ГЛАВА 7

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы уделим основное внимание комплекснозначным (и тем самым вещественнозначным) функциям, хотя многие теоремы и доказательства без труда переносятся на случай векторнозначных функций и даже отображений в общие метрические пространства. Мы предпочитаем ограничиться более простым классом функций для того, чтобы сконцентрировать внимание на наиболее важных вопросах, возникающих при изменении порядка предельных переходов.

Вводные замечания

7.1. Определение. Пусть $\{f_n\}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, — последовательность функций, определенных на множестве E, и пусть последовательность чисел $\{f_n(x)\}$ сходится при каждом $x \in E$. Тогда мы можем определить функцию f, полагая

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E). \tag{1}$$

В подобных случаях мы будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ сходится на множестве E и что f — *предел*, или *предельная функция*, последовательности $\{f_n\}$. Иногда мы будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f *поточечно* на множестве E, если выполнено условие (1). Аналогично, если ряд $\sum f_n(x)$ сходится при любом $x \in E$, то мы полагаем, по определению,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E), \tag{2}$$

причем функция f называется *суммой* ряда $\sum f_n$.

Главная из возникающих в связи с этими определениями проблем такова: выяснить, сохраняются ли важнейшие свойства функций при выполнении предельных операций (1) и (2). Например, если функции f_n непрерывны, или дифференцируемы, или интегрируемы, то верно ли то же самое в отношении предельной

функции? Каковы соотношения между, скажем, f'_n и f' или между интегралами от f_n и от f?

Непрерывность функции f в точке x означает, что

$$\lim_{t\to x} f(t) = f(x).$$

Значит, спросить, будет ли предел последовательности непрерывных функций непрерывной функцией, это все равно, что спросить, верно ли равенство

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t), \tag{3}$$

т. е. важен ли порядок, в котором осуществляются предельные переходы. В левой части равенства (3) мы сначала устремляем n к ∞, затем t к x; в правой части — сначала $t \to x$, а затем $n \to \infty$.

Мы покажем сейчас на примерах, что, вообще говоря, два предельных перехода нельзя переставить без того, чтобы это не повлияло на результат. Затем мы докажем, что при некоторых условиях порядок, в котором выполняются операции предельного перехода, не имеет значения.

Наш первый и простейший пример связан с «двойной последовательностью».

7.2. Пример. Для $m = 1, 2, 3, \ldots$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ положим

$$s_{m,n} = \frac{m}{m+n}.$$

Тогда при каждом фиксированном n

$$\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1,$$

так что

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1. \tag{4}$$

С другой стороны, при каждом фиксированном m

$$\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0,$$

так что

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0. \tag{5}$$

7.3. Пример. Пусть

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (x \text{ вещественно, } n = 0, 1, 2, \ldots).$$

и пусть

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}. \tag{6}$$

Так как $f_n(0)=0$, то и $f(0)=0$. Ряд (6) представляет сумму геометрической прогрессии, и при $x\neq 0$ эта сумма равна $1+x^2$. Значит,

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x=0), \\ 1+x^2 & (x\neq 0), \end{cases} \tag{7}$$

так что сходящийся ряд, составленный из непрерывных функций, может иметь разрывную сумму.

7.4. Пример. При $m=1, 2, 3, \ldots$ положим

$$f_m(x)=\lim_{n\to\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n}.$$

Если $m!\,x$ — целое число, то $f_m(x)=1$. Для всех остальных значений x имеем $f_m(x)=0$. Теперь положим

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x).$$

Если x — иррациональное число, то $f_m(x)=0$ при всех m, значит, $f(x)=0$. Если x — рациональное число, скажем, $x=p/q$, то при $m\geqslant q$ произведение $m!\,x$ — целое число, так что $f(x)=1$. Значит,

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n}=\begin{cases} 0 & (x \text{ иррационально}), \\ 1 & (x \text{ рационально}). \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, мы получили всюду разрывную предельную функцию, которая не интегрируема по Риману (упражнение 7, гл. 6).

7.5. Пример. Пусть

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad (x \text{ вещественно, } n=1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

и

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0.$$

Тогда $f'(x)=0$, но

$$f_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx,$$

так что $\{f_n'\}$ не сходится к f'. Например,

$$f_n'(0)=\sqrt{n}\to+\infty$$

при $n\to\infty$, тогда как $f'(0)=0$.

7.6. Пример. Пусть

(10) $$f_n(x) = n^2 x (1 - x^2)^n \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Если $0 < x \leqslant 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

по теореме 3.20 (d). Ввиду того что $f_n(0) = 0$ при всяком n,

(11) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Простое вычисление показывает, что

$$\int_0^1 x(1 - x^2)^n\, dx = \frac{1}{2n+2}.$$

Таким образом, несмотря на (11),

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{n^2}{2n+2} \to \infty$$

при $n \to \infty$.

Если в (10) заменить коэффициент n^2 на n, то (11) все еще выполняется, но теперь

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2},$$

тогда как

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\, dx = 0.$$

Таким образом, предел интеграла не обязан совпадать с интегралом от предела даже тогда, когда оба эти предела конечны.

После этих примеров, показывающих, что беззаботная перестановка порядка предельных переходов может привести к ошибке, мы определим новый вид сходимости, более сильный, чем поточечная сходимость, описанная в определении 7.1. Этот новый вид сходимости позволит нам прийти к положительным результатам.

Равномерная сходимость

7.7. Определение. Мы будем говорить, что последовательность функций $\{f_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, сходится *равномерно* на множестве E к функции f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует целое число N, такое, что при $n \geqslant N$ имеем

(12) $$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

для всех $x \in E$.

Ясно, что каждая равномерно сходящаяся последовательность сходится и поточечно. Разница между этими двумя понятиями заключается в следующем. Если последовательность $\{f_n\}$ сходится поточечно на E, то существует функция f, такая, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x \in E$ существует целое число N, зависящее от ε *и от* x, такое, что (12) выполняется при $n \geqslant N$; если же $\{f_n\}$ сходится равномерно на E, то можно при каждом $\varepsilon > 0$ найти *одно* целое число N, которое будет годиться при *всех* $x \in E$.

Мы будем говорить, что ряд $\sum f_n(x)$ сходится равномерно на множестве E, если последовательность $\{s_n\}$ частных сумм, определенных равенством

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x),$$

равномерно сходится на множестве E.

Следующая теорема представляет собой критерий Коши равномерной сходимости.

7.8. Теорема. *Последовательность функций* $\{f_n\}$, *определенных на* E, *сходится равномерно на* E *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует целое* N, *такое, что при* $m \geqslant N$, $n \geqslant N$, $x \in E$ *имеем*

(13) $$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Допустим, что $\{f_n\}$ сходится равномерно на E, и пусть f — предельная функция. Тогда существует целое число N, такое, что из $n \geqslant N$, $x \in E$ следует неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

так что

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon,$$

если $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, $x \in E$.

Обратно, пусть выполняется условие Коши. По теореме 3.11 последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится при каждом x к пределу, который мы обозначим через $f(x)$. Мы должны доказать, что сходимость равномерна.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Выберем N так, чтобы выполнялось (13). Зафиксируем n и устремим m к ∞ в (13). Ввиду того что $f_m(x) \to f(x)$ при $m \to \infty$, получаем

(14) $$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

при любом $n \geqslant N$ и любом $x \in E$. Доказательство закончено.

Иногда полезен следующий критерий.

7.9. Теорема. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (x \in E).$$

Положим

$$M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

Тогда $f_n \to f$ равномерно на E в том и только в том случае, когда $M_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Мы не приводим подробного доказательства, так как это утверждение непосредственно следует из определения 7.7.

Вейерштрассу принадлежит очень удобный признак равномерной сходимости рядов.

7.10. Теорема. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, определенных на множестве E, и пусть*

$$|f_n(x)| \leqslant M_n \qquad (x \in E,\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда ряд $\sum f_n$ сходится равномерно на E, если ряд $\sum M_n$ сходится.

Заметим, что обратное не утверждается (и в действительности неверно).

Доказательство. Если ряд $\sum M_n$ сходится, то при любом $\varepsilon > 0$

$$\left|\sum_{i=n}^{m} f_i(x)\right| \leqslant \sum_{i=n}^{m} M_i \leqslant \varepsilon \qquad (x \in E),$$

если только m и n достаточно велики. Равномерная сходимость вытекает теперь из теоремы 7.8.

Равномерная сходимость и непрерывность

7.11. Теорема. *Пусть $f_n \to f$ равномерно на подмножестве E некоторого метрического пространства. Пусть x — предельная точка множества E, и пусть*

$$\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{15}$$

Тогда последовательность $\{A_n\}$ сходится и

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} A_n. \tag{16}$$

Иными словами, в данном случае

$$\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$, существует такое N, что из $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, $t \in E$ следует неравенство

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \varepsilon. \tag{18}$$

Полагая в (18) $t \to x$, получаем

$$|A_n - A_m| \leqslant \varepsilon$$

при $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, так что $\{A_n\}$ — последовательность Коши, и потому сходится. Обозначим ее предел через A.

Далее,

$$|f(t) - A| \leqslant |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|. \tag{19}$$

Выберем сначала n так, что

$$|f(t) - f_n(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{20}$$

при всех $t \in E$ (это возможно в силу равномерной сходимости) и что

$$|A_n - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{21}$$

Затем для этого n мы подберем такую окрестность V точки x, что из $t \in V$, $t \neq x$ следует

$$|f_n(t) - A_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{22}$$

Подставляя неравенства (20), (21) и (22) в (19), мы получим

$$|f(t) - A| \leqslant \varepsilon$$

для всех $t \in V$, $t \neq x$. Но это равносильно равенству (16).

7.12. Теорема. *Если $\{f_n\}$ — последовательность функций, непрерывных на множестве E, и если $f_n \to f$ равномерно на E, то и функция f непрерывна на множестве E.*

Этот очень важный результат сразу следует из теоремы 7.11.

Обратное неверно, т. е. последовательность непрерывных функций может неравномерно сходиться к непрерывной функции. Соответствующий пример дает последовательность (10) из п. 7.6 (для того чтобы убедиться в том, что эта последовательность сходится неравномерно, достаточно применить теорему 7.9). Тем не менее в некоторых случаях можно утверждать обратное. В частности, имеет место следующая теорема.

7.13. Теорема. *Пусть множество E компактно. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, непрерывных на E, сходящаяся к непрерывной функции f на E. Если $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ и при любом $x \in E$, то $f_n \to f$ равномерно на E.*

Доказательство. Положим $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$. Тогда g_n — непрерывная функция, $g_n \to 0$ и $g_n \geqslant g_{n+1}$. Мы должны доказать, что $g_n \to 0$ равномерно на E.

Пусть $\varepsilon > 0$. При любом $x \in E$ существует целое число n_x, такое, что

$$0 \leqslant g_{n_x}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу непрерывности функций g_n и монотонности последовательности $\{g_n\}$ существует открытое множество $J(x)$, содержащее точку x и такое, что

$$0 \leqslant g_n(t) \leqslant \varepsilon, \tag{23}$$

если $t \in J(x)$ и $n \geqslant n_x$.

Поскольку E — компактное множество, существует конечное множество точек $x_1, \ldots, x_m$, таких, что

$$E \subset J(x_1) \cup \ldots \cup J(x_m). \tag{24}$$

Полагая

$$N = \max(n_{x_1}, n_{x_2}, \ldots, n_{x_m}),$$

на основании (23) и (24) мы заключаем, что

$$0 \leqslant g_n(t) \leqslant \varepsilon$$

при всех $t \in E$, если $n \geqslant N$. Тем самым доказано, что сходимость равномерна.

Отметим, что компактность здесь существенна. Например, если

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \qquad (0 < x < 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{25}$$

то $f_n(x) \to 0$ монотонно на $(0, 1)$, но сходимость неравномерна.

Равномерная сходимость и интегрирование

7.14. Теорема. *Пусть α — монотонно возрастающая на $[a, b]$ функция. Пусть $f_n \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$, и пусть $f_n \to f$ равномерно на $[a, b]$. Тогда $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$ и*

$$\int_a^b f\,d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,d\alpha. \tag{26}$$

(Существование предела в (26) заранее не предполагается.)

Доказательство. Достаточно доказать теорему для вещественных f_n. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $\eta > 0$ так, что

$$\eta[\alpha(b) - \alpha(a)] \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{27}$$

Существует такое целое n, что

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\eta \qquad (a\leqslant x\leqslant b), \tag{28}$$

так как сходимость равномерна.

Зафиксируем n и выберем разбиение P сегмента $[a, b]$ так, чтобы иметь

$$U(P, f_n, \alpha)-L(P, f_n, \alpha)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}. \tag{29}$$

Это возможно по теореме 6.6.

Поскольку $f(x)\leqslant f_n(x)+\eta$, из (27) далее вытекает, что

$$U(P, f, \alpha)\leqslant U(P, f_n, \alpha)+\frac{\varepsilon}{3}, \tag{30}$$

а так как $f(x)\geqslant f_n(x)-\eta$, то

$$L(P, f, \alpha)\geqslant L(P, f_n, \alpha)-\frac{\varepsilon}{3}. \tag{31}$$

Комбинируя (29), (30) и (31), получаем

$$U(P, f, \alpha)-L(P, f, \alpha)\leqslant\varepsilon, \tag{32}$$

откуда следует, что $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$ (по теореме 6.6).

Для доказательства равенства (26) выберем такое N, что из $n\geqslant N$ следует

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

Тогда при $n\geqslant N$

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha-\int_a^b f_n\,d\alpha\right|=\left|\int_a^b (f-f_n)\,d\alpha\right|\leqslant\int_a^b |f-f_n|\,d\alpha\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\,[\alpha(b)-\alpha(a)].$$

Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, отсюда вытекает (26).

Следствие. *Если $f_n\in\mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$ и если*

$$f(x)=\sum_1^\infty f_n(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

причем ряд сходится равномерно на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f\,d\alpha=\sum_{n=1}^\infty\int_a^b f_n\,d\alpha.$$

Иными словами, ряд можно интегрировать почленно.

При изучении последовательностей интегралов вида

$$\int_a^b f\,dg_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где функция f непрерывна, а функции g_n — ограниченной вариации на $[a,\ b]$, обнаруживается, что равномерная сходимость последовательности $\{g_n\}$ к g — условие, еще недостаточно сильное, чтобы обеспечить равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,dg_n=\int_a^b f\,dg.$$

7.15. Пример. Пусть

$$g_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \qquad (0\leqslant x\leqslant 2\pi,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{33}$$

и

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cos m^6x \qquad (0\leqslant x\leqslant 2\pi). \tag{34}$$

По теореме 7.10 ряд в (34) сходится равномерно, так что функция f непрерывна на $[0,\ 2\pi]$. Кроме того, $g_n\to 0$ равномерно на $[0,\ 2\pi]$. Теперь заметим, что

$$\int_0^{2\pi} f\,dg_n=\int_0^{2\pi} fg_n'\,dx=\sqrt{n}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Положим $n=p^6$, где p — положительное целое. Ряд (34), почленно умноженный на $\cos nx$, также сходится равномерно, и мы можем проинтегрировать его почленно. Поскольку

$$\int_0^{2\pi}\cos nx\cdot\cos mx\,dx=0,$$

каковы бы ни были различные положительные числа m, n, имеем

$$\sqrt{n}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=p^3\int_0^{2\pi}\frac{1}{p^2}\cos^2 p^6x\,dx=p\pi,$$

так что при $n=p^6$

$$\int_0^{2\pi} f\,dg_n=\pi\sqrt[6]{n}.$$

Таким образом, числа $\int_0^{2\pi} f\,dg_n$ образуют неограниченную последовательность, хотя $g_n \to 0$ равномерно.

Теперь мы сформулируем имеющийся здесь положительный результат.

7.16. Теорема. *Пусть $\{g_n\}$ — последовательность функций ограниченной вариации на $[a, b]$, причем $g_n(a) = 0$, и пусть g — такая функция, что*

$$\lim_{n\to\infty} V(g - g_n) = 0 \tag{35}$$

и $g(a) = 0$. Тогда для любой функции f, непрерывной на $[a, b]$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f\,dg_n = \int_a^b f\,dg. \tag{36}$$

Кроме того, $g_n \to g$ равномерно на $[a, b]$.

Здесь V, как обычно, обозначает полную вариацию на $[a, b]$.

Доказательство. Вследствие неравенства

$$V(g) \leqslant V(g_n) + V(g - g_n)$$

(теорема 6.24) g — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, так что все интегралы в (36) существуют. Пусть $|f(x)| \leqslant M$ на $[a, b]$. Тогда

$$\left| \int_a^b f\,dg - \int_a^b f\,dg_n \right| = \left| \int_a^b f\,d(g - g_n) \right| \leqslant MV(g - g_n),$$

и (36) следует из (35).

Кроме того, $g_n \to g$ равномерно, так как

$$|g(x) - g_n(x)| \leqslant V(g - g_n) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Заметим, что предположение $g_n(a) = g(a) = 0$ сделано только ради удобства. Прибавив постоянные c_n к функциям g_n, мы не изменим интегралов, а сходимость последовательности $\{g_n(x)\}$ для одного значения $x \in [a, b]$, как легко показать, влечет за собой равномерную сходимость.

За другими относящимися сюда результатами мы отсылаем к упражнениям 9 и 10.

Равномерная сходимость и дифференцирование

Мы уже видели в примере 7.5, что из равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ не следует даже поточечной сходимости последовательности $\{f'_n\}$. Таким образом, нужны более сильные предположения, чтобы заключить, что $f'_n \to f'$ при $f_n \to f$.

7.17. Теорема. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность дифференцируемых функций на $[a, b]$, такая, что последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится при некотором $x_0 \in [a, b]$. Если последовательность $\{f'_n\}$ сходится равномерно на $[a, b]$, то и последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции f, причем*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{37}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем такое N, что из $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ следует

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{38}$$

и

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{39}$$

Если мы применим теорему 5.20 о среднем значении к функции $f_n - f_m$, то, как показывает (39), мы получим

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \leqslant \frac{|x-t|\,\varepsilon}{2(b-a)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{40}$$

при любых x и t из $[a, b]$ для $n \geqslant N$, $m \geqslant N$. Из неравенства

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

следует, в силу (38) и (40), что

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (a \leqslant x \leqslant b,\ n \geqslant N,\ m \geqslant N),$$

а потому $\{f_n\}$ сходится равномерно на $[a, b]$. Пусть

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Зафиксируем точку x сегмента $[a, b]$ и положим

$$\varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad \varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \tag{41}$$

при $a \leqslant t \leqslant b$, $t \neq x$. Тогда

$$\lim_{t\to x} \varphi_n(t) = f'_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{42}$$

Первое неравенство в (40) показывает, что

$$|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\qquad(n\geqslant N,\ m\geqslant N),$$

поэтому $\{\varphi_n\}$ сходится равномерно при $t\neq x$. Поскольку $\{f_n\}$ сходится к f, то, в силу (41),

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t) \tag{43}$$

равномерно на множестве всех t, таких, что $a\leqslant t\leqslant b$, $t\neq x$.

Применяя к последовательности $\{\varphi_n\}$ теорему 7.11, заключаем на основании (42) и (43), что

$$\lim_{t\to x}\varphi(t)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x),$$

а это, в силу определения функции $\varphi(t)$, и есть (37).

Замечание. Если дополнительно предположить, что функции f'_n непрерывны, то можно получить гораздо более короткое доказательство равенства (37), опирающееся на теорему 7.14 и на основную теорему интегрального исчисления.

7.18. Теорема. *Существует вещественная непрерывная на вещественной прямой функция, которая нигде не дифференцируема.*

Доказательство. Положим

$$\varphi(x)=\begin{cases} x & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ 2-x & (0\leqslant x\leqslant 2)\end{cases} \tag{44}$$

и доопределим $\varphi(x)$ для всех остальных вещественных x, полагая

$$\varphi(x+2)=\varphi(x).$$

Тогда функция φ непрерывна на R^1. Пусть

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^n x). \tag{45}$$

Поскольку $0\leqslant\varphi\leqslant 1$, то, как показывает теорема 7.10, ряд (45) сходится равномерно на R^1, так что функция f непрерывна на R^1 по теореме 7.12.

Зафиксируем теперь вещественное число x и положительное целое m. Существует целое k, такое, что

$$k\leqslant 4^m x\leqslant k+1. \tag{46}$$

Положим

$$\alpha_m=4^{-m}k,\qquad \beta_m=4^{-m}(k+1) \tag{47}$$

и рассмотрим числа $4^n\beta_m$ и $4^n\alpha_m$. Если $n>m$, то их разность — четное целое; если $n=m$, то они целые, а их разность равна 1; если $n<m$, то между ними не лежит ни одно целое число. Значит,

$$(48)\qquad |\varphi(4^n\beta_m)-\varphi(4^n\alpha_m)|=\begin{cases}0, & \text{если } n>m,\\ 4^{n-m}, & \text{если } n\leqslant m.\end{cases}$$

Согласно (45) и (48),

$$f(\beta_m)-f(\alpha_m)=\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n[\varphi(4^n\beta_m)-\varphi(4^n\alpha_m)];$$

следовательно,

$$|f(\beta_m)-f(\alpha_m)|\geqslant\left(\frac{3}{4}\right)^m-\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n 4^{n-n}>\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m,$$

или

$$(49)\qquad \left|\frac{f(\beta_m)-f(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right|>\frac{1}{2}\cdot 3^m.$$

Теорема 5.19 и неравенство (49) показывают, что функция f не дифференцируема в точке x, так как $\alpha_m\leqslant x\leqslant\beta_m$ и $\beta_m-\alpha_m\to 0$ при $m\to\infty$.

Равностепенно непрерывные семейства функций

В теореме 3.6 мы видели, что каждая ограниченная последовательность комплексных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность. Возникает вопрос: верно ли что-либо подобное для последовательностей функций? Чтобы уточнить этот вопрос, мы определим два вида ограниченности.

7.19. Определение. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, определенных на множестве E.

Мы будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ *поточечно ограничена* на E, если последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена при каждом $x\in E$, т. е. если существует конечнозначная функция φ, определенная на E и такая, что

$$|f_n(x)|<\varphi(x)\qquad (x\in E,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Мы говорим, что последовательность $\{f_n\}$ *равномерно ограничена* на множестве E, если существует число M, такое, что

$$|f_n(x)|<M\qquad (x\in E,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Если последовательность $\{f_n\}$ поточечно ограничена на множестве E, а E_1 — счетное подмножество множества E, то всегда можно найти подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, такую, что последова-

тельность $\{f_{n_k}(x)\}$ будет сходиться при каждом $x \in E_1$. Это можно сделать с помощью диагонального процесса, который используется ниже при доказательстве теоремы 7.23.

Однако даже в том случае, когда $\{f_n\}$ — равномерно ограниченная последовательность непрерывных функций на компактном множестве E, не обязательно существует подпоследовательность, сходящаяся поточечно на E. В приводимом ниже примере было бы затруднительно доказать это с помощью средств, которыми мы располагаем в настоящий момент, но доказательство оказывается совсем простым, если сослаться на теорему из гл. 10.

7.20. Пример. Пусть

$$f_n(x) = \sin nx \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Допустим, что существует строго возрастающая последовательность $\{n_k\}$, такая, что последовательность $\{\sin n_k x\}$ сходится при каждом $x \in [0,\ 2\pi)$. В этом случае мы получим

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi);$$

значит,

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi). \tag{50}$$

По теореме Лебега об интегрировании ограниченно сходящихся последовательностей (теорема 10.32), из (50) следовало бы, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2\, dx = 0. \tag{51}$$

Однако простое вычисление дает

$$\int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2\, dx = 2\pi,$$

что противоречит равенству (51).

Другой вопрос таков: всякая ли сходящаяся последовательность содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность? Следующий наш пример показывает, что это не обязательно имеет место даже в том случае, когда последовательность (непрерывных функций) определена на компактном множестве и равномерно ограничена на нем. (Пример 7.6 показывает, что последовательность ограниченных функций может быть сходящейся, не будучи равномерно ограниченной; но совершенно очевидно, что равномерная сходимость последовательности ограниченных функций влечет за собой их равномерную ограниченность.)

7.21. Пример. Пусть

$$f_n(x)=\frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2} \quad (0\leqslant x\leqslant 1,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Тогда $|f_n(x)|\leqslant 1$, так что последовательность $\{f_n\}$ равномерно ограничена на $[0,\ 1]$. Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

но

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=1 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

так что никакая подпоследовательность не сходится равномерно на $[0,\ 1]$.

В этой связи нам понадобится понятие равностепенной непрерывности. Оно дано в следующем определении.

7.22. Определение. Семейство $\mathscr{F}$ функций f, определенных на подмножестве E метрического пространства X, называется *равностепенно непрерывным* на E, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, когда $d(x,\ y)<\delta$, $x\in E$, $y\in E$, а $f\in\mathscr{F}$. Здесь d обозначает расстояние в X.

Ясно, что каждая функция, входящая в состав равностепенно непрерывного семейства, равномерно непрерывна.

Последовательность $\{f_n\}$ в примере 7.21 не является равностепенно непрерывной.

Равностепенная непрерывность и равномерная сходимость непрерывных функций тесно связаны друг с другом.

7.23. Теорема. *Пусть K — компактное множество.*

(*a*) *Если $\{f_n\}$ — равномерно сходящаяся последовательность функций, непрерывных на K, то $\{f_n\}$ равностепенно непрерывна на K.*

(*b*) *Если $\{f_n\}$ поточечно ограничена и равностепенно непрерывна на K, то $\{f_n\}$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность и равномерно ограничена на K.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$, и пусть выполнены предположения (*a*). Тогда существуют целое N и $\delta>0$, такие, что

$$|f_n(x)-f_N(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (x\in K,\ n>N) \tag{52}$$

и

$$|f_i(x)-f_i(y)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (1\leqslant i\leqslant N;\ d(x,\ y)<\delta). \tag{53}$$

В (53) мы воспользовались тем фактом, что непрерывные функции равномерно непрерывны на компактных множествах. Если $x \in K$, $y \in K$, $d(x, y) < \delta$ и $n > N$, то

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство и неравенство (53) показывают, что утверждение (a) выполняется.

Докажем теперь утверждение (b). Не ограничивая общности, мы можем предположить, что компакт K содержит бесконечное число точек.

Сначала выберем в K счетное подмножество E, такое, что E плотно в K (т. е. такое, что K совпадает с замыканием множества E).

Чтобы убедиться в существовании такого множества E, можно рассуждать следующим образом. Пусть $J(x, r)$ — множество всех точек $y \in K$, для которых $d(x, y) < r$. Из компактности множества K следует, что при каждом $r > 0$ уже конечное число из них, скажем, $J(x_1, r), \ldots, J(x_m, r)$ покрывают K. Полагая $r = 1$, $1/2$, $1/3$, ..., мы получаем счетную базу пространства K. (Определение базы см. в упражнении 11 к гл. 2.) Если выбрать по точке из каждого множества этой счетной базы, то полученное таким образом счетное множество окажется плотным в K.

Пусть $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, — точки множества E, расположенные в последовательность.

Ввиду того что последовательность $\{f_n(x_1)\}$ ограничена, существует подпоследовательность, которую мы обозначим через $\{f_{1,k}\}$, такая, что последовательность $\{f_{1,k}(x_1)\}$ сходится при $k \to \infty$.

Рассмотрим теперь последовательности $S_1, S_2, S_3, \ldots$, которые можно расположить в таблицу

$$\begin{array}{l} S_1 : f_{1,1},\ f_{1,2},\ f_{1,3},\ f_{1,4},\ \ldots \\ S_2 : f_{2,1},\ f_{2,2},\ f_{2,3},\ f_{2,4},\ \ldots \\ S_3 : f_{3,1},\ f_{3,2},\ f_{3,3},\ f_{3,4},\ \ldots \\ \vdots \end{array}$$

Пусть они обладают следующими свойствами:

(α) S_n — (бесконечная) подпоследовательность последовательности S_{n-1} при $n = 2, 3, 4, \ldots$.

(β) $\{f_{n,k}(x_n)\}$ сходится при $k \to \infty$ (ограниченность последовательности $\{f_n\}$ позволяет выбрать S_n с таким свойством);

(γ) порядок, в котором выписываются функции, один и тот же во всех последовательностях, т. е. если одна из функций предшествует другой в S_1, то они так же расположены во всех S_n

до тех пор, пока одна из этих функций не вычеркивается. Таким образом, передвигаясь из какой-нибудь строки таблицы в следующую строку вниз, функции могут переместиться влево, но никогда не перемещаются вправо.

Теперь мы спустимся по диагонали нашей таблицы, т. е. рассмотрим последовательность

$$S: f_{1,1},\ f_{2,2},\ f_{3,3},\ f_{4,4} \ldots \tag{54}$$

Согласно (γ) последовательность S (за исключением, возможно, первых $n-1$ членов) — подпоследовательность последовательности S_n при $n=1, 2, 3, \ldots$. Значит, из (β) следует, что последовательность $\{f_{n,n}(x_i)\}$ сходится при $n \to \infty$ при каждом $x_i \in E$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Ввиду того что последовательность $\{f_n\}$ равностепенно непрерывна, существует число $\delta > 0$, такое, что из $d(x, y) < \delta$ следует, что

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Пусть $J(x, \delta)$ имеет тот же смысл, что в начале доказательства.

Существует конечный набор точек $x_1, \ldots, x_p$ множества E, такой, что

$$K \subset J(x_1, \delta) \cup \ldots \cup J(x_p, \delta),$$

так как E плотно в K, а K компактно. Выберем N так, чтобы иметь

$$|f_{n,n}(x_i) - f_{m,m}(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (i = 1, \ldots, p),$$

если $n \geqslant N$, $m \geqslant N$.

Тогда при любом $x \in K$ существует точка x_i, такая, что $1 \leqslant i \leqslant p$ и $x \in J(x_i, \delta)$; поэтому из $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ следует, что

$$|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| \leqslant |f_{n,n}(x) - f_{n,n}(x_i)| + |f_{n,n}(x_i) - f_{m,m}(x_i)| + \\ + |f_{m,m}(x_i) - f_{m,m}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{f_{n,n}\}$ сходится равномерно на K.

Чтобы доказать равномерную ограниченность последовательности $\{f_n\}$ на множестве K, положим

$$\varphi(x) = \sup |f_n(x)| \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{55}$$

Задав $\varepsilon > 0$, выберем $\delta > 0$ таким, чтобы из неравенства $d(x, y) < \delta$ следовало

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Зафиксируем две точки x и y. Из неравенства

$$|f_n(y)| < |f_n(x)| + \varepsilon$$

следует, что

(56) $$\varphi(y) \leqslant \varphi(x) + \varepsilon,$$

а из неравенства

$$|f_n(x)| < |f_n(y)| + \varepsilon,$$

что

(57) $$\varphi(x) \leqslant \varphi(y) + \varepsilon.$$

В силу (56) и (57),

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon,$$

если только $d(x, y) < \delta$, так что φ — функция, непрерывная на K. Функция φ ограничена, так как K — компактное множество. Теорема доказана.

Теорема Стона — Вейерштрасса

7.24. Теорема. *Если f — непрерывная комплексная функция на $[a, b]$, то существует такая последовательность многочленов P_n, что*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

равномерно на $[a, b]$. Если функция f вещественна, то и многочлены P_n можно выбрать вещественными.

Именно в такой форме эта теорема была первоначально открыта Вейерштрассом.

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $[a, b] = [0, 1]$. Будем считать также, что $f(0) = f(1) = 0$. Действительно, если теорема доказана для этого случая, то рассмотрим

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)] \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Здесь $g(0) = g(1) = 0$, и если g представима в виде предела равномерно сходящейся последовательности многочленов, то такова и f, так как $f - g$ — многочлен. Будем считать, что $f(x) = 0$ вне сегмента $[0, 1]$. Тогда функция f равномерно непрерывна на всей вещественной прямой.

Положим

(58) $$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где c_n выбраны так, что

(59) $$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Нам нужны некоторые сведения о порядке величины c_n. Ввиду того что

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx=2\int_0^1(1-x^2)^n\,dx\geqslant 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n dx\geqslant$$

$$\geqslant 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)\,dx=\frac{4}{3\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}},$$

из (59) следует, что

$$c_n<\sqrt{n}. \tag{60}$$

Неравенство $(1-x^2)^n\geqslant 1-nx^2$, которым мы воспользовались выше, легко проверяется. Для этого нужно рассмотреть функцию

$$(1-x^2)^n-1+nx^2,$$

которая равна нулю при $x=0$ и имеет положительную производную в $(0,1)$.

При любом $\delta>0$ из (60) следует, что

$$Q_n(x)\leqslant\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n \qquad (\delta\leqslant|x|\leqslant 1), \tag{61}$$

так что $Q_n\to 0$ равномерно в сегменте $\delta\leqslant|x|\leqslant 1$.

Положим теперь

$$P_n(x)=\int_{-1}^{1}f(x+t)\,Q_n(t)\,dt \qquad (0\leqslant x\leqslant 1). \tag{62}$$

Наши предположения о функции f показывают (с помощью простой замены переменной), что

$$P_n(x)=\int_{-x}^{1-x}f(x+t)\,Q_n(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,Q_n(t-x)\,dt,$$

а последний интеграл, очевидно, есть многочлен по x. Таким образом, $\{P_n\}$ — последовательность многочленов, причем вещественная, если вещественна функция f. Задав $\varepsilon>0$, выберем $\delta>0$ так, чтобы из $|y-x|<\delta$ следовало

$$|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $M = \sup |f(x)|$. Используя (59), (61) и тот факт, что $Q_n(x) \geqslant 0$, мы видим, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)]\, Q_n(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\, dt + 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 4M \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

при всех достаточно больших n. Теорема доказана.

Поучительно набросать графики функций Q_n для нескольких значений n. Отметим еще, что равномерная непрерывность функции f была нам нужна для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{P_n\}$.

При доказательстве теоремы 7.30 нам не потребуется теорема 7.24 в полном объеме, а потребуется только один ее частный случай, который мы сформулируем в виде следствия.

7.25. Следствие. *Для любого сегмента $[-a, a]$ существует последовательность вещественных многочленов P_n, такая, что $P_n(0) = 0$ и*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = |x|$$

равномерно на $[-a, a]$.

Доказательство. По теореме 7.24 существует последовательность $\{P_n^*\}$ вещественных многочленов, сходящаяся к $|x|$ равномерно на $[-a, a]$. В частности, $P_n^*(0) \to 0$ при $n \to \infty$. Многочлены

$$P_n(x) = P_n^*(x) - P_n^*(0) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

обладают нужными свойствами.

Теперь мы выделим те свойства многочленов, на которых основана теорема Вейерштрасса.

7.26. Определение. Совокупность $\mathscr{A}$ комплексных функций, определенных на множестве E, называется *алгеброй*, если (i) $f + g \in \mathscr{A}$, (ii) $fg \in \mathscr{A}$, и (iii) $cf \in \mathscr{A}$ при всех $f \in \mathscr{A}$, $g \in \mathscr{A}$ и всех комплексных постоянных c. Иными словами, множество $\mathscr{A}$ замкнуто относительно сложения, умножения и умножения на скаляры.

Мы будем рассматривать также алгебры вещественных функций; в этом случае в (iii) речь идет, конечно, об умножении лишь на вещественные c.

Множество $\mathscr{A}$ функций, обладающее тем свойством, что $f \in \mathscr{A}$, если $f_n \in \mathscr{A}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и $f_n \to f$ равномерно на E, называется *равномерно замкнутым*.

Пусть $\mathscr{B}$ — множество всех функций, которые служат пределами равномерно сходящихся на множестве E последовательностей элементов множества $\mathscr{A}$. Тогда $\mathscr{B}$ называется *равномерным замыканием* множества $\mathscr{A}$.

Например, множество всех многочленов — алгебра, и теорему Вейерштрасса можно сформулировать так: множество всех функций, непрерывных на $[a, b]$, есть равномерное замыкание множества всех многочленов на $[a, b]$.

7.27. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — равномерное замыкание алгебры $\mathscr{A}$, состоящей из ограниченных функций. Тогда $\mathscr{B}$ — равномерно замкнутая алгебра.*

Доказательство. Если $f \in \mathscr{B}$ и $g \in \mathscr{B}$, то существуют равномерно сходящиеся последовательности $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, такие, что $f_n \to f$, $g_n \to g$ и $f_n \in \mathscr{A}$, $g_n \in \mathscr{A}$. Пользуясь тем, что мы имеем дело с ограниченными функциями, легко показать, что

$$f_n + g_n \to f + g, \quad f_n g_n \to fg, \quad cf_n \to cf,$$

где c — любая постоянная, причем сходимость равномерна во всех трех случаях.

Значит, $f + g \in \mathscr{B}$, $fg \in \mathscr{B}$ и $cf \in \mathscr{B}$, так что $\mathscr{B}$ — алгебра. Пусть $\{f_n\}$ — равномерно сходящаяся последовательность элементов алгебры $\mathscr{B}$. Существуют функции $g_n \in \mathscr{A}$, такие, что

$$|f_n(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Если $f_n \to f$ равномерно, то ясно, что и $g_n \to f$ равномерно, так что $f \in \mathscr{B}$ и $\mathscr{B}$ равномерно замкнуто.

7.28. Определение. Пусть $\mathscr{A}$ — множество функций, определенных на множестве E. Тогда говорят, что $\mathscr{A}$ *разделяет точки* множества E, если для каждой пары различных точек $x_1, x_2 \in E$ найдется функция $f \in \mathscr{A}$, такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Если для каждой точки $x \in E$ найдется функция $g \in \mathscr{A}$, такая, что $g(x) \neq 0$, то мы будем говорить, что алгебра $\mathscr{A}$ *не исчезает ни в одной точке множества* E.

Алгебра всех многочленов от одной переменной, очевидно, обладает этими свойствами на R^1. Примером алгебры, не разделяющей точек, служит множество всех четных многочленов,

рассматриваемых, скажем, на $[-1, 1]$, так как $f(-x) = f(x)$ для каждой четной функции f.

Следующая теорема иллюстрирует эти понятия.

7.29. Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра функций на множестве E, $\mathscr{A}$ разделяет точки и не исчезает ни в одной точке множества E. Пусть x_1, x_2 — различные точки множества E и c_1, c_2 — постоянные (вещественные, если $\mathscr{A}$ — вещественная алгебра). Тогда $\mathscr{A}$ содержит функцию f, такую, что*

$$f(x_1) = c_1, \quad f(x_2) = c_2.$$

Доказательство. Наши предположения показывают, что $\mathscr{A}$ содержит функции g и h, такие, что $g(x_1) \neq g(x_2)$ и $h(x_1) \neq 0$. Положим

$$u = g + \lambda h,$$

где λ — постоянная, выбранная следующим образом: если $g(x_1) \neq 0$, то $\lambda = 0$; если $g(x_1) = 0$, то $g(x_2) \neq 0$, и существует число $\lambda \neq 0$, такое, что

$$\lambda [h(x_1) - h(x_2)] \neq g(x_2).$$

Тогда $u \in \mathscr{A}$ и наш выбор λ показывает, что $u(x_1) \neq u(x_2)$ и $u(x_1) \neq 0$. Если

$$\alpha = u^2(x_1) - u(x_1)\, u(x_2),$$

то $\alpha \neq 0$; если

$$f_1 = \alpha^{-1} [u^2 - u(x_2)\, u],$$

то $f_1 \in \mathscr{A}$, $f_1(x_1) = 1$, $f_1(x_2) = 0$.

Подобным же образом мы проверим, что существует функция $f_2 \in \mathscr{A}$, такая, что $f_2(x_1) = 0$, $f_2(x_2) = 1$. Тогда функция $f = c_1 f_1 + c_2 f_2$ обладает нужными свойствами.

Теперь мы докажем теорему Стона, обобщающую теорему Вейерштрасса.

7.30. Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра вещественных непрерывных функций на компактном множестве K. Если $\mathscr{A}$ разделяет точки множества K и не исчезает ни в одной точке множества K, то равномерное замыкание $\mathscr{B}$ алгебры $\mathscr{A}$ содержит все функции, непрерывные на K.*

Мы разобьем доказательство на четыре шага.

Первый шаг. *Если $f \in \mathscr{B}$, то $|f| \in \mathscr{B}$.*

Доказательство. Пусть

$$a = \sup |f(x)| \qquad (x \in K), \tag{63}$$

и пусть задано число $\varepsilon > 0$. Согласно следствию 7.25, существуют вещественные числа $c_1, \ldots, c_n$, такие, что

$$(64) \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y| \right| < \varepsilon \qquad (-a \leqslant y \leqslant a).$$

Функция $g = \sum_1^n c_i f^i$ входит в состав множества $\mathscr{B}$, так как $\mathscr{B}$ — алгебра. Согласно (63) и (64), мы имеем

$$|g(x) - |f(x)|| < \varepsilon \qquad (x \in K).$$

Поскольку алгебра $\mathscr{B}$ равномерно замкнута, то отсюда следует, что $|f| \in \mathscr{B}$.

Второй шаг. *Если* $f \in \mathscr{B}$ *и* $g \in \mathscr{B}$, *то* $\max(f, g) \in \mathscr{B}$ *и* $\min(f, g) \in \mathscr{B}$.

При этом $h = \max(f, g)$ означает, что

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant g(x), \\ g(x), & \text{если } f(x) < g(x); \end{cases}$$

$\min(f, g)$ определяется аналогично.

Доказательство. Наше утверждение следует из доказанного на первом шаге и из тождеств

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2},$$

$$\min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

Разумеется, этот результат можно по индукции распространить на любое конечное множество функций: если $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{B}$, то $\max(f_1, \ldots, f_n) \in \mathscr{B}$ и $\min(f_1, \ldots, f_n) \in \mathscr{B}$.

Третий шаг. *Пусть заданы вещественная функция* f, *непрерывная на* K, *точка* $x \in K$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда найдется функция* $g_x \in \mathscr{B}$, *такая, что* $g_x(x) = f(x)$ *и*

$$(65) \qquad g_x(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in K).$$

Доказательство. Поскольку $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ и $\mathscr{A}$ удовлетворяет условиям теоремы 7.29, то и $\mathscr{B}$ удовлетворяет этим условиям. Значит, для любого $y \in K$ можно найти функцию $h_y \in \mathscr{B}$, такую, что

$$(66) \qquad h_y(x) = f(x), \qquad h_y(y) = f(y).$$

В силу непрерывности функции h_y, существует открытое множество J_y, содержащее точку y и такое, что

$$(67) \qquad h_y(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in J_y).$$

Ввиду того что K — компакт, имеется конечное множество точек $y_1, \ldots, y_n$, таких, что

$$K \subset J_{y_1} \cup \ldots \cup J_{y_n}. \tag{68}$$

Положим

$$g_x = \max(h_{y_1}, \ldots, h_{y_n}).$$

Согласно установленному на втором шаге, $g_x \in \mathscr{B}$, а из соотношений (66)—(68) следует, что g_x обладает и остальными нужными свойствами.

Четвертый шаг. *Пусть заданы вещественная функция f, непрерывная на K, и $\varepsilon > 0$. Существует функция $h \in \mathscr{B}$, такая, что*

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in K). \tag{69}$$

Это утверждение равносильно утверждению теоремы, так как $\mathscr{B}$ равномерно замкнута.

Доказательство. Рассмотрим функции g_x, построенные на третьем шаге для каждого $x \in K$. В силу непрерывности функции g_x, существует открытое множество V_x, содержащее x и такое, что

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon \qquad (t \in V_x). \tag{70}$$

Ввиду того что K компактно, существует конечное множество точек $x_1, \ldots, x_m$, таких, что

$$K \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_m}. \tag{71}$$

Положим $h = \min(g_{x_1}, \ldots, g_{x_m})$. Как было установлено на втором шаге, $h \in \mathscr{B}$, и из (65) следует, что

$$h(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in K). \tag{72}$$

С другой стороны, из (70) и (71) следует, что

$$h(t) < f(t) + \varepsilon \qquad (t \in K). \tag{73}$$

Из (72) и (73) вытекает (69).

Теорема 7.30 не верна для произвольных комплексных алгебр. Контрпример дан в упражнении 21. Однако утверждение теоремы остается верным даже и для комплексных алгебр, если на $\mathscr{A}$ наложить еще одно условие, а именно если потребовать, чтобы $\mathscr{A}$ была *самосопряженной*. Это означает, что для любой функции $f \in \mathscr{A}$ комплексно-сопряженная с ней функция $\bar{f}$ тоже принадлежит $\mathscr{A}$; функция $\bar{f}$ определяется равенством $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.

7.31. Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ — самосопряженная алгебра комплексных непрерывных функций на компактном множестве K. Пусть $\mathscr{A}$ разделяет точки множества K и не исчезает ни в одной точке множества K. Тогда равномерное замыкание $\mathscr{B}$ алгебры $\mathscr{A}$ содержит все комплексные непрерывные на K функции.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}_R$ — множество всех вещественных функций на K, принадлежащих алгебре $\mathscr{A}$. Если $f \in \mathscr{A}$ и $f = u + iv$, где u, v — вещественны, то $2u = f + \bar{f}$, а так как $\mathscr{A}$ — самосопряженная алгебра, то $u \in \mathscr{A}_R$. Если $x_1 \neq x_2$, то существует $f \in \mathscr{A}$, такая, что $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 0$; значит, $0 = u(x_2) \neq \neq u(x_1) = 1$, откуда следует, что $\mathscr{A}_R$ разделяет точки множества K. Если $x \in K$, то $g(x) \neq 0$ при некотором $g \in \mathscr{A}$ и имеется комплексное число λ, такое, что $\lambda g(x) > 0$; если $f = \lambda g$, $f = u + iv$, то отсюда следует, что $u(x) > 0$; значит, $\mathscr{A}_R$ не исчезает ни в одной точке множества K.

Таким образом, $\mathscr{A}_R$ удовлетворяет условиям теоремы 7.30. Следовательно, каждая вещественная непрерывная на K функция принадлежит равномерному замыканию алгебры $\mathscr{A}_R$, т. е. принадлежит $\mathscr{B}$. Если f — комплексная непрерывная на K функция, $f = u + iv$, то $u \in \mathscr{B}$, $v \in \mathscr{B}$, значит, и $f \in \mathscr{B}$. Доказательство закончено.

7.32. Замечания. Пусть $\mathscr{C}(K)$ обозначает множество всех вещественных непрерывных функций на компактном пространстве K. Определим норму функций $f \in \mathscr{C}(K)$ равенством

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|. \tag{74}$$

По теореме 4.15 $\|f\| < \infty$ при каждом $f \in \mathscr{C}(K)$. Очевидно, что $\|f\| = 0$ только тогда, когда $f(x) = 0$ при всех $x \in K$, т. е. $f = 0$, и нетрудно проверить, что

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\| \qquad (f, g \in \mathscr{C}(K)).$$

Значит, если определить расстояние между f и g как $\|f - g\|$, то аксиома 2.17 для расстояния выполняется.

Используя эту метрику, мы можем определить теперь открытые множества, замкнутые множества, предельные точки, сходящиеся последовательности и т. д. в $\mathscr{C}(K)$. Расстояние в $\mathscr{C}(K)$ определено так, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f тогда и только тогда, когда $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на K; $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\mathscr{C}(K)$ тогда и только тогда, когда $\{f_n\}$ сходится равномерно на K. Значит, из теоремы 7.12 следует, что $\mathscr{C}(K)$ — *полное* метрическое пространство.

Замкнутые подмножества пространства $\mathscr{C}(K)$ — это в точности те самые множества, которые в определении 7.26 были названы *равномерно замкнутыми*.

Всякое компактное подмножество в $\mathscr{C}(K)$ — это равномерно ограниченное равностепенно непрерывное множество функций. Обратно, замыкание каждого равномерно ограниченного равностепенно непрерывного множества функций из $\mathscr{C}(K)$ есть компактное подмножество пространства $\mathscr{C}(K)$. Это утверждение, по существу, — переформулировка теоремы 7.23.

Теорема 7.30 (теорема Стона — Вейерштрасса) может быть переформулирована так: *если $\mathscr{A}$ — подалгебра в $\mathscr{C}(K)$, разделяющая точки множества K и не исчезающая ни в одной точке множества K, то алгебра $\mathscr{A}$ плотна в пространстве $\mathscr{C}(K)$.*

Все эти замечания применимы также и к пространству всех *комплексных* функций, непрерывных на K; но только к условиям теоремы Стона — Вейерштрасса нужно добавить самосопряженность.

Упражнения

1. Доказать, что всякая равномерно сходящаяся последовательность ограниченных функций равномерно ограничена.

2. Пусть последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ сходятся равномерно на E. Доказать, что последовательность $\{f_n+g_n\}$ сходится равномерно на E. Пусть, кроме того, $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — последовательности ограниченных функций. Доказать, что последовательность $\{f_ng_n\}$ сходится равномерно на E.

3. Построить последовательности $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, которые сходятся равномерно на E, но $\{f_ng_n\}$ не сходится равномерно на E (разумеется, $\{f_ng_n\}$ сходится на E).

4. Рассмотрим ряд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x}.$$

При каких значениях x этот ряд сходится абсолютно? На каких сегментах он сходится равномерно? На каких сегментах он перестает быть равномерно сходящимся? Непрерывна ли функция f в тех точках, в которых ряд сходится? Ограничена ли f?

5. Пусть

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & \left(x<\frac{1}{n+1}\right), \\ \sin^2\frac{\pi}{x} & \left(\frac{1}{n+1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}\right), \\ 0 & \left(\frac{1}{n}<x\right). \end{cases}$$

Показать, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к непрерывной функции, но неравномерно. Воспользоваться рядом $\sum f_n$ для дока-

зательства того, что абсолютная сходимость (даже если она имеет место при всех x) не влечет за собой равномерной сходимости.

6. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

сходится равномерно на каждом ограниченном сегменте, но не сходится абсолютно ни при одном значении x.

7. Положим

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2},$$

где $n=1, 2, 3, \ldots$, x — вещественное число. Показать, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции f и что равенство

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

верно, если $x \neq 0$, и неверно, если $x=0$.

8. Пусть

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

Пусть $\{x_n\}$ — последовательность попарно различных точек интервала (a, b), и пусть ряд $\sum |c_n|$ сходится. Доказать, что ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x-x_n) \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

сходится равномерно, что функция f непрерывна при любом $x \neq x_n$ и что f — функция ограниченной вариации.

9. Пусть $\{g_n\}$ — последовательность функций ограниченной вариации на сегменте $[a, b]$, обладающая следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N, что из неравенств $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ следует неравенство $V(g_n - g_m) < \varepsilon$. Доказать, что существует функция g, имеющая ограниченную вариацию на $[a, b]$ и такая, что $V(g_n - g) \to 0$ при $n \to \infty$.

10. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, и пусть $\{g_n\}$ — последовательность, для которой

(a) $V(g_n) \leqslant M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$.

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,dg_n=\int_a^b f\,dg.$$

Заметим, что предположение здесь слабее предположений теоремы 7.16.

Указание. Сначала показать, что $V(g)\leqslant M$. Далее, для любого разбиения $P: a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b$ имеем

$$\left|\int_a^b f\,dg-\int_a^b f\,dg_n\right|\leqslant\sum_{i=1}^m\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_i)]\,dg(x)\right|+$$

$$+\sum_{i=1}^m|f(x_i)|\,|g(x_i)-g(x_{i-1})-g_n(x_i)+g_n(x_{i-1})|+$$

$$+\sum_{i=1}^m\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)-f(x)]\,dg_n(x)\right|.$$

Первая и третья суммы могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора $\mu(P)$ и непрерывности функции f. Фиксируя P, получаем, что вторая сумма стремится к нулю при $n\to\infty$.

11. Если функция f непрерывна на $[0, 1]$ и если

$$\int_0^1 f(x)\,x^n\,dx=0\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

то $f(x)=0$ на $[0, 1]$.

Указание. Интеграл от произведения функции f на любой многочлен равен нулю. Воспользоваться теоремой Вейерштрасса и показать, что $\int_0^1 f^2(x)\,dx=0$.

12. Если, например, $f(x)=x-\frac{1}{2}$ и $g(x)=x-x^2$, то

$$\int_0^1 f(x)\,[g(x)]^n\,dx=0\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).\tag{75}$$

Для каких функций g из условия (75) следует, что $f(x)=0$ при всех $x\in[0, 1]$, если заранее задано, что f — непрерывна?

13. Пусть $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ — последовательности функций, определенных на E, и

(*a*) частные суммы ряда $\sum f_n$ равномерно ограничены;

(*b*) $g_n \to 0$ равномерно на E;

(*c*) $g_1(x) \geqslant g_2(x) \geqslant g_3(x) \geqslant \ldots$ при любом $x \in E$.

Тогда ряд $\sum f_n g_n$ сходится равномерно на E.

Указание. Сравнить с теоремой 3.42.

14. Пусть $\{f_n\}$ — равномерно ограниченная последовательность функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]$. Положим

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Доказать, что существует подпоследовательность F_{n_k}, равномерно сходящаяся на $[a, b]$.

15. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся равномерно на множестве E к функции f. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

для каждой последовательности точек $x_n \in E$, такой, что $x_n \to x$, где $x \in E$. Верно ли обратное?

16. Пусть (x) обозначает дробную часть вещественного числа x (см. определение в упражнении 2 к гл. 4). Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2} \quad (x \text{ — вещественное число}).$$

Найти все точки разрыва функции f и показать, что множество таких точек счетно и всюду плотно. Показать, что (тем не менее) функция f интегрируема по Риману на каждом ограниченном сегменте.

17. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, монотонных на $[a, b]$, и пусть $\{f_n\}$ поточечно сходится к функции f, непрерывной на $[a, b]$. Доказать, что сходимость равномерна на $[a, b[$.

18. Пусть $\{f_n\}$ — равностепенно непрерывная последовательность функций на компактном множестве K, и пусть $\{f_n\}$ сходится поточечно на K. Доказать, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на K.

19. Доказать утверждения о $\mathscr{C}(K)$, сформулированные в п. 7.32.

20. Определить понятия равномерной сходимости и равностепенной непрерывности для отображений в любое метрическое пространство. Показать, что теоремы 7.9 и 7.12 верны для отображений в любое метрическое пространство, что теоремы 7.8 и 7.11 верны для отображений в любое полное метрическое

пространство и что теоремы 7.10, 7.14, 7.17 и 7.23 верны для векторнозначных функций, т. е. для отображений в любое R^k.

21. Пусть K — единичная окружность на комплексной плоскости (т. е. множество всех z, таких, что $|z|=1$), и пусть $\mathscr{A}$ — алгебра всех функций вида

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{N} c_n e^{in\theta} \quad (\theta \text{ вещественно}).$$

Тогда $\mathscr{A}$ разделяет точки множества K и не исчезает ни в одной точке множества K, но тем не менее существуют непрерывные на K функции, не содержащиеся в равномерном замыкании алгебры $\mathscr{A}$.

Указание. Для любой функции $f \in \mathscr{A}$

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и это остается верным для каждой f, принадлежащей замыканию алгебры $\mathscr{A}$.

22. Пусть φ — непрерывная ограниченная вещественная функция, определенная в полосе, выделяемой неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-\infty < y < \infty$. Доказать, что задача с начальными данными

$$y' = \varphi(x, y), \qquad y(0) = c$$

имеет решение. [Заметим, что условия этой теоремы существования менее ограничительны, чем условия соответствующей теоремы единственности (см. упражнение 17 гл. 5).]

Указание. Зафиксируем n. Положим $x_i = i/n$, $i = 0, \ldots, n$. Пусть f_n — непрерывная функция на $[0, 1]$, такая, что $f_n(0) = c$,

$$f_n'(t) = \varphi(x_i, f_n(x_i)), \quad \text{если } x_i < t < x_{i+1},$$

и положим

$$\Delta_n(t) = f_n'(t) - \varphi(t, f_n(t)),$$

за исключением точек x_i, где $\Delta_n(t) = 0$. Тогда

$$f_n(x) = c + \int_0^x [\varphi(t, f_n(t)) + \Delta_n(t)]\, dt.$$

Воспользоваться теоремой 7.23 для доказательства равномерной на $[0, 1]$ сходимости некоторой подпоследовательности последовательности $\{f_n\}$ к функции f, удовлетворяющей интегральному

уравнению

$$f(x) = c + \int_0^x \varphi(t, f(t))\, dt \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Эта функция f и есть решение данной задачи.

23. Доказать аналогичную теорему существования для задачи с начальными данными

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{c},$$

где теперь $\mathbf{c} \in R^k$, $\mathbf{y} \in R^k$, а $\boldsymbol{\varphi}$ — непрерывное ограниченное отображение части пространства R^{k+1}, выделяемой условиями $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\mathbf{y} \in R^k$, в пространство R^k. (Сравнить с упражнением 18 гл. 5.)

Указание. Воспользоваться «векторнозначным» вариантом теоремы 7.23.