, f_k$ — компоненты функции $\mathbf{f}$, определенные в теореме 4.10, то

$$\mathbf{f}'=(f_1', \ldots, f_k'), \tag{31}$$

и функция $\mathbf{f}$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда каждая из функций $f_1, \ldots, f_k$ дифференцируема в точке x.

Теорема 5.2 остается верной и в этом случае; то же относится и к теореме 5.3 (a) и (b), если fg заменить скалярным произведением $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ (см. определение 4.3).

Однако, когда мы обращаемся к теореме о среднем значении и к правилу Лопиталя, положение меняется. Следующие два примера показывают, что оба эти результата неверны уже для комплекснозначных функций.

5.17. Пример. Положим для вещественного x

$$f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x. \tag{32}$$

(Последнее выражение можно рассматривать как определение комплексной показательной функции e^{ix}. Эти функции будут подробно рассмотрены в гл. 8.) Тогда

$$f(2\pi)-f(0)=1-1=0, \tag{33}$$

но

$$f'(x)=ie^{ix}, \tag{34}$$

так что $|f'(x)|=1$ при всех вещественных x.

Таким образом, в этом случае теорема 5.10 уже неверна.

5.18. Пример. На интервале (0,1) зададим функции f, g, полагая $f(x)=x$ и

$$g(x)=x+x^2e^{i/x^2}. \tag{35}$$

Поскольку $|e^{it}|=1$ при всех вещественных t, мы видим, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1. \tag{36}$$

Далее,

$$g'(x) = 1 + \left\{2x - \frac{2i}{x}\right\} e^{i/x^2} \quad (0 < x < 1), \tag{37}$$

так что

$$|g'(x)| \geqslant \left|2x - \frac{2i}{x}\right| - 1 \geqslant \frac{2}{x} - 1. \tag{38}$$

Значит,

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| = \frac{1}{|g'(x)|} \leqslant \frac{x}{2-x} \tag{39}$$

и поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0. \tag{40}$$

Сопоставляя (40) с (36), мы видим, что правило Лопиталя в этом случае не действует. Отметим еще, что $g'(x) \neq 0$ на интервале (0,1), в силу (38).

Однако имеется все-таки одно следствие теоремы о среднем значении, которое в приложениях почти так же полезно, как теорема 5.10, и которое остается верным для векторнозначных функций: из теоремы 5.10 следует, что

$$|f(b) - f(a)| \leqslant (b-a) \sup_{a<x<b} |f'(x)|. \tag{41}$$

Прежде чем установить векторный аналог неравенства (41), мы приведем теорему, показывающую, что при вычислении производной можно пользоваться отношениями, отличными от тех, которые фигурировали в определении 5.1. Не ограничиваясь случаем $k = 1$, рассмотрим общий случай.

5.19. Теорема. *Пусть $a < x < b$, функция $\mathbf{f}$ отображает $[a, b]$ в пространство R^k, и пусть $\mathbf{f}$ дифференцируема в точке x. Пусть $a < \alpha_n < x < \beta_n < b$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$, и пусть $\alpha_n \to x$, $\beta_n \to x$. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathbf{f}(\beta_n) - \mathbf{f}(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \mathbf{f}'(x). \tag{42}$$

Доказательство. Положим $\lambda_n = (\beta_n - x)/(\beta_n - \alpha_n)$. Тогда $0 < \lambda_n < 1$, и вектор

$$\frac{\mathbf{f}(\beta_n) - \mathbf{f}(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} - \mathbf{f}'(x) \tag{43}$$

при каждом n равен вектору

$$\lambda_n \left\{\frac{\mathbf{f}(\beta_n) - \mathbf{f}(x)}{\beta_n - x} - \mathbf{f}'(x)\right\} + (1 - \lambda_n) \left\{\frac{\mathbf{f}(\alpha_n) - \mathbf{f}(x)}{\alpha_n - x} - \mathbf{f}'(x)\right\}. \tag{44}$$

По определению 5.1, оба выражения в скобках стремятся к $\mathbf{0}$, и так как последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{1-\lambda_n\}$ ограничены, то вектор (44), а с ним и (43) стремится к нулю при $n \to \infty$. Равенство (42) доказано.

5.20. Теорема. *Пусть* $\mathbf{f}$ — *непрерывное отображение сегмента* $[a, b]$ *в пространство* R^k, *дифференцируемое в интервале* (a, b). *Тогда существует точка* $x \in (a, b)$, *такая, что*

$$|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)| \leqslant (b-a)\,|\mathbf{f}'(x)|. \tag{45}$$

Доказательство. Положим $3L = b-a$, $M = |\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|$ и

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(s+L)-\mathbf{f}(s) \quad (a \leqslant s \leqslant a+2L). \tag{46}$$

Поскольку

$$\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a) = \mathbf{g}(a)+\mathbf{g}(a+L)+\mathbf{g}(a+2L),$$

мы видим, что

$$M \leqslant |\mathbf{g}(a)|+|\mathbf{g}(a+L)|+|\mathbf{g}(a+2L)|. \tag{47}$$

Если бы оказалось, что $|\mathbf{g}(s)| < M/3$ при всех $s \in (a, a+2L)$, то из непрерывности отображения $\mathbf{g}$ следовало бы, что $|\mathbf{g}(a)| \leqslant M/3$, $|\mathbf{g}(a+2L)| \leqslant M/3$, и, значит, правая часть неравенства (47) была бы меньше M.

Следовательно, $|\mathbf{g}(s_1)| \geqslant M/3$ при некотором $s_1 \in (a, a+2L)$. Полагая $t_1 = s_1+L$, мы находим, что $a < s_1 < t_1 < b$, $t_1 - s_1 = (b-a)/3$ и

$$|\mathbf{f}(t_1)-\mathbf{f}(s_1)| \geqslant \frac{M}{3}. \tag{48}$$

Повторим это построение, взяв $[s_1, t_1]$ вместо $[a, b]$. Продолжая таким образом, мы найдем две последовательности $\{s_n\}$, $\{t_n\}$, такие, что

$$t_n - s_n = 3^{-n}(b-a), \tag{49}$$

каждый сегмент $I_n = [s_n, t_n]$ содержится внутри сегмента I_{n-1} и

$$|\mathbf{f}(t_n)-\mathbf{f}(s_n)| \geqslant 3^{-n}M. \tag{50}$$

Разделив (50) на (49), мы получим

$$\frac{|\mathbf{f}(t_n)-\mathbf{f}(s_n)|}{t_n-s_n} \geqslant \frac{|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|}{b-a} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots); \tag{51}$$

из теоремы 5.19 мы заключаем, что (45) выполнено для точки x, принадлежащей всем сегментам I_n [1]).

[1]) Вот другое, значительно более короткое доказательство теоремы 5.20. Рассмотрим числовую функцию φ, заданную на $[a, b]$ равенством: $\varphi(t) = (\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a))\cdot\mathbf{f}(t)$. К этой функции можно применить теорему о среднем значении: $\varphi(b)-\varphi(a) = \varphi'(x)\cdot(b-a)$, где x — некоторая точка интервала (a, b).

Упражнения

1. Пусть $f(x)=|x|^3$. Вычислить $f'(x)$, $f''(x)$ при всех вещественных x и показать, что $f^{(3)}(0)$ не существует.

2. Пусть f определена при всех вещественных x, и пусть

$$|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2$$

при всех вещественных x и y. Доказать, что f постоянна.

3. Пусть f определена в окрестности точки x, и пусть существует $f''(x)$. Показать, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

Показать на примере, что этот предел может существовать и тогда, когда $f''(x)$ не существует.

4. Пусть

$$C_0+\frac{C_1}{2}+\ldots+\frac{C_{n-1}}{n}+\frac{C_n}{n+1}=0,$$

где $C_0, \ldots, C_n$ — вещественные постоянные. Доказать, что уравнение

$$C_0+C_1x+\ldots+C_{n-1}x^{n-1}+C_nx^n=0$$

имеет хотя бы один вещественный корень между 0 и 1.

5. Пусть f определена и дифференцируема при каждом $x>0$ и $f'(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Положим $g(x)=f(x+1)-f(x)$. Доказать, что $g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$.

6. Пусть

(*a*) f непрерывна при $x\geqslant 0$,

(*b*) $f'(x)$ существует при всех $x>0$,

(*c*) $f(0)=0$,

(*d*) f' монотонно возрастает.

Положим

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}\qquad(x>0).$$

Доказать, что g монотонно возрастает.

Теперь остается заметить, что $\varphi(b)-\varphi(a)=|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|^2$, а $\varphi'(x)=(\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a))\cdot\mathbf{f}'(x)$ (см. по этому поводу предпоследний абзац п. 5.16), и поэтому $|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|^2=(\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a))\cdot\mathbf{f}'(x)\cdot(b-a)$. Применяя к правой части этого равенства неравенство Шварца, получим

$$|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|^2\leqslant|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|\cdot|\mathbf{f}'(x)|(b-a).$$

Теорема доказана.—*Прим. перев.*

7. Пусть $f'(x)$, $g'(x)$ существуют, $g'(x) \neq 0$ и $f(x) = g(x) = 0$. Доказать, что

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Это верно и для комплексных функций.)

8. Пусть $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$. Доказать, что f строго возрастает в интервале (a, b). Пусть g — функция, обратная к f. Доказать, что g дифференцируема и что

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad (a < x < b).$$

9. Пусть f дифференцируема в интервале (a, b), $a < x < b$, $x < \alpha_n < \beta_n$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ и $\alpha_n \to x$, $\beta_n \to x$. Показать, что отношения

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$

не обязательно сходятся к $f'(x)$ при $n \to \infty$, но что они действительно сходятся к $f'(x)$, если мы дополнительно потребуем, чтобы последовательность $\{(\beta_n - x)/(\beta_n - \alpha_n)\}$ была ограниченной.

10. Пусть f и g — комплексные дифференцируемые функции на $(0, 1)$, $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, $f'(x) \to A$, $g'(x) \to B$ при $x \to 0$, где A и B — комплексные числа, $B \neq 0$. Доказать, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

(Ср. с примером 5.18.)

Указание:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{f(x)}{x} - A \right\} \cdot \frac{x}{g(x)} + A \cdot \frac{x}{g(x)}.$$

Применить теорему 5.13 к вещественной и мнимой частям дробей $f(x)/x$ и $g(x)/x$.

11. Сформулировать и доказать неравенство, которое следует из теоремы Тейлора и остается верным для векторнозначных функций.

12. Пусть E — замкнутое подмножество прямой R^1. В упражнении 13 гл. 4 было показано, что существует вещественная непрерывная функция в R^1, нуль-множество которой совпадает с E. Можно ли для каждого замкнутого множества E найти такую дифференцируемую на R^1 функцию f, для которой E служит нуль-множеством? Существует ли n раз дифференцируемая функция с таким свойством? Функция, которая имеет производные всех порядков на R^1?

13. Пусть g — вещественная функция на R^1, имеющая ограниченную производную (скажем, $|g'| \leqslant M$). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $f(x) = x + \varepsilon g(x)$. Доказать, что f взаимно однозначна, если число ε достаточно мало. (Можно определить множество допустимых ε, зависящее лишь от M.)

14. Пусть f — дважды дифференцируемая вещественная функция на $(0, \infty)$, и пусть M_0, M_1, M_2 — верхние границы соответственно функций $|f|$, $|f'|$, $|f''|$ на $(0, \infty)$. Доказать, что $M_1^2 \leqslant 4M_0M_2$.

Указание. Из теоремы Тейлора следует, что

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+2h) - f(x)] + hf''(\xi),$$

так что $|f'| \leqslant hM_2 + M_0/h$ при любом $h > 0$.

Можно ли этот результат распространить на векторнозначные функции?

15. Пусть f дважды дифференцируема на $(0, \infty)$, f'' ограничена на $(0, \infty)$ и $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Доказать, что $f'(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Указание. Применить упражнение 14 на (a, ∞).

Показать, что это утверждение становится неверным, если опустить предположение о f''.

16. Пусть f дифференцируема на $[a, b]$, $f(a) = 0$ и существует вещественное число A, такое, что $|f'(x)| \leqslant A|f(x)|$ на $[a, b]$. Доказать, что $f(x) = 0$ при всех $x \in [a, b]$.

Указание. Зафиксируем $x_0 \in [a, b]$, и пусть $M_0 = \sup|f(x)|$,

$$M_1 = \sup|f'(x)|$$

на сегменте $[a, x_0]$. Для любого $x \in [a, x_0]$

$$|f(x)| \leqslant M_1(x_0 - a) \leqslant A(x_0 - a)M_0.$$

Значит, $M_0 = 0$, если $A(x_0 - a) < 1$, т. е. $f = 0$ на $[a, x_0]$. Продолжить это рассуждение.

17. Пусть φ — вещественная функция, определенная в прямоугольнике R на плоскости, заданном неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$. *Решением* задачи с начальными условиями

$$y' = \varphi(x, y), \qquad y(a) = c \qquad (\alpha \leqslant c \leqslant \beta)$$

называется дифференцируемая на $[a, b]$ функция f, такая, что $f(a) = c$ и

$$f'(x) = \varphi(x, f(x)) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Доказать, что эта задача имеет не более одного решения, если существует число A, такое, что

$$|\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1)| \leqslant A|y_2 - y_1|$$

для любых $(x, y_1) \in R$, $(x, y_2) \in R$.

Указание. Применить упражнение 16 к разности двух решений. Заметим, что эта теорема единственности неприменима к задаче с начальными условиями

$$y' = y^{1/2}, \qquad y(0) = 0,$$

которая имеет два решения: $f(x) = 0$ и $f(x) = x^2/4$. Имеются ли другие решения?

18. Сформулировать и доказать аналогичную теорему единственности для системы дифференциальных уравнений вида

$$y_j' = \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_k), \quad y_j(a) = c_j \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

Заметим, что эту систему можно записать в виде

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(a) = \mathbf{c},$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ пробегает k-мерную клетку, $\boldsymbol{\varphi}$ — отображение некоторой $(k+1)$-мерной клетки в евклидово пространство R^k, причем компонентами $\boldsymbol{\varphi}$ служат функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, а $\mathbf{c}$ — вектор $(c_1, \ldots, c_k)$. Воспользоваться упражнением 16 для векторнозначных функций.

19. Рассмотреть частный случай упражнения 18, перейдя к системе

$$y_j' = y_{j+1} \qquad (j = 1, \ldots, k-1),$$

$$y_k' = f(x) - \sum_{j=1}^{k} g_j(x)\, y_j,$$

где $f, g_1, \ldots, g_k$ — непрерывные вещественные функции на $[a, b]$, и получить теорему единственности для решений уравнения

$$y^{(k)} + g_k(x)\, y^{(k-1)} + \ldots + g_2(x)\, y' + g_1(x)\, y = f(x),$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$y(a) = c_1, \quad y'(a) = c_2, \ldots, \quad y^{(k-1)}(a) = c_k.$$

20. Пусть f' непрерывна на $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Доказать, что существует число $\delta > 0$, такое, что

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| < \varepsilon,$$

если $0 < |t - x| < \delta$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$. (Это значит, иными словами, что f *равномерно дифференцируема* на $[a, b]$, если f' непрерывна на $[a, b]$.) Верно ли это для векторнозначных функций?