ГЛАВА 8

ДАЛЬНЕЙШИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РЯДОВ

Степенные ряды

В этом разделе мы изучим некоторые свойства функций, представимых в виде суммы степенного ряда, т. е. функций вида

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$

или, более общо,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n. \tag{2}$$

Такие функции называются аналитическими.

Мы ограничимся вещественными значениями x. Поэтому вместо кругов сходимости (см. теорему 3.39) мы будем иметь дело с промежутками сходимости.

Если ряд (1) сходится при всех x из интервала $(-R, R)$ для некоторого $R>0$ (R может равняться $+\infty$), то мы будем говорить, что функция f разлагается в степенной ряд в окрестности точки $x=0$. Аналогично, если ряд (2) сходится при $|x-a|<R$, то говорят, что f разлагается в степенной ряд в окрестности точки $x=a$. Для удобства мы часто будем полагать $a=0$, не ограничивая общности.

8.1. Теорема. *Пусть ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{3}$$

сходится при $|x|<R<\infty$, *и пусть*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (|x|<R). \tag{4}$$

Тогда ряд (3) *сходится равномерно на отрезке* $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$, *каково бы ни было положительное число* $\varepsilon<R$. *Функция* f *непрерывна на* $(-R, R)$ *и*

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \quad (|x|<R). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $0<\varepsilon<R$. Если $|x|\leqslant R-\varepsilon$, то

$$|c_n x^n|\leqslant|c_n(R-\varepsilon)^n|,$$

а так как ряд

$$\sum c_n(R-\varepsilon)^n$$

сходится абсолютно (каждый степенной ряд по признаку Коши сходится абсолютно внутри своего промежутка сходимости), то из теоремы 7.10 следует равномерная сходимость ряда (3) на отрезке $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$.

Ввиду того что $\sqrt[n]{n}\to 1$ при $n\to\infty$, имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n|c_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|},$$

так что ряды (4) и (5) имеют общий интервал сходимости.

Поскольку (5) — степенной ряд, то он сходится равномерно в $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ при каждом положительном $\varepsilon<R$ и, следовательно, применима теорема 7.17 (в формулировке теоремы последовательности можно заменить рядами). Таким образом, (5) выполняется, если $|x|\leqslant R-\varepsilon$.

Но для любого x, такого, что $|x|<R$, можно найти такое число $\varepsilon>0$, что $|x|<R-\varepsilon$. Значит, (5) выполняется, если $|x|<R$.

Непрерывность функции f следует из существования f' (теорема 5.2).

Следствие. *Если выполнены условия теоремы* 8.1, *то* f *имеет производные всех порядков в* $(-R, R)$, *причем*

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)c_n x^{n-k}. \tag{6}$$

В частности,

$$f^{(k)}(0)=k!c_k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

(Здесь $f^{(0)}$ обозначает f, а $f^{(k)}$ k-ю производную функции f при $k=1, 2, 3, \ldots$.)

Доказательство. Равенство (6) получится, если мы последовательно применим теорему 8.1 к f, затем к f', к f'' и т. д. Полагая в (6) $x=0$, мы получим (7).

Формула (7) очень интересна. Она показывает, с одной стороны, что коэффициенты степенного разложения функции f определяются значениями f и ее производных в одной-единственной точке. С другой стороны, если даны коэффициенты, то значения производных функции f в центре интервала сходимости усматриваются непосредственно из степенного ряда.

Заметим, однако, что если даже функция f имеет производные всех порядков, то ряд $\sum c_n x^n$, коэффициенты которого вычислены по формуле (7), не обязан сходиться к $f(x)$ ни при каком $x \neq 0$. В последнем случае f не может быть разложена в степенной ряд в окрестности точки $x=0$. Действительно, если бы выполнялось равенство $f(x)=\sum a_n x^n$, то мы имели бы

$$n! a_n = f^{(n)}(0);$$

значит, $a_n = c_n$. Пример такой ситуации будет дан в упражнении 1.

Если ряд (3) сходится в конце промежутка сходимости, скажем, в точке $x=R$ (и, разумеется, $R<\infty$), то функция f непрерывна не только в интервале $(-R, R)$, но и в точке $x=R$. Это вытекает из следующей теоремы Абеля (для простоты мы полагаем $R=1$).

8.2. Теорема. *Пусть ряд $\sum c_n$ сходится. Положим*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (-1<x<1).$$

Тогда

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $s_n = c_0 + \ldots + c_n$, $s_{-1}=0$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{m} c_n x^n = \sum_{n=0}^{m} (s_n - s_{n-1}) x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m.$$

Пусть $|x|<1$ и $m\to\infty$. Так как s_m ограничены в совокупности, то мы получаем

$$f(x)=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n. \tag{9}$$

Предположим, что $s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Пусть $\varepsilon>0$. Выберем N, такое, что из $n>N$ следует

$$|s-s_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, ввиду того что

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 \quad (|x|<1),$$

мы получаем из (9)

$$|f(x)-s| = \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s_n-s)x^n\right| \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N}|s_n-s||x|^n + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon,$$

если $x > 1 - \delta$, где δ — любое достаточно малое положительное число. Отсюда следует (8).

В качестве приложения докажем теорему 3.51, которая состоит в следующем. *Если ряды* $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ *сходятся соответственно к* A, B, C *и если* $c_n = a_0 b_n + \ldots + a_n b_0$, *то* $C = AB$. Положим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Если $x < 1$, то эти ряды сходятся абсолютно, и поэтому их можно перемножить в соответствии с определением 3.48; выполнив умножение, мы увидим, что

$$f(x) \cdot g(x) = h(x) \qquad (0 \leqslant x < 1). \tag{10}$$

По теореме 8.2

$$f(x) \to A, \quad g(x) \to B, \quad h(x) \to C \tag{11}$$

при $x \to 1$. Из равенств (10) и (11) следует, что $AB = C$.

Далее нам понадобится следующая теорема об изменении порядка суммирования двойной последовательности.

8.3. Теорема. *Пусть дана двойная последовательность* $\{a_{ij}\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, *пусть*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{12}$$

и ряд $\sum b_i$ *сходится. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}. \tag{13}$$

Доказательство. Мы могли бы установить равенство (13) непосредственно, подобно тому как это было сделано в теореме 3.56 (хотя в данном случае это несколько более сложно). Однако следующий метод представляется более интересным.

Пусть E — счетное множество, состоящее из попарно различных точек $x_0, x_1, x_2, \ldots$, и пусть $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Положим

$$f_i(x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{14}$$

$$f_i(x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad (i, n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{15}$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \qquad (x \in E). \tag{16}$$

Теперь, сопоставляя (14) и (15) с условием (12), мы видим, что каждая из функций f_i непрерывна в точке x_0. Поскольку $|f_i(x)| \leqslant b_i$ при $x \in E$, ряд (16) сходится равномерно на E, так что функция g непрерывна в точке x_0 (теорема 7.11). Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

8.4. Теорема. *Пусть ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

сходится при $|x| < R$ *и* $f(x)$ — *сумма этого ряда в интервале* $(-R, R)$. *Если* $-R < a < R$, *то функцию* f *можно разложить в степенной ряд в окрестности точки* $x = a$, *сходящийся при* $|x-a| < R - |a|$, *и*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (|x-a| < R - |a|). \tag{17}$$

Эта теорема является обобщением теоремы 5.17; она известна также как теорема Тейлора.

Доказательство. Имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n [(x-a)+a]^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m} (x-a)^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} c_n a^{n-m} \right] (x-a)^m.$$

Это и есть нужное нам разложение в окрестности точки $x = a$. Чтобы убедиться в его справедливости, мы должны обосновать изменение порядка суммирования. Теорема 8.3 показы-

вает, что оно возможно, если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|c_n\binom{n}{m}a^{n-m}(x-a)^m\right| \tag{18}$$

сходится. Но (18), очевидно, приводится к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|(|x-a|+|a|)^n, \tag{19}$$

а ряд (19) сходится, если $|x-a|+|a|<R$.

Наконец, формула (17) для коэффициентов следует из (7). Нужно заметить, что ряд (17) в действительности может сходиться в интервале, более широком, чем интервал, определяемый неравенством $|x-a|<R-|a|$.

Если два степенных ряда сходятся в интервале $(-R, R)$ к одной и той же функции, то они тождественны, т. е. их коэффициенты с одинаковыми номерами равны. Интересно, что то же верно и в более слабых предположениях.

8.5. Теорема. *Пусть ряды* $\sum a_n x^n$ *и* $\sum b_n x^n$ *сходятся в интервале* $S=(-R, R)$. *Пусть* E — *множество всех точек* $x\in S$, *в которых*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n. \tag{20}$$

Если E *имеет предельную точку в* S, *то* $a_n=b_n$ *при* $n=0, 1, 2, \ldots$. *Значит,* (20) *выполняется и при всех* $x\in S$.

Доказательство. Пусть $c_n=a_n-b_n$ и

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \qquad (x\in S). \tag{21}$$

Тогда $f(x)=0$ на E.

Пусть A — множество всех предельных точек множества E, содержащихся в S, а B — множество всех прочих точек из S. Из определения предельной точки ясно, что множество B открыто. Допустим, что нам удалось доказать, что и A открыто. По условию A непусто. Кроме того, $S=A\cup B$, $A\cap B=\varnothing$ и S связно (теорема 2.47). Из определения 2.45 следует, что в таком случае B должно быть пустым и, значит, $A=S$. Из того, что функция f непрерывна на S, следует $A\subset E$. Таким образом, $E=S$, а (7) показывает, что $c_n=0$ при $n=0, 1, 2, \ldots$, что и составляет требуемое заключение.

Таким образом, нам нужно доказать, что A открыто. Если $x_0 \in A$, то теорема 8.4 показывает, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \qquad (|x - x_0| < R - |x_0|). \tag{22}$$

Мы утверждаем, что $d_n = 0$ при всех n. Предполагая противное, обозначим через k наименьшее из неотрицательных целых чисел m, таких, что $d_m \neq 0$. Тогда

$$f(x) = (x - x_0)^k g(x) \qquad (|x - x_0| < R - |x_0|), \tag{23}$$

где

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{k+m} (x - x_0)^m. \tag{24}$$

Поскольку функция g непрерывна в точке x_0 и

$$g(x_0) = d_k \neq 0,$$

то существует $\delta > 0$, такое, что $g(x) \neq 0$, если $|x - x_0| < \delta$. Из (23) следует, что $f(x) \neq 0$, если $0 < |x - x_0| < \delta$. Но это противоречит тому, что x_0 — предельная точка множества E.

Таким образом, $d_n = 0$ при всех n, так что $f(x) = 0$ при всех x, для которых выполняется (22), т. е. в окрестности точки x_0. Это показывает, что A открыто, и доказательство закончено.

Показательная и логарифмическая функции

Положим, по определению,

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{25}$$

Признак Даламбера показывает, что этот ряд сходится при каждом комплексном z. Применяя теорему 3.50 об умножении абсолютно сходящихся рядов, получаем

$$E(z)E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!},$$

откуда вытекает важная теорема сложения

$$E(z+w) = E(z)E(w) \qquad (z,\ w \text{ комплексные}). \tag{26}$$

Одно из ее следствий таково:

(27) $E(z)E(-z)=E(z-z)=E(0)=1$ (z комплексное).

Это показывает, что $E(z)\neq 0$ при всех z. Согласно (25), $E(x)>0$, если $x>0$; (27) показывает, что $E(x)>0$ при всех вещественных x. В силу (25), $E(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$, а (27) показывает, что $E(x)\to 0$ при $x\to-\infty$ вдоль вещественной оси. В силу (25), из $0<x<y$ следует, что $E(x)<E(y)$; из (27) следует $E(-y)<E(-x)$; значит, функция E строго возрастает на всей вещественной оси.

Теорема сложения показывает также, что

(28) $$\lim_{h\to 0}\frac{E(z+h)-E(z)}{h}=E(z)\lim_{h\to 0}\frac{E(h)-1}{h}=E(z);$$

последнее равенство следует прямо из (25).

Повторяя (26), получаем

(29) $$E(z_1+\ldots+z_n)=E(z_1)\ldots E(z_n).$$

Положим здесь $z_1=\ldots=z_n=1$. Поскольку $E(1)=e$, где e — число, введенное в определении 3.30, то мы получаем

(30) $$E(n)=e^n \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Если $p=n/m$, где n, m — положительные целые числа, то

(31) $$[E(p)]^m=E(mp)=E(n)=e^n,$$

так что

(32) $$E(p)=e^p \qquad (p>0,\ p \text{ рационально}).$$

Из (27) следует, что $E(-p)=e^{-p}$, где p — положительное и рациональное. Таким образом, (32) выполняется при всех рациональных p.

В упражнении 7 к гл. 1 мы предложили такое определение:

(33) $$x^y=\sup x^p,$$

где верхняя грань берется по всем рациональным p, таким что $p<y$ для любого вещественного y и $x>1$. Если мы таким образом определим при любом вещественном x

(34) $$e^x=\sup e^p \qquad (p<x,\ p \text{ рационально}),$$

то из непрерывности и монотонности функции E, а также из равенства (32) получится

(35) $$E(x)=e^x$$

при всех вещественных x. Равенство (35) объясняет, почему функцию E называют показательной.

На самом деле вместо (34) вполне можно воспользоваться равенством (35) для определения e^x; равенство (35) — гораздо более удобная отправная точка для исследования свойств функции e^x. Сейчас мы увидим, что и (33) можно заменить более удобным определением (см. (43)).

Вернемся к обычному обозначению e^x вместо $E(x)$ и подытожим то, что было доказано до сих пор.

8.6. Теорема. *Пусть e^x определяется на R^1 равенствами* (35) *и* (25). *Тогда*

(*a*) *функция e^x непрерывна и дифференцируема в любой вещественной точке*;

(*b*) $(e^x)' = e^x$;

(*c*) e^x — *строго возрастающая функция и* $e^x > 0$;

(*d*) $e^{x+y} = e^x e^y$;

(*e*) $e^x \to +\infty$ *при* $x \to +\infty$, $e^x \to 0$ *при* $x \to -\infty$;

(*f*) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$ *при любом* n.

Мы уже доказали все утверждения от (*a*) до (*e*); (25) показывает, что

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

при $x > 0$, так что

$$x^n e^{-x} < \frac{(n+1)!}{x},$$

откуда и следует (*f*). Утверждение (*f*) означает, что e^x стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$ «быстрее», чем любая степень x.

Функция E, будучи строго возрастающей и дифференцируемой на R^1, имеет обратную функцию L, которая тоже строго возрастает и дифференцируема и область определения которой совпадает с $E(R^1)$, т. е. с множеством всех положительных чисел. Функция L определяется из равенства

$$E(L(y)) = y \qquad (y > 0) \tag{36}$$

или из равенства

$$L(E(x)) = x \qquad (x \text{ — вещественно}). \tag{37}$$

Дифференцируя (37), получаем (ср. с теоремой 5.5)

$$L'(E(x)) \cdot E(x) = 1.$$

Записывая $y = E(x)$, имеем

$$L'(y) = \frac{1}{y} \qquad (y > 0). \tag{38}$$

Полагая в (37) $x=0$, мы видим, что $L(1)=0$. Значит, из (38) следует

$$L(y)=\int_1^y \frac{dx}{x}. \tag{39}$$

Очень часто равенство (39) принимают за отправную точку в теории логарифма и показательной функции. Полагая $u=E(x)$, $v=E(y)$, получаем из (26)

$$L(uv)=L(E(x)\cdot E(y))=L(E(x+y))=x+y,$$

так что

$$L(uv)=L(u)+L(v) \qquad (u>0,\ v>0). \tag{40}$$

Это показывает, что L обладает известным свойством, которое делает логарифмы средством, полезным для вычислений. Обычное обозначение для $L(x)$, конечно, $\log x$.

Что касается поведения функции $\log x$ при $x\to+\infty$ и при $x\to 0$, то теорема 8.6 (e) показывает, что

$$\log x\to+\infty \text{ при } x\to+\infty,$$

$$\log x\to-\infty \text{ при } x\to 0.$$

Легко видеть, что

$$x^n=E(nL(x)), \tag{41}$$

если $x>0$, а n — целое. Подобным же образом, если m — положительное целое, то

$$x^{1/m}=E\left(\frac{1}{m}L(x)\right), \tag{42}$$

так как каждая из частей равенства (42) после возведения в m-ю степень превращается в соответствующую часть равенства (37). Объединяя (41) и (42), получаем

$$x^\alpha=E(\alpha L(x))=e^{\alpha\log x} \tag{43}$$

при любом рациональном α.

Определим теперь x^α при любом вещественном α и любом $x>0$ равенством (43). Непрерывность и монотонность функций E и L показывают, что это определение приводит к тому же результату, что предложенное ранее. Утверждения, сформулированные в упражнениях с 4-го по 7-е гл. 1 — тривиальные следствия равенства (43).

Продифференцировав (43), получаем, по теореме 5.5,

$$(x^\alpha)'=E(\alpha L(x))\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}. \tag{44}$$

Заметим, что раньше мы использовали (44) только для целых значений α, а в этом случае (44) легко следует из теоремы 5.3 (b).

Доказать равенство (44), исходя непосредственно из определения производной, если x^α определено, как в (33), весьма затруднительно.

Хорошо известная формула интегрирования для x^α следует из (44), если $\alpha \neq -1$, и из (38), если $\alpha = -1$. Мы хотим доказать еще одно свойство функции $\log x$, а именно

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-\alpha} \log x = 0 \tag{45}$$

при каждом $\alpha > 0$. Иначе говоря, $\log x \to +\infty$ при $x \to +\infty$ «медленнее», чем любая положительная степень x.

Действительно, если $0 < \varepsilon < \alpha$, а $x > 1$, то

$$x^{-\alpha} \log x = x^{-\alpha} \int_1^x t^{-1}\, dt < x^{-\alpha} \int_1^x t^{\varepsilon - 1}\, dt =$$
$$= x^{-\alpha} \cdot \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon} < \frac{x^{\varepsilon - \alpha}}{\varepsilon},$$

откуда и следует (45). Мы могли бы также воспользоваться теоремой 8.6 (f) для вывода равенства (45).

Тригонометрические функции

Положим, по определению,

$$C(x) = \frac{1}{2}[E(ix) + E(-ix)], \quad S(x) = \frac{1}{2i}[E(ix) - E(-ix)]. \tag{46}$$

Мы покажем, что $C(x)$ и $S(x)$ совпадают с функциями $\cos x$ и $\sin x$, определение которых обычно основывается на геометрических рассмотрениях. Согласно (25), $E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$. Значит, как показывает (46), $C(x)$ и $S(x)$ вещественны при вещественных x. Кроме того,

$$E(ix) = C(x) + iS(x). \tag{47}$$

Таким образом, $C(x)$ и $S(x)$ равны соответственно мнимой и вещественной части числа $E(ix)$, если x вещественно. Согласно (27),

$$|E(ix)|^2 = E(ix)\,\overline{E(ix)} = E(ix)\,E(-ix) = 1,$$

так что

$$|E(ix)| = 1 \qquad (x \text{ вещественно}). \tag{48}$$

Из (46) можно усмотреть, что $C(0) = 1$, $S(0) = 0$, а (28) показывает, что

$$C'(x) = -S(x), \quad S'(x) = C(x). \tag{49}$$

Мы утверждаем, что существуют положительные числа x, такие, что $C(x)=0$. Действительно, пусть это не так. Из того, что $C(0)=1$, следует тогда, что $C(x)>0$ при всех $x>0$; значит, $S'(x)>0$, согласно (49), и, значит, функция S строго возрастает, а так как $S(0)=0$, то $S(x)>0$ при $x>0$. Значит, если $0<x<y$, то

$$S(x)(y-x)<\int_x^y S(t)\,dt=C(x)-C(y)\leqslant 2. \tag{50}$$

Последнее неравенство следует из (48) и (47). Но (50) не может выполняться при больших y, так как $S(x)>0$, и мы получили противоречие.

Пусть x_0 — наименьшее из положительных чисел x, таких, что $C(x)=0$. Оно существует, так как множество нулей непрерывной функции замкнуто, а $C(0)\neq 0$. Определим число π равенством

$$\pi=2x_0. \tag{51}$$

Тогда $C(\pi/2)=0$ и, как показывает (48), $S(\pi/2)=\pm 1$. Но так как $C(x)>0$ в $(0, \pi/2)$, то S возрастает в $(0, \pi/2)$; значит, $S(\pi/2)=1$. Таким образом,

$$E\left(\frac{\pi i}{2}\right)=i,$$

и теорема сложения показывает, что

$$E(\pi i)=-1, \quad E(2\pi i)=1; \tag{52}$$

значит,

$$E(z+2\pi i)=E(z) \qquad (z \text{ — комплексное}). \tag{53}$$

8.7. Теорема. (*a*) *Функция E периодична с периодом $2\pi i$.*
(*b*) *функции C и S периодичны с периодом 2π.*
(*c*) *Если $0<t<2\pi$, то $E(it)\neq 1$.*
(*d*) *Если z — комплексное число, а $|z|=1$, то существует единственное число $t\in[0, 2\pi)$, такое, что $E(it)=z$.*

Доказательство. Утверждение (*a*) следует из (53), а утверждение (*b*) следует из (*a*) и (46).

Пусть $0<t<\pi/2$, а $E(it)=x+iy$, где x и y вещественны. Сделанное нами ранее показывает, что $0<x<1$, $0<y<1$. Заметим, что

$$E(4it)=(x+iy)^4=x^4-6x^2y^2+y^4+4ixy(x^2-y^2).$$

Если $E(4it)$ вещественно, то $x^2-y^2=0$, а так как, согласно (48), $x^2+y^2=1$, то $x^2=y^2=\frac{1}{2}$, значит, $E(4it)=-1$. Тем самым (c) доказано.

Если $0\leqslant t_1<t_2<2\pi$, то

$$E(it_2)[E(it_1)]^{-1}=E(it_2-it_1)\neq 1,$$

согласно (c). Тем самым доказано утверждение о единственности, содержащееся в (d).

Пусть $z_1=x_1+iy_1$, $x_1^2+y_1^2=1$, $x_1\geqslant 0$, $y_1\geqslant 0$. На $[0, \pi/2]$ функция C убывает от 1 до 0; значит, $C(t_1)=x_1$ при некотором t_1 на $[0, \pi/2]$. Из того, что $C^2+S^2=1$, а $S\geqslant 0$ на $[0, \pi/2]$, следует, что $z_1=E(it_1)$.

Наконец, допустим, что $z=x+iy$, $|z|=1$. Положим $z_1=-iz$, если $x<0$, $y\geqslant 0$. Положим $z_1=-z$, если $x<0$, $y<0$. Положим $z_1=iz$, если $x\geqslant 0$, $y<0$. Тогда z_1 удовлетворяет предположениям предыдущего абзаца, а так как $i=E(\pi i/2)$, то мы видим, что $z=E(i(t_1+\pi/2))$ или $E(i(t_1+\pi))$ или $E(i(t_1+3\pi/2))$, в зависимости от того, какой из трех случаев рассматривается. Тем самым доказано утверждение (d), а с ним вся теорема.

Из (d) и (48) следует, что кривая γ, определенная равенством

$$\gamma(t)=E(it)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi), \tag{54}$$

— простая замкнутая кривая, множество значений которой — единичная окружность на плоскости. Длина кривой по теореме 6.35 равна

$$\int_0^{2\pi}|\gamma'(t)|\,dt=2\pi,$$

так как $\gamma'(t)=iE(it)$. Такого результата, конечно, и следовало ожидать для окружности радиуса 1; он показывает, что π, определенное в (51), имеет обычный геометрический смысл.

Таким же точно образом мы увидим что при возрастании t от 0 до t_0 точка $\gamma(t)$ описывает дугу, лежащую на окружности и имеющую длину t_0. Рассмотрение треугольника с вершинами

$$z_1=0,\quad z_2=\gamma(t_0),\quad z_3=C(t_0)$$

показывает, что $C(t)$ и $S(t)$ на самом деле совпадают с $\cos t$ и $\sin t$, если эти последние определены обычным способом как отношения сторон прямоугольного треугольника.

Следует подчеркнуть, что мы вывели основные свойства тригонометрических функций из (46) и (25), не привлекая геометрического понятия угла.

Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел

Теперь мы в состоянии дать простое доказательство того факта, что поле комплексных чисел алгебраически замкнуто, т. е. что каждый отличный от постоянной многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

8.8. Теорема. *Пусть* $a_0, \ldots, a_n$ — *комплексные числа,* $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, $P(z) = \sum_0^n a_k z^k$. *Тогда существует такое комплексное число* z, *что* $P(z) = 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности, допустим, что $a_n = 1$. Положим

$$\mu = \inf |P(z)| \qquad (z \text{ — комплексное}). \tag{55}$$

Если $|z| = R$, то

$$|P(z)| \geqslant R^n [1 - |a_{n-1}| R^{-1} - \ldots - |a_0| R^{-n}]. \tag{56}$$

Правая часть неравенства (56) стремится к ∞, когда $R \to \infty$. Значит, существует такое R_0, что $|P(z)| > \mu$, если $|z| > R_0$. Ввиду того что функция $|P|$ непрерывна на замкнутом круге с центром в нуле радиуса R_0, мы заключаем на основании теоремы 4.16, что $|P(z_0)| = \mu$ при некотором z_0.

Мы утверждаем, что $\mu = 0$.

Если это не так, то положим $Q(z) = \frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$. Тогда Q — многочлен, отличный от постоянной, $Q(0) = 1$ и $|Q(z)| \geqslant 1$ при всех z. Существует наименьшее целое из всех чисел k, $1 \leqslant k \leqslant n$, таких, что

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \ldots + b_n z^n, \quad b_k \neq 0. \tag{57}$$

Обозначим это число через k_0.

По теореме 8.7 (d) существует вещественное θ, такое, что

$$e^{ik_0\theta} b_{k_0} = -|b_{k_0}|. \tag{58}$$

Тогда $|Q(re^{i\theta})| \leqslant 1 - r^{k_0} \{|b_{k_0}| - r|b_{k_0+1}| - \ldots - r^{n-k_0}|b_n|\}$, если $r > 0$. При достаточно малом r выражение в скобках положительно, значит, $|Q(re^{i\theta})| < 1$, и мы пришли к противоречию.

Таким образом, $\mu = 0$, т. е. $P(z_0) = 0$.

Ряды Фурье

8.9. Определение. *Тригонометрическим многочленом* называется конечная сумма вида

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad (x \text{ вещественно}), \tag{59}$$

где $a_0, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ — комплексные числа. Учитывая тождества (46), функцию (59) можно записать в виде

$$f(x)=\sum_{-N}^{N}c_n e^{inx}\qquad (x \text{ вещественно}), \tag{60}$$

который для многих целей более удобен. Ясно, что каждый тригонометрический многочлен — периодическая функция с периодом 2π.

Если n — отличное от нуля целое число, то e^{inx} — производная функции e^{inx}/in, которая тоже имеет период 2π. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}\,dx=\begin{cases}1, & \text{если } n=0,\\ 0, & \text{если } n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots .\end{cases} \tag{61}$$

Умножим (60) на e^{-imx}, где m — целое число; интегрируя это произведение, получим на основании (61)

$$c_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-imx}\,dx \tag{62}$$

при $|m|\leqslant N$. Если $|m|>N$, то интеграл в (62) равен нулю.

Из равенств (60) и (62) видно, что тригонометрический многочлен f, заданный равенством (60), оказывается вещественным в том и только в том случае, когда $c_{-n}=\bar{c}_n$ при $n=0, \ldots, N$.

В соответствии с (60) мы определяем *тригонометрический ряд* как ряд вида

$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}\qquad (x \text{ вещественно}); \tag{63}$$

N-я частная сумма ряда (63) по определению равна правой части равенства (60).

Если f — функция, интегрируемая на $[-\pi, \pi]$, то числа c_m, заданные равенством (62) для всех целых чисел m, называются *коэффициентами Фурье* функции f, а ряд (63), составленный при помощи этих коэффициентов, — *рядом Фурье* функции f. Теперь возникает естественный вопрос: сходится ли ряд Фурье функции f к f, или, более общо, определяется ли функция f своим

рядом Фурье. Иначе говоря, если мы знаем коэффициенты Фурье функции, то можем ли мы найти эту функцию, и если можем, то как?

Изучение таких рядов и, в частности, проблема представления заданной функции тригонометрическим рядом, имеет своим источником такие разделы физики, как теория колебаний и теория распространения тепла (книга Фурье «Аналитическая теория теплоты» была опубликована в 1822 г.). Многочисленные трудные и тонкие проблемы, возникшие при этом изучении, вызвали основательный пересмотр и перестройку всей теории функций вещественной переменной. Многие выдающиеся имена, и среди них имена Римана, Кантора и Лебега, тесно связаны с этой областью, о которой вполне можно сказать, что в наши дни она вместе со всеми ее обобщениями и ответвлениями занимает центральное положение в анализе.

Мы ограничимся некоторыми основными теоремами, для доказательства которых достаточны методы, развитые в предшествующих главах. Для более основательного исследования естественным и необходимым средством служит интеграл Лебега.

Сначала мы изучим более общие системы функций, обладающие свойством, аналогичным (61).

8.10. Определение. Пусть $\{\varphi_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ — последовательность комплексных функций на $[a, b]$, такая, что

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\overline{\varphi_m(x)}\,dx = 0 \qquad (n \neq m). \tag{64}$$

Тогда $\{\varphi_n\}$ называется *ортогональной системой функций* на $[a, b]$. Если, кроме того,

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,dx = 1 \tag{65}$$

при всех n, то система $\{\varphi_n\}$ называется *ортонормальной*.

Например, функции $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{inx}$ образуют ортонормальную систему на $[-\pi, \pi]$. Таковы же и вещественные функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots.$$

Если $\{\varphi_n\}$ — ортонормальная система на $[a, b]$ и если

$$c_n = \int_a^b f(t)\,\overline{\varphi_n(t)\,dt} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots), \tag{66}$$

то мы будем называть число c_n n-м коэффициентом Фурье функции f относительно системы $\{\varphi_n\}$. Мы будем писать

$$f(x) \sim \sum_1^\infty c_n \varphi_n(x) \tag{67}$$

и будем называть этот ряд рядом Фурье функции f (относительно системы $\{\varphi_n\}$).

Заметим, что, употребляя в (67) символ $\sim$, мы ничего не предполагаем о сходимости ряда; этот символ означает только, что коэффициенты задаются равенствами (66).

Следующие теоремы показывают, что частные суммы ряда Фурье функции f обладают некоторым свойством минимальности. Мы будем предполагать здесь, как и на протяжении всей остальной части главы, что $f \in \mathscr{R}$, хотя это условие может быть ослаблено.

8.11. Теорема. *Пусть система $\{\varphi_n\}$ ортонормальна на $[a, b]$. Пусть*

$$s_n(x) = \sum_{m=1}^n c_m \varphi_m(x) \tag{68}$$

есть n-я частная сумма ряда Фурье функции f, и пусть

$$t_n(x) = \sum_{m=1}^n \gamma_m \varphi_m(x). \tag{69}$$

Тогда

$$\int_a^b |f - s_n|^2 dx \leqslant \int_a^b |f - t_n|^2 dx, \tag{70}$$

и равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\gamma_m = c_m \quad (m = 1, \ldots, n). \tag{71}$$

Иначе говоря, среди всех функций t_n функция s_n дает наилучшее среднеквадратичное приближение к функции f.

Доказательство. Пусть $\int$ обозначает интеграл по сегменту $[a, b]$, $\sum$ — сумму от 1 до n. Тогда

$$\int f\bar{t}_n = \int f \sum \bar{\gamma}_m \bar{\varphi}_m = \sum c_m \bar{\gamma}_m$$

по определению $\{c_m\}$,

$$\int |t_n|^2 = \int t_n \bar{t}_n = \int \sum \gamma_m \varphi_m \sum \bar{\gamma}_k \bar{\varphi}_k = \sum |\gamma_m|^2,$$

так как система $\{\varphi_m\}$ ортонормальна, и поэтому

$$\int |f-t_n|^2 = \int |f|^2 - \int f\bar{t}_n - \int \bar{f}t_n + \int |t_n|^2 =$$
$$= \int |f|^2 - \sum c_m\bar{\gamma}_m - \sum \bar{c}_m\gamma_m + \sum \gamma_m\bar{\gamma}_m =$$
$$= \int |f|^2 - \sum |c_m|^2 + \sum |\gamma_m - c_m|^2;$$

последнее выражение достигает минимума тогда и только тогда, когда $\gamma_m = c_m$.

Если в этой выкладке считать $\gamma_m = c_m$, то мы получим

$$\sum_1^n |c_m|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx, \tag{72}$$

так как $\int |f-t_n|^2 \geqslant 0$.

8.12. Теорема. *Если $\{\varphi_n\}$ — ортонормальная система на $[a, b]$ и если*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx. \tag{73}$$

В частности,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0. \tag{74}$$

Доказательство. Полагая в (72) $n \to \infty$, мы получаем неравенство (73) — так называемое «неравенство Бесселя».

Для тригонометрического ряда Фурье, т. е. для ряда (63), коэффициенты которого определяются из (62), неравенство (73) принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx. \tag{75}$$

Впоследствии мы увидим, что на самом деле в (75) имеет место равенство.

При изучении тригонометрических рядов Фурье мы встретимся с двумя тригонометрическими многочленами:

$$D_n(x) = \sum_{-n}^{n} e^{ikx}, \quad K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_0^n D_m(x). \tag{76}$$

Первый из них называют ядром Дирихле, а второй — ядром Фейера.

8.13. Теорема. *При* $n=0, 1, 2, \ldots$ *имеем*

$$D_n(x)=\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}, \tag{77}$$

$$K_n(x)=\frac{1}{n+1}\,\frac{1-\cos(n+1)x}{1-\cos x}, \tag{78}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx=1. \tag{79}$$

Кроме того, $K_n(x)\geqslant 0$ *и*

$$K_n(x)\leqslant\frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)}\qquad(0<\delta\leqslant|x|\leqslant\pi). \tag{80}$$

Доказательство. Согласно (76),

$$(e^{ix}-1)D_n(x)=e^{i(n+1)x}-e^{-inx}. \tag{81}$$

Чтобы получить (77), умножим обе части равенства (81) на $e^{-ix/2}$. Подставляя (81) в определение ядра K_n, получаем

$$(n+1)K_n(x)(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1)=(e^{-ix}-1)\sum_{m=0}^{n}(e^{i(m+1)x}-e^{-imx})=$$
$$=2-e^{i(n+1)x}-e^{-i(n+1)x},$$

откуда следует (78). Значит, $K_n\geqslant 0$ и выполняется (80); (79) следует непосредственно из (76).

Начиная с этого места мы будем иметь дело только с тригонометрической системой. Предположим, что функция f, первоначально определенная на $[-\pi, \pi]$, продолжена на R^1 как 2π-периодическая функция[1]).

Коэффициенты Фурье функции f задаются равенством (62); значит, n-я частная сумма s_n ее ряда Фурье равна

$$s_n(x)=s_n(f;\ x)=\sum_{-n}^{n}c_m e^{imx}=\sum_{-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{-imt}\,dt\,e^{imx}=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sum_{-n}^{n}e^{im(x-t)}\,dt.$$

---

[1]) Такое продолжение невозможно, если $f(-\pi)\neq f(\pi)$, однако функция $\tilde f$, такая, что $\tilde f(x)=f(x)$ $(x\in(-\pi, \pi))$ и $\tilde f(-\pi)=\tilde f(\pi)=0$, уже может быть продолжена с периодом 2π на всю ось, а ее коэффициенты Фурье, как легко видеть, равны соответствующим коэффициентам функции f. — *Прим. перев.*

Иными словами,

$$(82)\qquad s_n(f;\,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,D_n(t)\,dt.$$

Вследствие периодичности всех участвующих в этом равенстве функций безразлично, по какому интервалу мы будем интегрировать, лишь бы его длина была равна 2π. Именно поэтому и равны интегралы в (82).

8.14. Теорема. *Если* $f\in\mathscr{R}$ *на* $[-\pi,\ \pi]$ *и* $0<\delta<\pi$, *то*

$$(83)\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right) f(x-t)\,D_n(t)\,dt=0.$$

Обычно это равенство называют теоремой о локализации. Оно показывает, что поведение последовательности $\{s_n(x)\}$, поскольку речь идет о сходимости, зависит только от значений функции f, принимаемых в некоторой (произвольно малой) окрестности точки x. Таким образом, два ряда Фурье могут вести себя одинаково в одном интервале, а в некотором другом интервале вести себя совершенно по-разному. Мы сталкиваемся здесь с замечательным контрастом между рядами Фурье и степенными рядами (теорема 8.5).

Доказательство. Зафиксируем x, и пусть $g(t)=0$ при $|t|<\delta$,

$$(84)\qquad g(t)=\frac{f(x-t)}{\sin(t/2)}\qquad(\delta\leqslant|t|\leqslant\pi).$$

Согласно (77),

$$\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right) f(x-t)\,D_n(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos\frac{t}{2}\sin nt\,dt+\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\frac{t}{2}\cos nt\,dt.$$

Оба последних интеграла стремятся к нулю при $n\to\infty$ согласно (74), так как функции $g(t)\cos(t/2)$ и $g(t)\sin(t/2)$ интегрируемы. Отсюда и следует (83).

Таким образом, изучение сходимости последовательности $\{s_n(f;\,x)\}$ сводится к изучению интеграла

$$(85)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\,D_n(t)\,dt$$

при сколь угодно малом $\delta > 0$. Известны несколько достаточных условий сходимости ряда Фурье; доказательства двух из них намечены в упражнениях 9 и 17. Нельзя, очевидно, ожидать, что ряд Фурье любой функции будет сходиться к значению этой функции в любой точке. Действительно, если значения двух функций отличаются только в конечном множестве точек, то интегралы, определяющие их коэффициенты Фурье, будут одинаковыми, и, значит, такие функции имеют один и тот же ряд Фурье.

Здесь имеются трудные проблемы. Не известно даже, верно или нет следующее невинно звучащее утверждение: «для любой непрерывной функции f существует точка x, в которой ряд Фурье функции f сходится». Известно, что существуют непрерывные функции, ряд Фурье которых расходится на несчетном множестве точек. Однако положение весьма улучшается при рассмотрении вместо частных сумм $s_n(x)$ их средних арифметических

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1}. \tag{86}$$

Следующая теорема принадлежит Фейеру.

8.15. Теорема. *Если f непрерывна (и, конечно, периодична с периодом 2π) и если $\{\sigma_n\}$ — последовательность средних арифметических частных сумм ряда Фурье функции f, то*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$$

равномерно на R^1.

Заметим по этому поводу, что из теоремы Стона — Вейерштрасса следует существование *некоторой* последовательности тригонометрических многочленов, равномерно сходящейся к f. Действительно, отождествляя точки x и $x + 2\pi$, мы можем считать, что периодические функции определены на единичной окружности K. Тригонометрические многочлены, т. е. функции вида (60), образуют алгебру функций на K, удовлетворяющую предположениям теоремы 7.31.

Доказательство. Согласно (86), (82) и (76), имеем

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,K_n(t)\,dt, \tag{87}$$

и потому из (79) следует, что

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)]\,K_n(t)\,dt. \tag{88}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем M так, что $|f(x)| \leqslant M$ при всех x. Ввиду того что функция f равномерно непрерывна, мы можем выбрать $\delta > 0$ так, что из $|x-y| < \delta$ следует

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{89}$$

Согласно (80), мы можем затем выбрать N так, чтобы из $n \geqslant N$ и $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$ следовало

$$K_n(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{90}$$

Из (89) следует, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t)-f(x)|\,|K_n(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = \pi\varepsilon \tag{91}$$

при всех n, так как $K_n(t) \geqslant 0$, а из (90) получаем

$$\left\{\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right\} |f(x-t)-f(x)|\,|K_n(t)|\,dt \leqslant \tag{92}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4M}\int_{-\pi}^{\pi} 2M\,dt = \pi\varepsilon,$$

как только $n \geqslant N$. Наконец, комбинируя (88), (91) и (92), получаем

$$|\sigma_n(x)-f(x)| < \varepsilon \tag{93}$$

при всех x и всех $n \geqslant N$. Доказательство закончено.

Заметим, что если бы мы попытались доказать то же самое для $s_n(x)$ вместо $\sigma_n(x)$, т. е. если бы мы заменили $K_n(t)$ ядром $D_n(t)$, то мы столкнулись бы с интегралом

$$L_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt, \tag{94}$$

который стремится к ∞ при $n \to \infty$. (Упражнение 12.)

Именно этим свойством ядер D_n вызваны трудности, встречающиеся в теории сходимости рядов Фурье.

Следствие 1. *Если две непрерывные 2π-периодические функции f и g имеют один и тот же ряд Фурье, то $f(x) = g(x)$ при всех x.*

Действительно, если $\sigma_n(x)$ — среднее арифметическое для этого ряда Фурье, то $\sigma_n(x) \to f(x)$, $\sigma_n(x) \to g(x)$ при каждом x.

Следствие 2. *Если функция f непрерывна и если*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = 0$$

при любом целом n, то $f(x) = 0$ при всех x.

Это вытекает из следствия 1, если положить там $g = 0$.

8.16. Теорема. *Пусть функции f и g непрерывны (и периодичны с периодом 2π) и*

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}. \tag{95}$$

Если s_n есть n-я частная сумма ряда Фурье функции f, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f - s_n|^2\, dx = 0, \tag{96}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \overline{\gamma_n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx, \tag{97}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx. \tag{98}$$

Это утверждение известно как теорема Парсеваля.

Доказательство. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Теорема Фейера показывает, что существует N, такое, что $|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon$ при всех x и при всех $n > N$. По теореме 8.11

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - s_n|^2\, dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f - \sigma_n|^2\, dx < 2\pi\varepsilon^2,$$

если $n > N$, и тем самым доказано (96). Далее,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \sum_{-n}^{n} c_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \overline{g(x)}\, dx = \tag{99}$$

$$= \sum_{-n}^{n} c_k \overline{\gamma_k},$$

и неравенство Шварца показывает, что

$$\left| \int f\overline{g} - \int s_n \overline{g} \right| \leqslant \int |f - s_n|\, |g| \leqslant \left\{ \int |f - s_n|^2 \int |g|^2 \right\}^{1/2}. \tag{100}$$

Произведение в фигурных скобках стремится к нулю при $n \to \infty$, согласно (96). Сравнивая (99) и (100), получаем (97). Наконец, (98) — это частный случай ($f = g$) равенства (97).

Условие непрерывности в этой теореме может быть значительно ослаблено. Окончательный вариант теоремы 8.16 будет дан в гл. 10.

Упражнения

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Доказать, что f имеет производные всех порядков в точке $x = 0$ и что $f^{(n)}(0) = 0$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2. Доказать следующие предельные соотношения:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{b^x - 1}{x} = \log b \qquad (b > 0)$;

(*b*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$;

(*c*) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$;

(*d*) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

3. Пусть $f(x) f(y) = f(x+y)$ при всех вещественных x и y

(*a*) Предполагая, что f дифференцируема и отлична от тождественного нуля, доказать, что

$$f(x) = e^{cx},$$

где c — некоторое число.

(*b*) Доказать то же самое, предполагая, что f только непрерывна.

4. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

5. Доказать, что при вещественном x и $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$|\sin nx| \leqslant n |\sin x|.$$

Заметим, что это неравенство может быть неверным для других значений n. Например,

$$\left|\sin \frac{1}{2}\pi\right| > \frac{1}{2} |\sin \pi|.$$

6. Пусть a_{ij} — число, стоящее в i-й строке и j-м столбце таблицы

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0\ldots \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0\ldots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0\ldots \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array}$$

так что

$$a_{ij}=\begin{cases} 0 & (i<j), \\ -1 & (i=j), \\ 2^{i-j} & (i>i). \end{cases}$$

Доказать, что

$$\sum_i \sum_j a_{ij}=-2, \qquad \sum_j \sum_i a_{ij}=0.$$

7. Доказать, что

$$\sum_i \sum_j a_{ij}=\sum_j \sum_i a_{ij},$$

если $a_{ij}\geqslant 0$ при всех i и j. (Случай $+\infty=+\infty$ не исключается.)

8. Вывести теорему Вейерштрасса о равномерном приближении многочленами из теоремы Фейера (рассмотреть разложение тригонометрического многочлена в степенной ряд).

9. Будем говорить, что f удовлетворяет условию Липшица в точке x, если существуют числа M и $\delta>0$, такие, что

$$|f(y)-f(x)|<M|y-x|$$

при $|y-x|<\delta$.

Доказать, что ряд Фурье функции f сходится к $f(x)$ в точке x, если f удовлетворяет условию Липшица в этой точке.

Указание. Функции $[f(x-t)-f(x)]D_n(t)$ равномерно ограничены в интервале $(-\delta, \delta)$.

10. Если функция f дифференцируема в точке x, то она удовлетворяет условию Липшица в этой точке. Значит, дифференцируемость влечет за собой сходимость ряда Фурье.

11. Пусть $r_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n$. Доказать, что последовательность $\{r_n\}$ сходится. (Ее предел, часто обозначаемый буквой γ, называется эйлеровой постоянной, $\gamma=0{,}5772\ldots$.)

12. Пусть

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Доказать, что существует число $C > 0$, такое, что

$$L_n > C \log n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

или, точнее, что последовательность

$$\left\{ L_n - \frac{4}{\pi^2} \log n \right\}$$

ограничена.

13. Если $|f(x)| \leqslant M$ при всех x, то и $|\sigma_n(x)| \leqslant M$ при всех x и n.

14. Пусть $|nc_n| \leqslant M$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$s_n = c_0 + c_1 + \ldots + c_n,$$

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}.$$

Доказать, что

$$|s_n - \sigma_n| \leqslant M.$$

Указание: $s_n - \sigma_n = \dfrac{c_1 + 2c_2 + \ldots + nc_n}{n+1}$.

15. Пусть f — функция ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$. Доказать, что если s_n есть n-я частная сумма Фурье функции f, то последовательность $\{s_n(x)\}$ равномерно ограничена.

Указание. Воспользоваться двумя предыдущими результатами и упражнением 12 к гл. 6.

16. Доказать, что существует постоянная M, такая, что

$$\left| \sum_{m=1}^{n} \frac{\sin mt}{m} \right| < M.$$

Указание. Применить результат упражнения 15 к ряду Фурье функции

$$f(t) = \begin{cases} \pi - t & \text{при} \quad t \in (0, \pi), \\ -\pi - t & \text{при} \quad t \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

17. Пусть f — функция ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$. Доказать, что если при некотором x

$$s = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)],$$

то ряд Фурье функции f сходится в точке x к s. (Эта теорема принадлежит Дирихле.)

Указание. Допустим, не ограничивая общности, что $s=0$, $x=0$ и f — четная (для нечетной f положим $s_n(f;\,0)=0$ и $f(0)=0$). Тогда f непрерывна в нуле. Выберем $\delta>0$ так, чтобы полная вариация функции f на $[0,\,\delta]$ была мала, проинтегрируем по частям и применим упражнение 16, чтобы убедиться в малости интеграла

$$\int_0^\delta f(t)\,D_n(t)\,dt$$

при всех n, а затем воспользуемся теоремой о локализации.

18. Доказать локальный вариант теоремы Фейера: если $f\in\mathscr{R}$ и если функция f непрерывна в точке x_0, то $\sigma_n(f;\,x_0)\to f(x_0)$ при $n\to\infty$.

19. Пусть $a_n=n^{1/n}-1$, а $b_n=\log n/n$. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}.$$

20. Пусть f — функция, непрерывная на R^1, $f(x+2\pi)=f(x)$ и α/π — иррациональное число. Доказать, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x+n\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt$$

при всех x.

Указание. Сначала доказать это для $f(x)=e^{ikx}$.

21. Сформулировать и доказать теорему о равномерном приближении непрерывной функции интегралами вида

$$\int f(x-t)\,\varphi_n(t)\,dt,$$

которая содержала бы теоремы Вейерштрасса (7.24) и Фейера (8.15) как частные случаи.