ГЛАВА 6

ИНТЕГРАЛ РИМАНА — СТИЛЬТЬЕСА

Основным в этой главе является определение интеграла Римана, явным образом использующее упорядоченность числовой прямой. В соответствии с этим мы начинаем с изучения интегрирования вещественнозначных функций на сегментах. В последующих разделах будет изложено обобщение на случай комплекснозначных и векторнозначных функций, заданных на сегменте. Интегрирование по множествам, отличным от сегментов, рассматривается в гл. 9 и 10.

Определение и существование интеграла

6.1. Определение. Пусть $[a, b]$ — заданный сегмент. Разбиением P сегмента $[a, b]$ мы называем конечное множество точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b.$$

Мы будем писать

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Пусть теперь f — ограниченная вещественная функция, определенная на $[a, b]$. Каждому разбиению P сегмента $[a, b]$ соответствуют числа

$$M_i = \sup f(x) \qquad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i),$$

$$m_i = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i),$$

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

и, наконец,

$$\overline{\int} f\,dx = \inf U(P, f), \tag{1}$$

$$\underline{\int} f\,dx = \sup L(P, f), \tag{2}$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всем разбиениям P сегмента $[a, b]$. Левые части равенств (1) и (2) называются соответственно верхним и нижним интегралами Римана функции f по сегменту $[a, b]$.

Если верхний интеграл равен нижнему, то мы будем говорить, что функция f интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$ и писать $f \in \mathscr{R}$ (иными словами, $\mathscr{R}$ обозначает множество всех функций, интегрируемых по Риману), а общее значение величин (1) и (2) будем обозначать

$$\int_a^b f\,dx, \tag{3}$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Это — интеграл Римана от функции f по сегменту $[a, b]$. Поскольку f ограничена, существуют два числа m и M, такие, что

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Значит, при любом разбиении P

$$m(b-a) \leqslant L(P, f) \leqslant U(P, f) \leqslant M(b-a),$$

так что числа $L(P, f)$ и $U(P, f)$ образуют ограниченное множество. Это показывает, что *верхний и нижний интегралы определены для любой ограниченной функции* f. Вопрос об их совпадении и, значит, вопрос об интегрируемости функции f оказывается более тонким. Вместо того чтобы исследовать его отдельно для интеграла Римана, мы сейчас рассмотрим более общую ситуацию.

6.2. Определение. Пусть α — монотонно возрастающая функция на $[a, b]$ (поскольку $\alpha(a)$ и $\alpha(b)$ конечны, функция α ограничена на $[a, b]$). Если P — какое-нибудь разбиение сегмента $[a, b]$, то положим

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}).$$

Ясно, что $\Delta\alpha_i \geqslant 0$. Для любой вещественной функции f, ограниченной на $[a, b]$, положим

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i,$$

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i,$$

где M_i и m_i имеют тот же смысл, что и в определении 6.1. Положим, по определению,

$$\overline{\int} f\,d\alpha = \inf U(P, f, \alpha), \tag{5}$$

$$\underline{\int} f\,d\alpha = \sup L(P, f, \alpha), \tag{6}$$

где верхняя и нижняя грани берутся снова по всем разбиениям.

Если левые части равенств (5) и (6) равны между собой, то их общее значение обозначается через

$$\int_a^b f\,d\alpha \tag{7}$$

или иногда через

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x). \tag{8}$$

Это — интеграл Римана — Стильтьеса (или просто интеграл Стильтьеса) от функции f относительно функции α по сегменту $[a, b]$.

Если интеграл (7) существует, т. е. если (5) и (6) равны между собой, то мы будем говорить, что f интегрируема относительно α в смысле Римана, и писать $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Полагая $\alpha(x) = x$, мы приходим к выводу, что интеграл Римана — это частный случай интеграла Римана — Стильтьеса. Подчеркнем, однако, что в общем случае функция α не обязана быть даже непрерывной.

Несколько слов по поводу обозначений. Мы предпочитаем обозначение (7) обозначению (8), так как фигурирующая в (8) буква x ничего не добавляет к содержанию записи (7). Совершенно несущественно, какую букву мы употребляем для обозначения так называемой «переменной интегрирования». Так, например, (8) — это то же самое, что

$$\int_a^b f(y)\,d\alpha(y).$$

Интеграл зависит от f, α, a и b, но не от переменной интегрирования, которую вполне можно опустить.

Роль переменной интегрирования совершенно аналогична роли индекса суммирования: два символа

$$\sum_{i=1}^{n} c_i, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k$$

означают одно и то же, а именно сумму $c_1 + c_2 + \ldots + c_n$.

Разумеется, не произойдет ничего страшного, если переменная интегрирования будет написана, а в некоторых случаях даже удобно ее писать.

Теперь мы исследуем вопрос о существовании интеграла (7).

Не повторяя этого каждый раз, мы будем считать функцию f вещественной и ограниченной, а функцию α — монотонно возрастающей на $[a, b]$, и если исключена возможность недоразумений, мы будем писать $\int$ вместо $\int\limits_a^b$.

6.3. Определение. Мы будем говорить, что разбиение P^* является *измельчением* разбиения P, если $P^* \supset P$ (т. е. если каждая точка разбиения P служит также точкой разбиения P^*). В случае, когда заданы два разбиения P_1 и P_2, мы будем говорить, что P^* есть их общее измельчение, если $P^* = P_1 \cup P_2$.

6.4. Теорема. *Если P^* — измельчение разбиения P, то*

$$L(P, f, \alpha) \leqslant L(P^*, f, \alpha) \tag{9}$$

и

$$U(P^*, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha). \tag{10}$$

Доказательство. Чтобы доказать неравенство (9), допустим сначала, что P^* содержит ровно на одну точку больше, чем P. Обозначим эту новую точку через x^* и допустим, что $x_{i-1} < x^* < x_i$, где x_{i-1} и x_i — две последовательные точки разбиения P. Положим

$$w_1 = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x^*),$$
$$w_2 = \inf f(x) \qquad (x^* \leqslant x \leqslant x_i).$$

Ясно, что $w_1 \geqslant m_i$ и $w_2 \geqslant m_i$, где, как и прежде,

$$m_i = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i).$$

Значит,

$$L(P^*, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = w_1[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] +$$
$$+ w_2[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] - m_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] =$$
$$= (w_1 - m_i)[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \geqslant 0.$$

Если P^* содержит на k точек больше, чем P, то мы повторим только что проведенное рассуждение k раз и получим (9). Доказательство неравенства (10) аналогично.

6.5. Теорема. $\underline{\int} f\,d\alpha \leqslant \overline{\int} f\,d\alpha$.

Доказательство. Пусть P^* — общее измельчение двух разбиений P_1 и P_2. По теореме 6.4

$$L(P_1, f, \alpha) \leqslant L(P^*, f, \alpha) \leqslant U(P^*, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha).$$

Значит,

$$L(P_1, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha). \tag{11}$$

Считая P_2 фиксированным и вычисляя верхнюю грань по всем P_1, получаем из (11)

$$\underline{\int} f\,d\alpha \leqslant U(P_2, f, \alpha). \tag{12}$$

Вычисляя нижнюю грань по всем P_2 в (12), получаем утверждение теоремы.

6.6. Теорема. *$f \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение P, такое, что*

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon. \tag{13}$$

Доказательство. При любом P имеем

$$L(P, f, \alpha) \leqslant \underline{\int} f\,d\alpha \leqslant \overline{\int} f\,d\alpha \leqslant U(P, f, \alpha).$$

Поэтому из (13) следует, что

$$0 \leqslant \overline{\int} f\,d\alpha - \underline{\int} f\,d\alpha < \varepsilon.$$

Значит, если при любом $\varepsilon > 0$ неравенству (13) удовлетворяет некоторое разбиение P, то

$$\overline{\int} f\,d\alpha = \underline{\int} f\,d\alpha,$$

т. е. $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Допустим теперь, что $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ и задано число $\varepsilon > 0$. Тогда существуют разбиения P_1 и P_2, такие, что

$$U(P_2, f, \alpha) - \int f\,d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{14}$$

$$\int f\,d\alpha - L(P_1, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Выберем в качестве P общее измельчение разбиений P_1 и P_2. Тогда, как показывает теорема 6.4 вместе с неравенствами (14) и (15),

$$U(P, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha) < \int f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f, \alpha) + \varepsilon \leqslant L(P, f, \alpha) + \varepsilon;$$

для такого разбиения P выполняется неравенство (13).

Теорема 6.6 позволит нам доказать интегрируемость двух важных классов функций. Но сначала введем еще одно определение.

6.7. Определение. Для любого разбиения P положим

$$\mu(P) = \max \Delta x_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

и назовем $\mu(P)$ *диаметром* разбиения P.

6.8. Теорема. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$. Более того, каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta\alpha_i - \int_a^b f\,d\alpha \right| < \varepsilon \tag{16}$$

для любого разбиения $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$, удовлетворяющего условию $\mu(P) < \delta$, и при любом выборе точек t_i в сегменте $[x_{i-1}, x_i]$.

Доказательство. Пусть задано число $\varepsilon > 0$, и пусть $\eta > 0$ таково, что

$$[\alpha(b) - \alpha(a)]\,\eta < \varepsilon.$$

Поскольку f равномерно непрерывна на $[a, b]$ (теорема 4.19), существует такое $\delta > 0$, что

$$|f(x) - f(t)| < \eta, \tag{17}$$

если $|x - t| < \delta$ и $x \in [a, b]$, $t \in [a, b]$.

Выберем P так, что $\mu(P) < \delta$. Тогда из неравенства (17) следует, что

$$M_i - m_i \leqslant \eta \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Значит,

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta\alpha_i \leqslant$$

$$\leqslant \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \eta\,[\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon.$$

Итак, по теореме 6.6, $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Неравенство (16) также доказано, так как оба числа $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta\alpha_i$ и $\int f\,d\alpha$ лежат между $U(P, f, \alpha)$ и $L(P, f, \alpha)$.

6.9. Теорема. *Если f монотонна на $[a, b]$, а α непрерывна на $[a, b]$, то $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ (мы по-прежнему предполагаем, разумеется, что α монотонна).*

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Для любого положительного n выберем разбиение P так, что

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Это возможно, так как функция α непрерывна (теорема 4.23). Предположим теперь, что f монотонно возрастает (в другом случае доказательство аналогично). Тогда

$$M_i = f(x_i), \qquad m_i = f(x_{i-1}) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

так что

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] =$$

$$= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} [f(b) - f(a)] < \varepsilon,$$

если n достаточно велико. По теореме 6.6 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Теперь мы докажем некоторые элементарные свойства интеграла Стильтьеса.

6.10. Теорема. (*a*) *Если* $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha)$ *и* $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)$ *на* $[a, b]$, *то* $f_1 + f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)$, $cf \in \mathscr{R}(\alpha)$, *какова бы ни была константа* c, *и*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1\, d\alpha + \int_a^b f_2\, d\alpha,$$

$$\int_a^b cf\, d\alpha = c \int_a^b f\, d\alpha.$$

(*b*) *Если* $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ *на* $[a, b]$, *то*

$$\int_a^b f_1\, d\alpha \leqslant \int_a^b f_2\, d\alpha.$$

(*c*) *Если* $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *на* $[a, b]$ *и если* $a < c < b$, *то* $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *на* $[a, c]$ *и на* $[c, b]$ *и*

$$\int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha.$$

(*d*) *Если* $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *на* $[a, b]$ *и если* $|f(x)| \leqslant M$ *на* $[a, b]$, *то*

$$\left| \int_a^b f\, d\alpha \right| \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(*e*) *Если* $f \in \mathscr{R}(\alpha_1)$ *и* $f \in \mathscr{R}(\alpha_2)$, *то* $f \in \mathscr{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ *и*

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f\, d\alpha_1 + \int_a^b f\, d\alpha_2;$$

если $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *и* c — *положительное число, то* $f \in \mathscr{R}(c\alpha)$ *и*

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha.$$

Доказательство. Если $f = f_1 + f_2$, а P — какое-нибудь разбиение сегмента $[a, b]$, то

$$L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) \leqslant L(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) \leqslant \leqslant U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha). \tag{18}$$

Если $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha)$ и $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)$, то любому числу $\varepsilon > 0$ отвечают такие разбиения P_j $(j = 1, 2)$, что

$$U(P_j, f_j, \alpha) - L(P_j, f_j, \alpha) < \varepsilon.$$

Это неравенство сохранится, если P_1 и P_2 заменить их общим измельчением P. Тогда из (18) следует, что

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < 2\varepsilon,$$

а это значит, что $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Для этого же разбиения P имеем

$$U(P, f_j, \alpha) < \int f_j d\alpha + \varepsilon \qquad (j = 1, 2);$$

таким образом, из (18) следует, что

$$\int f d\alpha \leqslant U(P, f, \alpha) < \int f_1 d\alpha + \int f_2 d\alpha + 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε мы приходим к неравенству

$$\int f d\alpha \leqslant \int f_1 d\alpha + \int f_2 d\alpha. \tag{19}$$

Если заменить f_1 и f_2 в (19) функциями $-f_1$ и $-f_2$, то неравенство изменится на обратное (ибо, как легко проверить, $\int (-f) d\alpha = -\int f d\alpha$); тем самым доказано требуемое равенство.

Доказательства остальных утверждений теоремы 6.10 совершенно аналогичны. В части (c) все дело в том, что, переходя к измельчениям при приближении интеграла $\int f d\alpha$, мы можем ограничиться лишь разбиениями, содержащими точку c.

6.11. Теорема. *Пусть* $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *на* $[a, b]$, $m \leqslant f \leqslant M$, φ *непрерывна на* $[m, M]$ *и* $h(x) = \varphi(f(x))$ *на* $[a, b]$. *Тогда* $h \in \mathscr{R}(\alpha)$ *на* $[a, b]$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$. Ввиду того что φ равномерно непрерывна на $[m, M]$, существует $\delta > 0$, такое, что $\delta < \varepsilon$ и $|\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon$, если $|s - t| \leqslant \delta$ и $s, t \in [m, M]$.

Поскольку $f \in \mathscr{R}(\alpha)$, существует разбиение $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$, такое, что

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \delta^2. \tag{20}$$

Пусть M_i и m_i имеют тот же смысл, что и в определении 6.1, и пусть M_i^*, m_i^* — аналогичные величины для функции h. Разобьем числа $1, \ldots, n$ на два класса: $i \in A$, если $M_i - m_i < \delta$; $i \in B$, если $M_i - m_i \geqslant \delta$.

Для $i \in A$, в силу выбора δ, оказывается, что $M_i^* - m_i^* \leqslant \varepsilon$.

Для $i \in B$ имеем $M_i^* - m_i^* \leqslant 2K$, где $K = \sup|\varphi(t)|$, $m \leqslant t \leqslant M$. Согласно (20), имеем

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\,\Delta\alpha_i < \delta^2, \tag{21}$$

так что $\sum\limits_{i \in B} \Delta\alpha_i < \delta$. Следовательно,

$$U(P, h, \alpha) - L(P, h, \alpha) = \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta\alpha_i \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\,[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta < \varepsilon\,[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K].$$

Теперь из теоремы 6.6 следует, что $h \in \mathscr{R}(\alpha)$, так как число ε произвольно.

Замечание. Эта теорема подсказывает такой вопрос: какие же функции интегрируемы по Риману? Ответ дается в теореме 10.33(*b*).

6.12. Теорема. *Если $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ и $g \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$, то*

(*a*) $fg \in R(\alpha)$;

(*b*) $|f| \in \mathscr{R}(\alpha)$ *и* $\left|\int\limits_a^b f\,d\alpha\right| \leqslant \int\limits_a^b |f|\,d\alpha$.

Доказательство. Полагая $\varphi(t) = t^2$ и применяя к φ теорему 6.11, мы видим, что $f^2 \in \mathscr{R}(\alpha)$, если $f \in \mathscr{R}(\alpha)$. Тождество

$$4fg = (f + g)^2 - (f - g)^2$$

завершает доказательство утверждения (*a*).

Полагая $\varphi(t) = |t|$ и применяя теорему 6.11, мы точно так же убеждаемся в том, что $|f| \in \mathscr{R}(\alpha)$. Выберем $c = \pm 1$ так, что

$$c \int f\,d\alpha \geqslant 0.$$

Тогда $\left|\int f\,d\alpha\right| = c \int f\,d\alpha = \int cf\,d\alpha \leqslant \int |f|\,d\alpha$, так как $cf \leqslant |f|$.

Интеграл как предел сумм

До сих пор мы определяли интеграл при помощи сумм $U(P, f, \alpha)$, $L(P, f, \alpha)$. Однако числа M_i, m_i, появляющиеся в этих суммах, не обязательно служат значениями функции f (они действительно оказываются значениями функции f, если f непрерывна). Сейчас мы покажем, что интеграл $\int f\,d\alpha$ можно рассматривать как предел последовательности сумм, в которых M_i и m_i заменены значениями функции f. Как и выше, α монотонно возрастает, а f ограничена и вещественна на $[a, b]$.

6.13. Определение. Пусть P — какое-нибудь разбиение сегмента $[a, b]$. Выберем точки $t_1, \ldots, t_n$ так, что $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, и рассмотрим сумму

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta\alpha_i. \tag{22}$$

Положим, по определению,

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(P, f, \alpha) = A, \tag{23}$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при $\mu(P) < \delta$ имеем

$$|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon. \tag{24}$$

Отметим, что обозначение $S(P, f, \alpha)$ на самом деле неполно, так как сумма (22) зависит еще и от выбора точек t_i, удовлетворяющих условию $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$. Но это не может привести ни к какому недоразумению, если мы будем помнить, что соотношение (23) означает справедливость неравенства (24) при всяком P и всяком допустимом выборе точек t_i, если только $\mu(P) < \delta$.

6.14. Теорема. (*a*) *Если* $\lim S(P, f, \alpha)$ *при* $\mu(P) \to 0$ *существует, то* $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *и*

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(P, f, \alpha) = \int_a^b f\,d\alpha. \tag{25}$$

(*b*) *Если* (i) f *непрерывна или если* (ii) $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *и* α *непрерывна на* $[a, b]$, *то выполняется соотношение* (25).

Упражнение 4 покажет, что требование непрерывности в утверждении (*b*) не может быть опущено.

Доказательство. Допустим сначала, что предел в левой части равенства (25) существует и равен A. Пусть задано число $\varepsilon > 0$.

Существует $\delta > 0$, такое, что при $\mu(P) < \delta$ имеем

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < S(P, f, \alpha) < A + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{26}$$

Выберем такое P. Если мы заставим точки t_i пробегать сегменты $[x_{i-1}, x_i]$ и возьмем верхнюю и нижнюю грани чисел $S(P, f, \alpha)$, полученных таким образом, то, принимая во внимание (26), мы придем к неравенству

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant L(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) \leqslant A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

По теореме 6.6 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$; это завершает доказательство утверждения (a), так как

$$L(P, f, \alpha) \leqslant \int f\,d\alpha \leqslant U(P, f, \alpha).$$

Часть (i) утверждения (b) содержится в теореме 6.8.

Чтобы доказать часть (ii), допустим, что $f \in \mathscr{R}(\alpha)$, функция α непрерывна и $\varepsilon > 0$. Существует разбиение P^*, такое, что

$$U(P^*, f, \alpha) < \int f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{27}$$

Положим

$$M = \sup |f(x)| \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Поскольку функция α равномерно непрерывна на $[a, b]$, существует $\delta_1 > 0$, обладающее следующим свойством: если P — любое разбиение сегмента $[a, b]$, такое, что $\mu(P) < \delta_1$, то $\Delta\alpha_i < \varepsilon/4Mn$ при всех i, где n — число сегментов разбиения P^*. Пусть P — любое разбиение, такое, что $\mu(P) < \delta_1$. Рассмотрим сумму $U(P, f, \alpha)$. Вклад в эту сумму тех сегментов разбиения P, внутри которых содержится точка разбиения P^*, не превышает величины

$$(n-1)\max_i \Delta\alpha_i M < \frac{(n-1)\varepsilon M}{4Mn} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

В соединении с (27) это дает

$$U(P, f, \alpha) < \int f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \tag{28}$$

при всех P, для которых $\mu(P) < \delta_1$.

Точно таким же способом мы можем показать, что существует число $\delta_2 > 0$, такое, что

$$L(P, f, \alpha) > \int f\,d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \tag{29}$$

при всех P, для которых $\mu(P) < \delta_2$.

Выбирая $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, мы видим, что неравенства (28) и (29) выполняются при каждом P, таком, что $\mu(P) < \delta$.

Поскольку, очевидно,

$$L(P, f, \alpha) \leqslant S(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha),$$

из (28) и (29) следует, что

$$S(P, f, \alpha) < \int f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S(P, f, \alpha) > \int f\,d\alpha - \frac{\varepsilon}{2},$$

а из этих двух последних неравенств видно, что

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int f\,d\alpha \right| < \varepsilon$$

при всех P, таких, что $\mu(P) < \delta$.

Доказательство закончено.

Интегрирование и дифференцирование

В этом разделе мы все еще будем заниматься вещественными функциями. Мы покажем, что интегрирование и дифференцирование являются в некотором смысле взаимно обратными операциями.

6.15. Теорема. *Пусть $f \in \mathscr{R}$ на $[a, b]$. Для $a \leqslant x \leqslant b$ положим*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Тогда функция F непрерывна на $[a, b]$[1]*; более того, если функция f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция F дифференцируема в точке x_0 и*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Функция f ограничена, так как $f \in \mathscr{R}$. Допустим, что $|f(t)| \leqslant M$, если $a \leqslant t \leqslant b$. При $a \leqslant x < y \leqslant b$ имеем

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leqslant M(y - x)$$

---

[1]) Функция F не определена в точке a, ибо символу $\int_a^a f(t)\,dt$ не приписывалось никакого смысла (в п. 2.19 при определении сегмента как одномерной клетки сегменты вида $[a, a]$ были исключены из рассмотрения). Для того чтобы все утверждения теоремы были верными, следует считать, что $F(a) = 0$. — *Прим. перев.*

по теореме 6.10 (*c*) и (*d*). Мы видим, что для данного $\varepsilon > 0$

$$|F(y) - F(x)| < \varepsilon,$$

если только $|y - x| < \varepsilon/M$. Этим доказана непрерывность (и более того, равномерная непрерывность) функции F.

Допустим теперь, что функция f непрерывна в точке x_0. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

если $|t - x_0| < \delta$ и $a \leqslant t \leqslant b$. Тогда при

$$x_0 - \delta < s \leqslant x_0 \leqslant t < x_0 + \delta \quad \text{и} \quad a \leqslant s < t \leqslant b$$

мы по теореме 6.10 (*d*) имеем

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t [f(u) - f(x_0)]\, du \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, $F'(x_0) = f(x_0)$.

6.16. Теорема. *Если $f \in \mathscr{R}$ на $[a, b]$ и существует дифференцируемая функция F на $[a, b]$, такая, что $F' = f$, то*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Эту теорему обычно называют *основной теоремой интегрального исчисления.* Ее постоянно применяют при вычислении интегралов.

Доказательство. Для данного разбиения P сегмента $[a, b]$ выберем t_i $(i = 1, \ldots, n)$ так, что $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$ и

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) f(t_i).$$

Это возможно по теореме 5.10. Тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta x_i,$$

а последняя сумма стремится к $\int_a^b f(x)\, dx$, когда $\mu(P) \to 0$, по теореме 6.14 (где $\alpha(x) = x$).

6.17. Теорема. *Если $f \in \mathscr{R}$ и $\alpha' \in \mathscr{R}$ на $[a, b]$, то $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ и*

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x)\, \alpha'(x)\, dx.$$

Эта теорема описывает одну из ситуаций, когда интеграл Стильтьеса сводится к интегралу Римана.

Доказательство. Заметим сначала, что по теореме 6.12 $f\alpha' \in \mathscr{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем M так, что $|f| \leqslant M$. Поскольку $f\alpha' \in \mathscr{R}$ и $\alpha' \in \mathscr{R}$, из теоремы 6.14 (b) следует, что существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, такие, что

$$\left| \sum f(t_i)\,\alpha'(t_i)\,\Delta x_i - \int f\alpha' \right| < \varepsilon, \tag{30}$$

если $\mu(P) < \delta_1$ и $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$, и

$$\left| \sum \alpha'(t_i)\,\Delta x_i - \int \alpha' \right| < \varepsilon,$$

если $\mu(P) < \delta_2$ и $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$.

Если s_i — другая точка, такая, что $x_{i-1} \leqslant s_i \leqslant x_i$, то мы имеем

$$\sum |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)|\,\Delta x_i < 2\varepsilon, \tag{31}$$

когда $\mu(P) < \delta_2$ и $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$, $x_{i-1} \leqslant s_i \leqslant x_i$.

Выберем теперь P так, что $\mu(P) < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, и пусть $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. По теореме 5.10 существуют точки $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, такие, что $\Delta\alpha_i = \alpha'(s_i)\,\Delta x_i$. Тогда

$$\sum f(t_i)\,\Delta\alpha_i = \sum f(t_i)\,\alpha'(t_i)\,\Delta x_i + \sum f(t_i)\,[\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)]\,\Delta x_i. \tag{32}$$

Согласно (30) и (31), левая часть равенства (32) отличается от $\int f\alpha'$ меньше, чем на $(2M+1)\,\varepsilon$. Это означает, что

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(P, f, \alpha) = \int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx;$$

принимая во внимание теорему 6.14 (a), мы приходим к требуемому заключению.

Интегрирование векторнозначных функций

6.18. Определение. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — вещественные функции на $[a, b]$, и пусть $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_k)$ — соответствующее отображение сегмента $[a, b]$ в пространство R^k. Пусть функция α монотонно возрастает на $[a, b]$. Мы будем говорить, что $\mathbf{f} \in \mathscr{R}(\alpha)$, если $f_j \in \mathscr{R}(\alpha)$ при $j = 1, \ldots, k$. В этом случае мы, по определению, полагаем

$$\int_a^b \mathbf{f}\,d\alpha = \left(\int_a^b f_1\,d\alpha, \ldots, \int_a^b f_k\,d\alpha \right).$$

Иными словами, $\int \mathbf{f}\, d\alpha$ — это точка пространства R^k, j-я координата которой равна $\int f_j\, d\alpha$.

Ясно, что утверждения (*a*), (*c*), (*e*) теоремы 6.10 верны и для этих векторнозначных интегралов; нужно просто применить прежние результаты к каждой координате. То же верно в отношении теорем 6.15—6.17. Для иллюстрации сформулируем аналог теоремы 6.16.

6.19. Теорема. *Если* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{F}$ *отображают сегмент* $[a, b]$ *в пространство* R^k, $\mathbf{f} \in \mathscr{R}$ *на* $[a, b]$ и $\mathbf{F}' = \mathbf{f}$, *то*

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a).$$

Однако аналог теоремы 6.12 (*b*) связан с некоторыми новыми моментами, по крайней мере в доказательстве.

6.20. Теорема. *Пусть* $\mathbf{f}$ *отображает* $[a, b]$ *в пространстве* R^k. *Если* $\mathbf{f} \in \mathscr{R}(\alpha)$ *для какой-нибудь монотонно возрастающей на* $[a, b]$ *функции* α, *то* $|\mathbf{f}| \in \mathscr{R}(\alpha)$ *и*

$$\left| \int_a^b \mathbf{f}\, d\alpha \right| \leqslant \int_a^b |\mathbf{f}|\, d\alpha. \tag{33}$$

Доказательство. Если $f_1, \ldots, f_k$ — компоненты отображения $\mathbf{f}$, то

$$|\mathbf{f}| = (f_1^2 + \ldots + f_k^2)^{1/2}. \tag{34}$$

По теореме 6.11 каждая из функций f_j^2 принадлежит множеству $\mathscr{R}(\alpha)$, следовательно, этому множеству принадлежит и их сумма. Поскольку x^2 — непрерывная функция от x, теорема 4.17 показывает, что квадратный корень — функция, непрерывная на сегменте $[0, M]$ при каждом вещественном M. Если мы еще раз применим теорему 6.11, то увидим, что $|\mathbf{f}| \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Чтобы доказать (33), положим $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$, где $y_j = \int f_j\, d\alpha$. Тогда $\mathbf{y} = \int \mathbf{f}\, d\alpha$ и

$$|\mathbf{y}|^2 = \sum y_j^2 = \sum y_j \int f_j\, d\alpha = \int \left(\sum y_j f_j \right) d\alpha.$$

В силу неравенства Шварца,

$$\sum y_j f_j(t) \leqslant |\mathbf{y}|\, |\mathbf{f}(t)| \qquad (a \leqslant t \leqslant b); \tag{35}$$

значит, из теоремы 6.10 (b) следует, что

$$|\mathbf{y}|^2 \leqslant |\mathbf{y}| \int |\mathbf{f}|\, d\alpha. \tag{36}$$

Если $\mathbf{y}=\mathbf{0}$, то неравенство (33) тривиально. Если $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$, то, разделив (36) на $|\mathbf{y}|$, мы получим (33).

Функции ограниченной вариации

До сих пор мы занимались интегрированием относительно монотонных функций α. В самом деле, неравенство $\Delta\alpha_i \geqslant 0$ играло основную роль во всех доказательствах, связанных с $L(P, f, \alpha)$ и $U(P, f, \alpha)$. Рамки теории интегрирования, развитой в предыдущих разделах, можно расширить без значительных трудностей, если заменить класс монотонных функций классом функций ограниченной вариации. Чтобы избежать повторений, мы сразу же определим этот класс для векторнозначных функций.

6.21. Определение. Пусть $\mathbf{f}$ — отображение сегмента $[a, b]$ в пространство R^k. Если $P=\{x_0, \ldots, x_n\}$ — разбиение сегмента $[a, b]$, то положим

$$\Delta\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(x_i) - \mathbf{f}(x_{i-1})$$

и

$$V(\mathbf{f};\ a,\ b) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\Delta\mathbf{f}_i|, \tag{37}$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям сегмента $[a, b]$.

Назовем число $V(\mathbf{f};\ a,\ b)$ *полной вариацией* отображения $\mathbf{f}$ на сегменте $[a, b]$. Если из контекста ясно, о каком сегменте идет речь, то мы будем сокращенно писать $V(\mathbf{f})$.

Если $V(\mathbf{f};\ a,\ b) < +\infty$, то говорят, что $\mathbf{f}$ — *функция ограниченной вариации* на $[a, b]$.

Многие свойства векторнозначных функций ограниченной вариации можно получить сведéнием к случаю вещественных функций.

6.22. Теорема. *Пусть $\mathbf{f}=(f_1, \ldots, f_k)$ отображает сегмент $[a, b]$ в пространство R^k. Тогда $\mathbf{f}$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$ в том и только в том случае, когда каждая из функций f_j имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$. Для $1 \leqslant j \leqslant k$ имеем*

$$V(f_j) \leqslant V(\mathbf{f}) \leqslant \sum_{r=1}^{k} V(f_r).$$

Доказательство. Для любого разбиения $\{x_0, \ldots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$ имеем

$$|f_j(x_i)-f_j(x_{i-1})|\leqslant|\mathbf{f}(x_i)-\mathbf{f}(x_{i-1})|\leqslant\sum_{r=1}^{k}|f_r(x_i)-f_r(x_{i-1})|.$$

Если мы просуммируем эти неравенства по $i=1, \ldots, n$, а затем перейдем к верхним граням, то мы получим утверждение теоремы.

6.23. Примеры. (a) Если f — монотонная функция на $[a, b]$, то f — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, и $V(f)=|f(b)-f(a)|$.

(b) Если $\mathbf{f}'$ существует и ограничена на $[a, b]$, то $\mathbf{f}$ — функция ограниченной вариации. Действительно, если $|\mathbf{f}'(x)|\leqslant M$, то по теореме 5.20

$$\sum_{i=1}^{n}|\mathbf{f}(x_i)-\mathbf{f}(x_{i-1})|\leqslant\sum_{i=1}^{n}M(x_i-x_{i-1})=M(b-a)$$

для любого разбиения сегмента $[a, b]$.

(c) Функция f может быть непрерывной, не будучи функцией ограниченной вариации. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x} & (0<x\leqslant 2),\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

Выберем разбиение, состоящее из точек

$$0,\ \frac{2}{2n-1},\ \frac{2}{2n-3},\ \ldots,\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{3},\ 2.$$

Соответствующая сумма, фигурирующая в (37), равна в этом случае

$$\left(2+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{2}{2n-3}+\frac{2}{2n-1}\right)+$$
$$+\frac{2}{2n-1}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},$$

а это число может быть сделано сколь угодно большим за счет выбора достаточно большого n, ибо ряд $\sum\frac{1}{n}$ расходится.

(d) Ясно, что каждая функция ограниченной вариации ограничена, так как $|\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(a)|\leqslant V(\mathbf{f})$ при всех $x\in[a, b]$.

Мы увидим (теорема 6.27), что существует тесная связь между функциями ограниченной вариации и монотонными функциями. Сумма или произведение двух монотонных функций не обязательно монотонны. Например, x и x^2 монотонны на $[0, 1]$, а

функция $x-x^2$ не монотонна; функция x монотонна на $[-1, 1]$, а функция x^2 — нет. Однако класс функций ограниченной вариации замкнут относительно операций сложения и умножения.

6.24. Теорема. *Если f и g — комплексные функции ограниченной вариации на $[a, b]$, то $f+g$ и fg — функции ограниченной вариации на $[a, b]$.*

(Утверждение, касающееся суммы $f+g$, верно и для векторнозначных функций; доказательство не меняется.)

Доказательство. Для любого разбиения сегмента $[a, b]$ имеем

$$\sum |\Delta f_i + \Delta g_i| \leqslant \sum |\Delta f_i| + \sum |\Delta g_i| \leqslant V(f) + V(g).$$

Значит, $V(f+g) \leqslant V(f) + V(g)$, и первая часть теоремы доказана.

Теперь выберем A и B так, что $|f(x)| \leqslant A$, $|g(x)| \leqslant B$ на $[a, b]$. Если $h = fg$, то

$$\Delta h_i = f(x_i)\,\Delta g_i + g(x_{i-1})\,\Delta f_i,$$

поэтому

$$\sum |\Delta h_i| \leqslant A \sum |\Delta g_i| + B \sum |\Delta f_i| \leqslant A V(g) + B V(f).$$

Значит, $V(fg) \leqslant A V(g) + B V(f)$. Тем самым доказана вторая часть.

Следствие. *Если f и g монотонно возрастают на $[a, b]$, то $f-g$ есть функция ограниченной вариации на $[a, b]$.*

Обратное утверждение тоже верно (см. теорему 6.27).

6.25. Определение. Пусть $\mathbf{f}$ отображает сегмент $[a, b]$ в пространство R^k, и пусть $\mathbf{f}$ — функция ограниченной вариации. Положим

$$v_{\mathbf{f}}(x) = V(\mathbf{f};\ a,\ x) \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{38}$$

Назовем $v_{\mathbf{f}}$ *функцией полной вариации* функции $\mathbf{f}$; $v_{\mathbf{f}}$, очевидно, монотонно возрастает на $[a, b]$ и $v_{\mathbf{f}}(a) = 0$.

6.26. Теорема. *Пусть $\mathbf{f}$ — функция ограниченной вариации, отображающая сегмент $[a, b]$ в пространство R^k.*

(*a*) *Если $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$, то*

$$V(\mathbf{f};\ a,\ y) = V(\mathbf{f};\ a,\ x) + V(\mathbf{f};\ x,\ y). \tag{39}$$

(*b*) *Если функция $\mathbf{f}$ непрерывна на $[a, b]$, то и функция $v_{\mathbf{f}}$ тоже непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Если $x = a$ или $y = x$, то равенство (39) тривиально, так как $V(\mathbf{f};\ x,\ x) = 0$. Допустим, что $a < x < y$ и задано число $\varepsilon > 0$. Существует разбиение $\{x_i\}$ сегмента $[a, y]$,

такое, что

$$v_{\mathbf{f}}(y)-\varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{f}(x_i)-\mathbf{f}(x_{i-1})| \leqslant v_{\mathbf{f}}(y). \tag{40}$$

Если точка x не находится среди точек x_i, то мы добавим ее к набору $\{x_i\}$ и получим таким образом новое разбиение P, для которого неравенство (40) все еще выполняется.

Правая часть неравенства (39) оказывается верхней гранью множества всех сумм, фигурирующих в (40). Значит,

$$v_{\mathbf{f}}(y)-\varepsilon \leqslant v_{\mathbf{f}}(x)+V(\mathbf{f};\ x,\ y) \leqslant v_{\mathbf{f}}(y);$$

поскольку ε произвольно, равенство (39) доказано.

Теперь допустим, что функция $\mathbf{f}$ непрерывна, $a<y\leqslant b$ и

$$V(\mathbf{f};\ x,\ y)>\delta \tag{41}$$

при некотором фиксированном $\delta>0$ и при каждом $x\in[a,\ y)$. (Это приведет к противоречию.) Взяв в (41) $x=a$, мы увидим, что существует разбиение $\{x_i\}$ сегмента $[a,\ y]$, такое, что

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{f}(x_i)-\mathbf{f}(x_{i-1})|>\delta. \tag{42}$$

Заметим, что $x_n=y$, $x_{n-1}<y$. Ввиду того что $\mathbf{f}$ непрерывна, существует точка a_1, такая, что $x_{n-1}\leqslant a_1<y$ и величины $|\mathbf{f}(y)-\mathbf{f}(x_{n-1})|$ и $|\mathbf{f}(a_1)-\mathbf{f}(x_{n-1})|$ отличаются сколь угодно мало; в частности, (42) выполняется, если заменить y таким числом a_1.

Иными словами, мы доказали, что существует $a_1<y$, такое, что $V(\mathbf{f};\ a,\ a_1)>\delta$.

Продолжим этот процесс, взяв a_1 вместо a, и т. д.; мы получим для каждого N числа

$$a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_N<y,$$

такие, что $V(\mathbf{f};\ a_{i-1},\ a_i)>\delta$ $(1\leqslant i\leqslant N)$.

Но отсюда в силу (39) следует, что $v_{\mathbf{f}}(y)\geqslant N\delta$ при любом N, что невозможно.

Это противоречие показывает, что

$$\lim_{x\to y} V(\mathbf{f};\ x,\ y)=0;$$

в силу (39) отсюда вытекает, что функция $v_{\mathbf{f}}$ непрерывна слева на $(a,\ b]$. Тем же способом доказывается непрерывность справа на $[a,\ b)$.

Замечание. Справедлива обратная теорема; формулировку можно найти в упражнении 6.

6.27. Теорема. *Если f — вещественная функция ограниченной вариации на $[a, b]$, то существуют монотонно возрастающие на $[a, b]$ функции p и q, такие, что $p(a) = q(a) = 0$ и*

$$f(x) - f(a) = p(x) - q(x), \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{43}$$

$$v_f(x) = p(x) + q(x). \tag{44}$$

Мы будем называть p и q соответственно функциями *положительной* и *отрицательной* вариации функции f; равенство (43) показывает, что функция f представима в виде разности двух монотонных функций.

Доказательство. Определим p и q равенствами

$$2p = v_f + f - f(a), \qquad 2q = v_f - f + f(a). \tag{45}$$

Ясно, что $p(a) = q(a) = 0$ и выполняются равенства (43) и (44). Если

$$a \leqslant x \leqslant y \leqslant b,$$

то (39) показывает, что

$$\begin{aligned} 2p(y) - 2p(x) &= V(f;\, x,\, y) + [f(y) - f(x)], \\ 2q(y) - 2q(x) &= V(f;\, x,\, y) - [f(y) - f(x)]. \end{aligned} \tag{46}$$

Ввиду того что $|f(y) - f(x)| \leqslant V(f;\, x,\, y)$, из (46) следует, что обе функции p и q — возрастающие.

Следствие 1. *Если f, кроме того, непрерывна на $[a, b]$, то тем же свойством обладают p и q.*

Это вытекает из теоремы 6.26 (b) и равенств (45).

Следствие 2. *Если f — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, то $f(x+)$ существует при $a \leqslant x < b$, $f(x-)$ существует при всех $a < x \leqslant b$ и множество точек разрыва функции f не более чем счетно.*

Это следует непосредственно из теоремы 6.22, разложения (43) и аналогичных фактов, относящихся к монотонным функциям (теоремы 4.29 и 4.30).

Представление вещественной функции ограниченной вариации в виде разности двух монотонных функций, конечно, не единственно; в самом деле, прибавляя одну и ту же возрастающую функцию к p и q, мы получим две возрастающие функции p_1 и q_1, такие, что $f(x) - f(a) = p_1(x) - q_1(x)$. Однако разложение (43) обладает некоторым свойством минимальности, выделяющим его среди всех прочих разложений такого рода (см. упражнение 10).

Дальнейшие теоремы об интегрировании

6.28. Определение. Теперь мы обратимся к интегрированию относительно любой функции ограниченной вариации, а не только относительно монотонной функции. Если α — вещественная функция ограниченной вариации на $[a, b]$ и если $\alpha = \beta - \gamma$, где β и γ — возрастающие функции, то естественное определение таково:

$$\int f\,d\alpha = \int f\,d\beta - \int f\,d\gamma, \tag{47}$$

если только оба интеграла справа существуют в том смысле, в каком они были определены ранее.

Если $\alpha = \beta_1 - \gamma_1$ — другое разложение функции α в разность возрастающих функций, то $\beta + \gamma_1 = \beta_1 + \gamma$, и поэтому [см. теорему 6.10 (*e*)]

$$\int f\,d\beta + \int f\,d\gamma_1 = \int f\,d\beta_1 + \int f\,d\gamma. \tag{48}$$

Отсюда следует, что интеграл $\int f\,d\alpha$, определенный в (47), не зависит от выбора разложения функции α, *если только* f принадлежит множествам $\mathscr{R}(\beta)$, $\mathscr{R}(\beta_1)$, $\mathscr{R}(\gamma)$ и $\mathscr{R}(\gamma_1)$.

Поэтому в дальнейшем в этой главе мы будем рассматривать лишь два случая, когда все интересующие нас интегралы автоматически существуют:

(*a*) функция f непрерывна, функция α — ограниченной вариации;

(*b*) функции f и α — ограниченной вариации и α непрерывна.

В случае (*a*) мы сошлемся на теорему 6.8. В случае (*b*) условимся представлять α в виде разности только *непрерывных* монотонных функций [это можно сделать, согласно следствию 1 из теоремы 6.27]; разлагая f в разность монотонных функций, мы сошлемся на теорему 6.9.

Заметим, кроме того, что в обоих случаях теорема 6.14 *применима в полном объеме.*

Теперь мы могли бы, конечно, распространить это определение на векторнозначные функции $\mathbf{f}$. Однако более интересным представляется другое обобщение, которое применяется в теории аналитических функций. Это обобщение получится, если обе функции f и α считать комплекснозначными.

Если $f = f_1 + if_2$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, где f_1, f_2, α_1, α_2 — вещественные функции на $[a, b]$, и если выполняется условие (*a*) или (*b*), то мы положим

$$\int f\,d\alpha = \int f_1\,d\alpha_1 - \int f_2\,d\alpha_2 + i\int f_1\,d\alpha_2 + i\int f_2\,d\alpha_1. \tag{49}$$

Четыре интеграла, стоящие в правой части этого равенства, были определены в (47).

Обычные свойства аддитивности [теоремы 6.10 (*a*), (*c*), (*e*)] в этой ситуации легко проверяются. Рассмотрим теперь аналог теоремы 6.12 (*b*) [см. также теорему 6.20] для комплексных α.

6.29. Теорема. *Пусть f и α — комплексные функции на $[a, b]$, удовлетворяющие условиям (a) или (b) определения 6.28. Пусть v — функция полной вариации функции α на $[a, b]$. Тогда*

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dv. \tag{50}$$

Следствие.

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leqslant V(\alpha) \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|.$$

Доказательство. Если выполнено (*a*), то функция $|f|$ непрерывна. Если выполнено (*b*), то непрерывна функция v (теорема 6.26), а так как f — функция ограниченной вариации, то такова и функция $|f|$. Значит, второй интеграл в (50) существует в обоих случаях.

Для любого разбиения $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$ имеем

$$\left|\sum f(t_i)\,\Delta\alpha_i\right| \leqslant \sum |f(t_i)|\,|\Delta\alpha_i| \leqslant \sum |f(t_i)|\,\Delta v_i, \tag{51}$$

если $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. При $\mu(P) \to 0$ первая сумма в (51) стремится к $\int f\,d\alpha$, а последняя — к $\int |f|\,dv$ по теореме 6.14. Тем самым неравенство (50) доказано.

6.30. Теорема. *Пусть f и α — комплексные функции ограниченной вариации на $[a, b]$, а функция f, кроме того, непрерывна. Тогда*

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(b)\,\alpha(b) - f(a)\,\alpha(a) - \int_a^b \alpha\,df. \tag{52}$$

Замечание. По аналогии с приемом суммирования по частям равенство (52) называют *формулой интегрирования по частям*. Часто оказывается удобным рассматривать $\int \alpha\,df$ вместо $\int f\,d\alpha$.

Доказательство. Выберем какое-нибудь разбиение $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$. Выберем $t_1, \ldots, t_n$ так, что $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$, положим $t_0 = a$, $t_{n+1} = b$, и пусть Q — разбиение

$\{t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}\}$ сегмента $[a, b]$. Тогда, суммируя по частям, получим

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] =$$

$$= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha(x_{i-1})[f(t_i) - f(t_{i-1})] =$$

$$= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - S(Q, \alpha, f),$$

так как $t_{i-1} \leqslant x_{i-1} \leqslant t_i$. Если $\mu(P) \to 0$, то и $\mu(Q) \to 0$, и теорема 6.14 показывает, что $S(P, f, \alpha) \to \int f\,d\alpha$, $S(Q, \alpha, f) \to \int \alpha\,df$. Отсюда следует равенство (52).

Замечание. Если функция f непрерывна, а α — функция ограниченной вариации, то (52) можно использовать для *определения* интеграла $\int \alpha\,df$ даже в том случае, когда f не есть функция ограниченной вариации. Это приводит еще к одному обобщению стильтьесовского процесса интегрирования, которое мы, однако, не будем в дальнейшем рассматривать.

В следующих двух теоремах мы должны будем ограничиться *вещественными* функциями — так же, как и в случае теорем о среднем в теории дифференцирования.

6.31. Теорема. (Первая теорема о среднем значении.) *Если f непрерывна и вещественна, а α монотонно возрастает на $[a, b]$, то существует точка x, такая, что $a \leqslant x \leqslant b$ и*

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(x)[\alpha(b) - \alpha(a)]. \tag{53}$$

Доказательство. Положим

$$M = \sup f(t), \quad m = \inf f(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Тогда

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leqslant \int_a^b f\,d\alpha \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Значит, существует число λ, такое, что $m \leqslant \lambda \leqslant M$ и

$$\int_a^b f\,d\alpha = \lambda[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

В силу теорем 4.16 и 4.23 существует точка x, принадлежащая сегменту $[a, b]$, для которой $f(x) = \lambda$, откуда и следует (53)

Замечание. Может случиться, что точку x нельзя выбрать так, что $a < x < b$. Например, если

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & (x = a), \\ 1 & (a < x \leqslant b), \end{cases}$$

а f непрерывна, то

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(a) = f(a)\,[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

6.32. Теорема. (Вторая теорема о среднем значении.) *Пусть функция f монотонна, а α — функция ограниченной вариации, вещественная и непрерывная на $[a, b]$. Тогда существует такая точка $x \in [a, b]$, что*

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(a)\,[\alpha(x) - \alpha(a)] + f(b)\,[\alpha(b) - \alpha(x)].$$

Доказательство. Согласно теоремам 6.30 и 6.31,

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(b)\,\alpha(b) - f(a)\,\alpha(a) - \int_a^b \alpha\,df =$$

$$= f(b)\,\alpha(b) - f(a)\,\alpha(a) - \alpha(x)\,[f(b) - f(a)]$$

при некотором $x \in [a, b]$.

6.33. Теорема. (Замена переменной.) *Пусть f и φ непрерывны на $[a, b]$, φ строго возрастает на $[a, b]$, а ψ — функция, обратная к φ. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(y))\,d\psi(y). \tag{54}$$

[Формально (54) получается, если положить $y = \varphi(x)$, $x = \psi(y)$.]

Доказательство. Для любого разбиения P

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b$$

положим $y_i = \varphi(x_i)$ $(i = 0, \ldots, n)$ и рассмотрим разбиение Q:

$$\varphi(a) = y_0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_{n-1} \leqslant y_n = \varphi(b).$$

Полагая $g(y) = f(\psi(y))$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} g(y_i)\,[\psi(y_i) - \psi(y_{i-1})]. \tag{55}$$

В силу равномерной непрерывности функции φ на $[a, b]$ (теорема 4.19), если $\mu(P) \to 0$, то $\mu(Q) \to 0$. Таким образом, если $\mu(P) \to 0$, то обе части равенства (55) стремятся к соответствующим частям равенства (54), поскольку функция g непрерывна. Доказательство закончено.

Спрямляемые кривые

В заключение этой главы мы рассмотрим одно интересное геометрическое приложение некоторой части предшествующей теории. Случай $k = 2$ (т. е. случай плоских кривых) особенно важен при изучении аналитических функций комплексной переменной.

6.34. Определение. Непрерывное отображение γ сегмента $[a, b]$ в пространство R^k называется *кривой* в R^k. Если отображение γ взаимно однозначно, то γ называется *дугой*. Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, но $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ для любой другой пары различных точек t_1, t_2, принадлежащих сегменту $[a, b]$, то γ называется *простой замкнутой кривой*.

Следует заметить, что кривая определяется как *отображение*, а не как множество точек. Конечно, с каждой кривой в R^k связано некоторое множество точек в R^k, а именно множество значений отображения γ, однако для разных кривых это множество может оказаться одним и тем же.

Мы будем называть кривую γ *спрямляемой*, если γ — функция ограниченной вариации; *длиной* кривой γ мы будем называть число $V(\gamma; a, b)$.

Чтобы обосновать это определение, напомним, что $V(\gamma; a, b)$ — это верхняя грань множества всех сумм вида

$$\sum_{i=1}^{n} |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| \quad (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b). \tag{56}$$

В этой сумме i-е слагаемое равно расстоянию (в R^k) между точками $\gamma(x_{i-1})$ и $\gamma(x_i)$, а сама сумма равна длине ломаной с вершинами в точках $\gamma(x_0)$, $\gamma(x_1)$, ..., $\gamma(x_n)$, расположенных в указанном порядке. Когда диаметр разбиения стремится к нулю, эти ломаные приближаются к множеству значений отображения γ. Разумеется, мы здесь ничего не *доказываем*, а лишь пытаемся объяснить разумность такого определения длины.

В некоторых случаях длина кривой выражается интегралом Римана. Мы докажем это для *непрерывно дифференцируемых* кривых, т. е. для кривых γ, производная γ' которых непрерывна.

6.35. Теорема. *Если функция γ' непрерывна на $[a, b]$, то γ спрямляема, а ее длина равна*

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Доказательство. Мы должны доказать, что $\int |\gamma'| = V(\gamma)$. Если $\{x_0, \ldots, x_n\}$ — разбиение сегмента $[a, b]$, то, как показывают теоремы 6.19 и 6.20,

$$\sum |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| = \sum \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\,dt \right| \leqslant \sum \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt,$$

так что

$$V(\gamma) \leqslant \int |\gamma'|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Ввиду того что функция γ' равномерно непрерывна на $[a, b]$, существует $\delta > 0$, такое, что $|\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \varepsilon$, если $|s - t| < \delta$. Пусть $\{x_0, \ldots, x_n\}$ — разбиение сегмента $[a, b]$, диаметр которого меньше δ. Если $x_{i-1} \leqslant t \leqslant x_i$, то

$$|\gamma'(t)| \leqslant |\gamma'(x_i)| + \varepsilon,$$

так что

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)|\,dt - \varepsilon\Delta x_i \leqslant |\gamma'(x_i)|\,\Delta x_i = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(t) + \gamma'(x_i) - \gamma'(t)]\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\,dt \right| + \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(x_i) - \gamma'(t)]\,dt \right| \leqslant |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| + \varepsilon\Delta x_i.$$

Суммируя эти неравенства по $i = 1, \ldots, n$, мы получим

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \leqslant \sum_{i=1}^n |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| + 2\varepsilon(b - a) \leqslant$$

$$\leqslant V(\gamma;\ a, b) + 2\varepsilon(b - a).$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует, что $\int |\gamma'| \leqslant V(\gamma)$, и доказательство закончено.

Упражнения

1. Пусть функция α возрастает на $[a, b]$, $a \leqslant x_0 \leqslant b$, α непрерывна в точке x_0, $f(x_0) = 1$ и $f(x) = 0$, если $x \neq x_0$. Доказать, что $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ и $\int f\, d\alpha = 0$.

2. Пусть $f \geqslant 0$, непрерывна на $[a, b]$ и $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Доказать, что $f(x) = 0$ при всех $x \in [a, b]$ (ср. с упражнением 1).

3. Определим три функции β_1, β_2, β_3 следующим образом: $\beta_j(x) = 0$, если $x < 0$, $\beta_j(x) = 1$, если $x > 0$ при $j = 1, 2, 3$; $\beta_1(0) = 0$, $\beta_2(0) = 1$, $\beta_3(0) = \frac{1}{2}$. Пусть f — ограниченная функция на $[-1, 1]$.

(*a*) Доказать, что $f \in \mathscr{R}(\beta_1)$ тогда и только тогда, когда $f(0+) = f(0)$, и что в этом случае

$$\int f\, d\beta_1 = f(0).$$

(*b*) Сформулировать и доказать аналогичный результат для β_2.

(*c*) Доказать, что $f \in \mathscr{R}(\beta_3)$ тогда и только тогда, когда f непрерывна в точке 0.

(*d*) Пусть f непрерывна в точке 0. Доказать, что

$$\int f\, d\beta_1 = \int f d\beta_2 = \int f d\beta_3 = f(0).$$

4. Используя обозначения упражнения 3, доказать, что $\beta_2 \in \mathscr{R}(\beta_1)$, несмотря на то что $\lim S(P, \beta_2, \beta_1)$ при $\mu(P) \to 0$ не существует.

5. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность различных точек интервала $(0, 1)$, и пусть $c_n > 0$, $\sum c_n < +\infty$. Положим

$$\alpha(x) = \sum_1^\infty c_n \beta_1(x - x_n),$$

где функция β_1 определена так же, как в упражнении 3. Пусть f непрерывна на $(0, 1)$. Доказать, что

$$\int_0^1 f\, d\alpha = \sum_1^\infty c_n f(x_n).$$

Указание. Положим $\alpha_1(x)=\sum_1^N c_n\beta_1(x-x_n)$, $\alpha_2=\alpha-\alpha_1$. Согласно упражнению 3, $\int f\,d\alpha_1=\sum_1^N c_n f(x_n)$. Кроме того, $\left|\int f d\alpha_2\right|\leqslant MV(\alpha_2)$, где $M=\sup|f(t)|$.

6. Пусть f отображает сегмент $[a, b]$ в пространство R^k, причем f — функция ограниченной вариации. Доказать, что функция v_f непрерывна в точке $x\in[a, b]$ тогда и только тогда, когда функция f непрерывна в этой точке.

7. Пусть $f(x)=0$ при всех иррациональных x, $f(x)=1$ при всех рациональных x. Доказать, что $f\notin\mathscr{R}$ на $[a, b]$ при любых a, b, таких, что $a<b$.

8. Показать, что

$$\int_0^3 x\,d([x]-x)=\frac{3}{2},$$

где $[x]$ — наибольшее из целых чисел, не превосходящих x (см. определение в упражнении 2 гл. 4).

9. Вычислить функции положительной, отрицательной и полной вариации функций

(*a*) $f(x)=3x^2-2x^3 \qquad (-2\leqslant x\leqslant 2)$,

(*b*) $f(x)=[x]-x \qquad (0\leqslant x<2)$.

10. Пусть f — вещественная функция ограниченной вариации на $[a, b]$, p и q — функции положительной и отрицательной вариации функции f, p_1 и q_1 — возрастающие функции на $[a, b]$ и $f=p_1-q_1$. Тогда $V(p)\leqslant V(p_1)$ и $V(q)\leqslant V(q_1)$, где V обозначает полную вариацию на $[a, b]$.

11. Пусть $g\in\mathscr{R}$ на $[a, b]$. Положим

$$f(x)=\int_a^x g(t)\,dt$$

и $g^+(t)=\max(g(t), 0)$, $g^-(t)=-\min(g(t), 0)$. Доказать, что f — функция ограниченной вариации на $[a, b]$ и что ее функции вариации задаются равенствами

$$v(x)=\int_a^x|g(t)|\,dt, \qquad p(x)=\int_a^x g^+(t)\,dt, \qquad q(x)=\int_a^x g^-(t)\,dt.$$

12. Пусть f — функция ограниченной вариации на сегменте $[0, 2\pi]$ и $f(2\pi) = f(0)$. Доказать, что каждый из интегралов

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

не превосходит $V(f)/n$ по абсолютной величине.

Указание. Проверить, что

$$n\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,d(\sin nx) = \int_0^{2\pi} \sin nx\,df(x).$$

13. Пусть γ_1, γ_2, γ_3 — кривые в комплексной плоскости, определенные на $[0, 2\pi)$ равенствами

$$\gamma_1(t) = e^{it}, \qquad \gamma_2(t) = e^{2it}, \qquad \gamma_3(t) = e^{2\pi i t \sin(1/t)}.$$

Показать, что эти три кривые имеют одно и то же множество значений, что γ_1 и γ_2 спрямляемы, что длина кривой γ_1 равна 2π, длина кривой γ_2 равна 4π, а кривая γ_3 не спрямляема.

14. Пусть γ_1 — кривая в R^k, заданная на $[a, b]$; пусть φ — непрерывное взаимно однозначное отображение сегмента $[c, d]$ на сегмент $[a, b]$, такое, что $\varphi(c) = a$. Положим, по определению, $\gamma_2(s) = \gamma_1(\varphi(s))$. Доказать, что дуга γ_2 — простая замкнутая спрямляемая кривая тогда и только тогда, когда то же самое верно в отношении γ_1. Доказать, что γ_2 и γ_1 имеют одну и ту же длину.

15. Пусть α возрастает на $[a, b]$, f и g — комплексные функции, причем $f \in \mathscr{R}(\alpha)$, $g \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$. Доказать неравенство Шварца

$$\left|\int fg\,d\alpha\right|^2 \leqslant \int |f|^2\,d\alpha \cdot \int |g|^2\,d\alpha.$$

Указание. Следовать доказательству теоремы 1.62. Вывести аналогичный результат, предполагая только, что α — функция ограниченной вариации.

16. Если $f \in \mathscr{R}$ на $[a, b]$ для любого $b > a$ и фиксированного a, то положим

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

если этот предел существует; в этом случае мы будем говорить, что интеграл сходится.

Доказать так называемый «интегральный признак» сходимости рядов: если $f(x) \geqslant 0$ и f монотонно убывает при $x \geqslant 1$, то

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

сходится в том и только в том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^\infty f(n).$$

17. Пусть функции f и g непрерывны на $[a, b]$ и α — функция ограниченной вариации на $[a, b]$. Положим

$$\beta(x) = \int_a^x f\,d\alpha \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Доказать, что

$$\int_a^b g\,d\beta = \int_a^b gf\,d\alpha.$$

18. Если γ — спрямляемая кривая в комплексной плоскости, заданная на $[0, 1]$, и если f — комплексная непрерывная функция, заданная на множестве значений кривой γ, то положим, по определению,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,d\gamma(t).$$

Пусть $\gamma(0) = A$, $\gamma(1) = B$. Доказать, что

$$(n+1)\int_\gamma z^n\,dz = B^{n+1} - A^{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Указание. Рассмотреть случай $A = 0$. При $n = 0$ результат тривиален. Допустим, что он верен при некотором n. Положим $f = \gamma^n$, $g = \gamma$, $\alpha = \gamma$ и определим β, как в упражнении 17. По предположению индукции,

$$(n+1)\beta(x) = [\gamma(x)]^{n+1}.$$

Применить упражнение 17 и проинтегрировать по частям.

19. Положим

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2)\, dt.$$

(*a*) Доказать, что $|f(x)| < 2/x$ при $x > 0$.

Указание. Положить $t^2 = u$ и воспользоваться второй теоремой о среднем значении.

(*b*) Найти верхний и нижний пределы функции $xf(x)$ при $x \to \infty$.