ГЛАВА 9

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Линейные преобразования

Эту главу мы начнем с рассмотрения множеств векторов в евклидовом пространстве R^n. Излагаемые здесь алгебраические факты без изменений переносятся на конечномерные векторные пространства над любым полем скаляров. Однако для наших целей мы вполне можем оставаться в привычных рамках евклидовых пространств

9.1. Определения. (*a*) Множество $X \subset R^n$ называется *векторным пространством*, если $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in X$ и $c\mathbf{x} \in X$, каковы бы ни были $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ и число c.

(*b*) Если $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in R^n$, а $c_1, \ldots, c_k$ — числа, то вектор $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k$ называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$. Если $S \subset R^n$ и если E — множество всех линейных комбинаций элементов S, то мы будем говорить, что E *натянуто* на S или что E — *оболочка* S.

Заметим, что каждая оболочка есть векторное пространство.

(*c*) Множество, состоящее из векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ (для такого множества мы будем использовать обозначение $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$), называется *независимым*, если из соотношения $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k = 0$ следует, что $c_1 = \ldots = c_k = 0$. В противном случае это множество называется *зависимым*.

Отметим, что независимое множество не может содержать нулевого вектора.

(*d*) Если векторное пространство X содержит независимое множество, состоящее из r векторов, но не содержит никакого независимого множества из $r+1$ векторов, то говорят, что X имеет *размерность* r и пишут $\dim X = r$.

Множество, состоящее из одного элемента $\mathbf{0}$, — векторное пространство; размерность его равна нулю.

(*e*) Независимое подмножество пространства X, оболочка которого равна X, называется *базисом* пространства X.

Заметим, что если $B = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ — базис пространства X, то каждый элемент $\mathbf{x} \in X$ допускает единственное представление вида $\mathbf{x} = \sum c_j\mathbf{x}_j$. Такое представление существует, так как X натянуто на B, и единственно, так как множество B независимо. Числа

$c_1, \ldots, c_r$ называются *координатами* вектора $\mathbf{x}$ по отношению к базису B.

Наиболее известным примером базиса служит множество $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, где $\mathbf{e}_j$ — вектор пространства R^n, j-я координата которого равна 1, а прочие координаты равны нулю. Если $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, то $\mathbf{x} = \sum x_j \mathbf{e}_j$. Мы будем называть множество $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *стандартным базисом пространства* R^n.

9.2. Теорема. *Пусть r — положительное целое число. Если векторное пространство X натянуто на множество, состоящее из r векторов, то* $\dim X \leqslant r$.

Доказательство. Если это неверно, то существует векторное пространство X, содержащее независимое множество $Q = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{r+1}\}$ и натянутое на множество S_0, состоящее из r векторов.

Пусть $0 \leqslant i < r$, и допустим, что построено множество S_i, оболочкой которого служит пространство X и которое состоит из векторов $\mathbf{y}_j$ с $1 \leqslant j \leqslant i$ и из некоторого набора $r - i$ векторов множества S_0, скажем $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{r-i}$. (Иными словами, S_i получается из множества S_0 заменой i из его элементов элементами множества Q без изменения оболочки.) Поскольку X натянуто на S_i, то $\mathbf{y}_{i+1}$ принадлежит оболочке множества S_i, значит, существуют числа $a_1, \ldots, a_{i+1}, b_1, \ldots, b_{r-i}$, где $a_{i+1} = 1$, такие, что

$$\sum_{j=1}^{i+1} a_j \mathbf{y}_j + \sum_{k=1}^{r-i} b_k \mathbf{x}_k = 0.$$

Если бы все b_k были равны нулю, то, в силу независимости множества Q, и все a_j были бы нулями. Но $a_{i+1} = 1$. Следовательно, некоторый вектор $\mathbf{x}_k \in S_i$ есть линейная комбинация других элементов множества $T_i = S_i \cup \{\mathbf{y}_{i+1}\}$. Удалим этот вектор $\mathbf{x}_k$ из T_i и обозначим оставшееся множество через S_{i+1}. Тогда оболочка множеств S_{i+1} и T_i равна X, так что S_{i+1} обладает теми же свойствами, что и S_i (только i нужно заменить на $i+1$).

Начиная с S_0, мы построим таким образом множества $S_1, \ldots, S_r$. Последнее из них состоит из $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r$, и наше построение показывает, что его оболочка равна X. Но множество Q независимо, значит, $\mathbf{y}_{r+1}$ не принадлежит оболочке множества S_r. Это противоречие доказывает теорему.

Следствие. $\dim R^n = n$.

Доказательство. Пространство R^n натянуто на множество $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Поэтому, как показывает теорема,

$$\dim R^n \leqslant n.$$

Но множество $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — независимое, и потому $\dim R^n \geqslant n$.

9.3. Теорема. *Пусть X — векторное пространство и $\dim X = n$.*

(*a*) *Пространство X натянуто на множество E, состоящее из n векторов, в том и только в том случае, когда множество E независимо.*

(*b*) *X имеет базис, и каждый базис состоит из n векторов.*

(*c*) *Если $1 \leqslant r \leqslant n$ и $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ — независимое множество в X, то X имеет базис, в состав которого входят все векторы $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r$.*

Доказательство. Пусть $E = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Множество $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\}$ зависимо при любом $\mathbf{y} \in X$, так как $\dim X = n$. Если E независимо, то $\mathbf{y}$ принадлежит оболочке множества E; значит, X натянуто на E. Обратно, если множество E зависимо, то один из его элементов можно удалить, не меняя оболочки. Значит, X не может быть оболочкой множества E по теореме 9.2. Тем самым (*a*) доказано.

Пространство X содержит независимое множество, состоящее из n векторов, так как $\dim X = n$, а согласно (*a*), каждое такое множество образует базис пространства X; теперь (*b*) вытекает из 9.1 (*d*) и 9.2.

Чтобы доказать (*c*), допустим, что $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ — базис пространства X. Пространство X натянуто на множество

$$S = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\},$$

причем множество S зависимо, так как оно содержит больше, чем n векторов. Рассуждение, использованное при доказательстве теоремы 9.2, показывает, что один из векторов $\mathbf{x}_i$ равен линейной комбинации остальных элементов множества S. Удалив этот вектор $\mathbf{x}_i$ из S, мы получим множество, оболочка которого все еще совпадает с X. Повторяя этот процесс r раз, мы получим базис пространства X, содержащий векторы $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ согласно (*a*).

9.4. Определение. Отображение A векторного пространства X в векторное пространство Y называется *линейным преобразованием*, если

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2, \quad A(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x},$$

каковы бы ни были $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in X$ и число c. Заметим, что часто пишут $A\mathbf{x}$ вместо $A(\mathbf{x})$, если A — линейное преобразование.

Заметим еще, что если A — линейное преобразование, то $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Линейные преобразования пространства X в X часто называют

линейными операторами на X[1]). Если A — линейный оператор на X, который (i) взаимно однозначен; (ii) отображает пространство X *на* X, называют *обратимым*. В этом случае на X можно определить оператор A^{-1}, положив $A^{-1}(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ при всех $\mathbf{x} \in X$. Очевидно, что в этом случае $A(A^{-1}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ при всех $\mathbf{x} \in X$ и A^{-1} — линейный оператор.

Важное свойство линейных операторов на конечномерных векторных пространствах состоит в том, что каждое из условий (i) и (ii) влечет за собой другое.

9.5. Теорема. *Линейный оператор A на конечномерном векторном пространстве X взаимно однозначен в том и только в том случае, когда множество его значений совпадает со всем X.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ — базис пространства X. Из свойств линейности оператора A следует, что его множество значений $R(A)$ натянуто на множество $Q = \{A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n\}$. Из теоремы 9.3 (*a*) мы заключаем, что $R(A) = X$ тогда и только тогда, когда Q — независимое множество. Мы должны показать, что это происходит тогда и только тогда, когда оператор A взаимно однозначен.

Допустим, что оператор A взаимно однозначен и что $\sum c_i A_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Тогда $A\left(\sum c_i \mathbf{x}_i\right) = \mathbf{0}$, значит, $\sum c_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, значит, $c_1 = \ldots = c_n = 0$, и мы заключаем, что множество Q независимо.

Пусть, обратно, Q независимо и $A\left(\sum c_i \mathbf{x}_i\right) = \mathbf{0}$. Тогда $\sum c_i A\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, значит, $c_1 = \ldots = c_n = 0$, и мы заключаем: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Если теперь $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$, то $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = A\mathbf{x} - A\mathbf{y} = \mathbf{0}$, так что $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, и потому A взаимно однозначен.

9.6. Определение. (*a*). Пусть $L(X, Y)$ — множество всех линейных отображений векторного пространства X в векторное пространство Y. Вместо $L(X, X)$ мы будем писать просто $L(X)$. Если $A_1, A_2 \in L(X, Y)$ и если c_1, c_2 — числа, то определим отображение $c_1A_1 + c_2A_2$ равенством

$$(c_1A_1 + c_2A_2)\,\mathbf{x} = c_1A_1\mathbf{x} + c_2A_2\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in X).$$

Ясно, что тогда $c_1A_1 + c_2A_2 \in L(X, Y)$.

(*b*) Если X, Y, Z — векторные пространства, $A \in L(X, Y)$ и $B \in L(Y, Z)$, то мы определим *произведение* BA равенством

$$(BA)\,\mathbf{x} = B(A\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in X).$$

Тогда $BA \in L(X, Z)$.

---

[1]) Столь же часто этот термин употребляют применительно к линейным преобразованиям пространства X в отличное от него пространство Y. — *Прим. перев.*

Заметим, что, вообще говоря, $BA \neq AB$ даже в том случае, когда $X = Y = Z$.

(*c*) *Нормой* $\|A\|$ оператора $A \in L(R^n, R^m)$ называется верхняя грань множества всех чисел $|A\mathbf{x}|$, где $\mathbf{x}$ пробегает множество всех векторов пространства R^n, таких, что $|\mathbf{x}| \leqslant 1$.

Отметим, что неравенство

$$|A\mathbf{x}| \leqslant \|A\| \, |\mathbf{x}|$$

выполняется при всех $\mathbf{x} \in R^n$. Кроме того, если λ таково, что $|A\mathbf{x}| \leqslant \lambda |\mathbf{x}|$ при всех $\mathbf{x} \in R^n$, то $\|A\| \leqslant \lambda$.

9.7. Теорема. (*a*) *Если* $A \in L(R^n, R^m)$, *то* $\|A\| < \infty$ *и* A — *равномерно непрерывное отображение пространства* R^n *в пространство* R^m.

(*b*) *Если* A, $B \in L(R^n, R^m)$, *а* c — *число, то*

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \quad \|cA\| = |c| \, \|A\|.$$

Если расстояние между A *и* B *определить как* $\|A-B\|$, *то* $L(R^n, R^m)$ *становится метрическим пространством.*

(*c*) *Если* $A \in L(R^n, R^m)$ *и* $B \in L(R^m, R^k)$ *то*

$$\|BA\| \leqslant \|B\| \, \|A\|.$$

Доказательство. (*a*) Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — стандартный базис в R^n, и пусть $\mathbf{x} = \sum c_i \mathbf{e}_i$, $|\mathbf{x}| \leqslant 1$, так что $|c_i| \leqslant 1$ при $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$|A\mathbf{x}| = \left|\sum c_i A\mathbf{e}_i\right| \leqslant \sum |c_i| \, |A\mathbf{e}_i| \leqslant \sum |A\mathbf{e}_i|,$$

так что

$$\|A\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |A\mathbf{e}_i| < \infty.$$

Мы видим, что отображение A равномерно непрерывно, так как $|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}| \leqslant \|A\| \, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, если $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in R^n$.

Неравенство в (*b*) следует из того, что

$$|(A+B)\mathbf{x}| = |A\mathbf{x} + B\mathbf{x}| \leqslant |A\mathbf{x}| + |B\mathbf{x}| \leqslant (\|A\| + \|B\|) \, |\mathbf{x}|;$$

вторая часть утверждения (*b*) проверяется тем же способом. Если

$$A, \ B, \ C \in L(R^n, R^m),$$

то выполняется неравенство треугольника

$$\|A-C\| = \|(A-B) + (B-C)\| \leqslant \|A-B\| + \|B-C\|,$$

и легко проверить, что $\|A-B\|$ обладает остальными свойствами расстояния (определение 2.17).

Наконец, (*c*) следует из неравенства

$$|(BA)\mathbf{x}| = |B(A\mathbf{x})| \leqslant \|B\| \, |A\mathbf{x}| \leqslant \|B\| \, \|A\| \, |\mathbf{x}|.$$

Имея в пространстве $L(R^n, R^m)$ метрику, мы можем перенести на это пространство такие понятия, как непрерывность, открытое множество и т. д. Наша следующая теорема использует эти понятия.

9.8. Теорема. *Пусть Ω — множество всех обратимых линейных операторов на R^n.*

(*a*) *Если $A \in \Omega$, $\|A^{-1}\| < 1/\alpha$, $B \in L(R^n)$ и $\|B - A\| = \beta < \alpha$, то $B \in \Omega$.*

(*b*) *Ω — открытое подмножество пространства $L(R^n)$, и отображение $A \to A^{-1}$ непрерывно на Ω.* (Оно, очевидно, взаимно однозначно отображает множество Ω на себя и является обратным к самому себе.)

Доказательство. Из того что $|\mathbf{x}| = |A^{-1}A\mathbf{x}| \leqslant \alpha^{-1}|A\mathbf{x}|$ при всех $\mathbf{x} \in R^n$, следует, что

$$(\alpha - \beta)|\mathbf{x}| \leqslant |A\mathbf{x}| - \beta|\mathbf{x}| \leqslant |A\mathbf{x}| - |(B - A)\mathbf{x}| \leqslant |B\mathbf{x}|$$

при всех $\mathbf{x} \in R^n$. Это показывает, что оператор B взаимно однозначен, значит, $B \in \Omega$ по теореме 9.5. Но это верно при любом B, для которого $\|B - A\| < \alpha$; поэтому множество Ω открыто.

Заменяя в приведенном выше неравенстве $\mathbf{x}$ вектором $B^{-1}\mathbf{y}$, получим

$$(\alpha - \beta)|B^{-1}\mathbf{y}| \leqslant |BB^{-1}\mathbf{y}| = |\mathbf{y}|,$$

так что $\|B^{-1}\| \leqslant (\alpha - \beta)^{-1}$. Тождество

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}$$

и теорема 9.7 (*c*) показывают теперь, что

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \|B^{-1}\| \, \|A - B\| \, \|A^{-1}\| \leqslant \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta)},$$

и тем самым доказано утверждение о непрерывности, так как $\beta \to 0$ при $B \to A$.

9.9. Матрицы. Пусть $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ и $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ — базисы векторных пространств X и Y соответственно. Тогда любому преобразованию $A \in L(X, Y)$ соответствуют числа a_{ij}, такие, что

$$A\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{y}_i \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{1}$$

Удобно представлять себе эти числа расположенными в прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов, называемую матрицей:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Заметим, что координаты a_{ij} вектора $A\mathbf{x}_j$ (по отношению к базису $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$) находятся в j-м столбце матрицы $[A]$. Используя эту терминологию, можно сказать, что множество значений преобразования A натянуто на *векторы-столбцы* матрицы $[A]$.

Если $\mathbf{x}=\sum c_j\mathbf{x}_j$, то, в силу линейности преобразования A и равенства (1), получаем

$$A\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\Big)\mathbf{y}_i. \tag{2}$$

Таким образом, i-я координата вектора $A\mathbf{x}$ равна $\sum\limits_j a_{ij}c_j$. Заметим, что в (1) суммирование производится по первому индексу элемента a_{ij}, тогда как, вычисляя координаты, мы суммируем по второму индексу.

Пусть теперь дана матрица из m строк и n столбцов с вещественными элементами a_{ij}. Если отображение A определить равенством (2), то ясно, что $A\in L(X, Y)$ и что $[A]$ — исходная матрица. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между множеством $L(X, Y)$ и множеством всех вещественных матриц из m строк и n столбцов. Подчеркнем, однако, что $[A]$ зависит не только от A, но и от выбора базисов в X и в Y. Одно и то же преобразование A порождает различные матрицы, если менять базисы, и обратно. Мы не станем развивать эту мысль, так как мы обычно будем иметь дело с фиксированными базисами. (Некоторые замечания по этому поводу можно найти в п. 9.26.)

Если Z — третье векторное пространство с базисом $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_p\}$, если A задано равенством (1) и если

$$B\mathbf{y}_i=\sum_k b_{ki}\mathbf{z}_k, \qquad (BA)\,\mathbf{x}_j=\sum_k c_{kj}\mathbf{z}_k,$$

то

$$A\in L(X, Y), \quad B\in L(Y, Z), \quad BA\in L(X, Z),$$

и так как

$$B(A\mathbf{x}_j)=B\Big(\sum_i a_{ij}\mathbf{y}_i\Big)=\sum_i a_{ij}B\mathbf{y}_i=$$
$$=\sum_i a_{ij}\sum_k b_{ki}\mathbf{z}_k=\sum_k\Big(\sum_i b_{ki}a_{ij}\Big)\mathbf{z}_k,$$

то из независимости множества $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_p\}$ следует, что

$$c_{kj} = \sum_i b_{ki} a_{ij} \qquad (1 \leqslant k \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n). \tag{3}$$

Это показывает, как найти матрицу $[BA]$ из p строк и n столбцов, зная матрицы $[B]$ и $[A]$. Если мы определим произведение $[B][A]$ как $[BA]$, то равенство (3) описывает обычное правило перемножения матриц.

Наконец, допустим, что $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ и $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ — стандартные базисы пространств R^n и R^m и что A задано равенством (2). Неравенство Шварца показывает, что

$$|A\mathbf{x}|^2 = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} c_j\Big)^2 \leqslant \sum_i \Big(\sum_j a_{ij}^2 \sum_j c_j^2\Big) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 |\mathbf{x}|^2.$$

Таким образом,

$$\|A\| \leqslant \Big\{\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big\}^{1/2}. \tag{4}$$

Применяя (4) к $B-A$ вместо A, где A, $B \in L(R^n, R^m)$, мы видим, что если элементы матрицы a_{ij} — непрерывные функции некоторого параметра, то то же верно в отношении A. Точнее, если S — метрическое пространство, $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ — вещественные функции, непрерывные на S, и если при любом $p \in S$ A_p — линейное преобразование пространства R^n в пространство R^m, матрица которого составлена из элементов $a_{ij}(p)$, то отображение $p \to A_p$ — непрерывное отображение пространства S в пространство $L(R^n, R^m)$.

Дифференцирование

9.10. Определение. Пусть E — открытое множество в R^n, $\mathbf{f}$ — отображение множества E в пространство R^m и $\mathbf{x} \in E$.

Если существует линейное преобразование A пространства R^n в пространство R^m, такое, что

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0, \tag{5}$$

то говорят, что $\mathbf{f}$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x}$, и пишут

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A. \tag{6}$$

Если отображение $\mathbf{f}$ дифференцируемо в каждой точке $\mathbf{x} \in E$, то говорят, что $\mathbf{f}$ *дифференцируемо на множестве* E.

Следующие комментарии приводятся для разъяснения и мотивировки этого определения.

(*a*) В (5), конечно, имеется в виду, что $\mathbf{h} \in R^n$, а потому если норма $|\mathbf{h}|$ достаточно мала, то $\mathbf{x}+\mathbf{h} \in E$, так как E — открытое множество. Таким образом, $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})$ имеет смысл, $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \in R^m$,

и так как $A \in L(R^n, R^m)$, то $A\mathbf{h} \in R^m$. Таким образом,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\mathbf{h} \in R^m.$$

Норма, фигурирующая в числителе дроби (5), — это норма пространства R^m, а в знаменателе — R^n-норма вектора $\mathbf{h}$.

(*b*) В случае $n=1$ новое определение производной сводится к прежнему (см. определение 5.1 и п. 5.16). Производная $\mathbf{f}'(x)$ определялась как вектор $\mathbf{y} \in R^m$ (если только он существует), для которого

$$\lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x)}{h} - \mathbf{y} \right\} = 0. \tag{7}$$

Но всякому вектору $\mathbf{y} \in R^m$ можно (взаимно однозначно) сопоставить линейное преобразование $T_{\mathbf{y}}$ пространства R^1 в R^m по формуле $T_{\mathbf{y}}h = h\mathbf{y}$. Заметим, что *каждое* $T \in L(R^1, R^m)$ имеет вид $T = T_{\mathbf{y}}$ при некотором $\mathbf{y}$ (нужно просто взять $\mathbf{y} = T1$). При этом $|\mathbf{y}| = |T_{\mathbf{y}}|$.

(*c*) Пусть $\mathbf{f}$ и E — те же, что в определении 9.10, и пусть $\mathbf{f}$ дифференцируемо на E. При каждом фиксированном $\mathbf{x} \in E$ $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A$ есть линейное преобразование пространства R^n в R^m, т. е. функция, сопоставляющая каждому вектору $\mathbf{h} \in R^n$ вектор $\mathbf{f}'(x)\mathbf{h} = A\mathbf{h} \in R^m$. С другой стороны, поскольку отображение $\mathbf{f}$ дифференцируемо в каждой точке множества E, то каждой точке этого множества соответствует оператор $\mathbf{f}'(x) = A$. Тем самым дифференцируемое отображение $\mathbf{f}$ индуцирует отображение (функцию) $\mathbf{f}'$ на E со значениями в $L(R^n, R^m)$.

(*d*) Соотношение (5) можно переписать в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x})\,\mathbf{h} + \mathbf{r}(\mathbf{h}), \tag{8}$$

где остаток $\mathbf{r}(\mathbf{h})$ мал в том смысле, что

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{|\mathbf{r}(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = 0. \tag{9}$$

Можно истолковать (8) так: при фиксированном $\mathbf{x}$ и малом $\mathbf{h}$ разность

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

приближенно равна $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\,\mathbf{h}$, т. е. равна значению линейной функции в точке $\mathbf{h}$.

Достаточно взглянуть на равенство (8), чтобы убедиться в непрерывности отображения $\mathbf{f}$ в любой точке, в которой оно дифференцируемо.

(*e*) Производную, определенную в (5) или в (8), часто называют *полной производной* отображения $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}$, или *дифференциалом* отображения $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}$.

Теперь мы решим вопрос о единственности, который, возможно, уже возник у читателя.

9.11. Теорема. *Пусть E и $\mathbf{f}$ — те же, что в определении 9.10, $\mathbf{x} \in E$ и (5) выполняется с $A = A_1$ и с $A = A_2$, где $A_i \in L(R^n, R^m)$ $(i = 1, 2)$. Тогда $A_1 = A_2$.*

Доказательство. Если $B = A_1 - A_2$, то неравенство

$$|B\mathbf{h}| \leqslant |\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A_1\mathbf{h}| + |\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A_2\mathbf{h}|$$

показывает, что $|B\mathbf{h}|/|\mathbf{h}| \to 0$ при $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Отсюда следует, что при фиксированном $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$

$$\frac{|B(t\mathbf{h})|}{|t\mathbf{h}|} \to 0 \quad \text{при } t \to 0. \tag{10}$$

Ввиду того что B линейно, левая часть в (10) не зависит от t. Поэтому $B\mathbf{h} = \mathbf{0}$ при всех $\mathbf{h} \in R^n$. Теорема доказана.

Правило дифференцирования сложной функции (см. теорему 5.5) легко распространяется на данную ситуацию. И формулировка, и доказательство совершенно такие же, как в одномерном случае.

9.12. Теорема. *Пусть E — открытое множество в пространстве R^n, $\mathbf{f}$ — отображение множества E в пространство R^m, дифференцируемое в точке $\mathbf{x}_0 \in E$, $\mathbf{g}$ — отображение некоторого открытого множества, содержащего $\mathbf{f}(E)$, в пространство R^k, причем $\mathbf{g}$ дифференцируемо в точке $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Тогда отображение $\mathbf{F}$ множества E в пространство R^k, определенное равенством*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})),$$

дифференцируемо в точке $\mathbf{x}_0$, и

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0). \tag{11}$$

В правой части равенства (11) стоит произведение двух линейных преобразований, определенное в разделе 9.6.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, $A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$, $B = \mathbf{g}'(\mathbf{y}_0)$, и пусть

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) - B(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0),$$
$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - BA(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Мы должны доказать, что $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0) = BA$, т. е. что

$$\frac{|\mathbf{r}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \to 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0. \tag{12}$$

Из определений отображения $\mathbf{F}$ и остатка $\mathbf{r}$ имеем

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) - B(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0) + B(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)),$$

так что

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) + B\mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{13}$$

Если $\varepsilon > 0$, то из определения преобразований A и B следует, что существуют $\eta > 0$ и $\delta > 0$, такие, что

$$|\mathbf{v}(\mathbf{y})| \leqslant \varepsilon |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|,$$

если $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| < \eta$, и

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)| < \eta, \qquad |\mathbf{u}(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$$

при $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$. Значит,

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))| &\leqslant \varepsilon |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)| = \varepsilon |\mathbf{u}(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| + \varepsilon \|A\| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \end{aligned} \tag{14}$$

и

$$|B\mathbf{u}(\mathbf{x})| \leqslant \|B\| |\mathbf{u}(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon \|B\| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, \tag{15}$$

если $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$.

Теперь (12) следует из (13), (14) и (15).

9.13. Частные производные. Пусть $\mathbf{f}$ отображает открытое множество $E \subset R^n$ в пространство R^m и имеет компоненты $f_1, \ldots, f_m$, определенные в теореме 4.10. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — стандартный базис пространства R^n. Определим на множестве E функции $D_j f_i$ равенствами

$$D_j f_i(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x})}{t}, \tag{16}$$

если, конечно, этот предел существует. Записывая $f_i(\mathbf{x})$ в виде $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, мы видим, что $D_j f_i$ есть производная функции f_i по x_j при фиксированном значении остальных переменных. Поэтому часто используется обозначение

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \tag{17}$$

вместо $D_j f_i$.

Если отображение $\mathbf{f}$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x}$, то определение производной $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ показывает, что

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{t} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}. \tag{18}$$

Переходя к координатам векторов, стоящих в (18), с $\mathbf{h} = \mathbf{e}_j$, мы видим, что *если* $\mathbf{f}$ *дифференцируемо в точке* $\mathbf{x}$, *то все частные производные* $(D_j f_i)(\mathbf{x})$ *существуют.*

Обратное, вообще говоря, неверно даже в том случае, когда частные производные существуют во всех точках множества E (упражнение 9); если, однако, частные производные к тому же непрерывны, то обратное верно (см. теорему 9.16).

Отметим, что $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_j$ — это j-й столбец матрицы $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]$. Таким образом, $(D_j f_i)(\mathbf{x})$ находится в i-й строке и j-м столбце матрицы $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]$.

9.14. Пример. Пусть $\mathbf{f}$ — дифференцируемое отображение интервала $(a, b) \subset R^1$ в открытое множество $E \subset R^n$, пусть g — дифференцируемая вещественная функция, определенная в E (т. е. g — дифференцируемое отображение множества E в пространство R^1). Положим $h(t) = g(\mathbf{f}(t))$ при $a < t < b$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции,

$$h'(t) = g'(\mathbf{f}(t))\,\mathbf{f}'(t) \qquad (a < t < b).$$

Ясно, что $h'(t)$ — линейный оператор на R^1, так как $\mathbf{f}'(t) \in L(R^1, R^n)$ и $g'(\mathbf{f}(t)) \in L(R^n, R^1)$. Если рассматривать $h'(t)$ как вещественное число, то оператор, о котором идет речь, — это оператор умножения на $h'(t)$; ср. с 9.10 (b).

По отношению к стандартному базису пространства R^n $[\mathbf{f}'(t)]$ — это матрица из n строк и 1 столбца («одностолбцовая матрица»), в i-й строке которой стоит $f_i'(t)$, где $f_1, \ldots, f_n$ — компоненты отображения $\mathbf{f}$, и при каждом $\mathbf{x} \in E$ $[g'(\mathbf{x})]$ — матрица из 1 строки и n столбцов («однострочная матрица»), в j-м столбце которой стоит $(D_j g)(\mathbf{x})$. Значит, $[h'(t)]$ — матрица из одной строки и одного столбца, единственным элементом которой служит вещественное число

$$h'(t) = \sum_{i=1}^{n} (D_i g)(\mathbf{f}(t))\, f_i'(t).$$

Написанное равенство — часто встречающийся случай правила дифференцирования сложной функции.

9.15. Определение. Дифференцируемое отображение $\mathbf{f}$ открытого множества $E \subset R^n$ в пространство R^m называется *непрерывно дифференцируемым* на E, если $\mathbf{f}'$ — непрерывное отображение множества E в пространство $L(R^n, R^m)$.

Говоря более отчетливо, в этом определении требуется, чтобы для любого $\mathbf{x} \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существовало число $\delta > 0$, такое, что $\|\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\| < \varepsilon$, если $\mathbf{y} \in E$ и $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \delta$.

Если это выполняется, то мы будем говорить, что $\mathbf{f}$ является $\mathscr{C}'$-отображением на E или что $f \in \mathscr{C}'(E)$.

9.16. Теорема. *Пусть $\mathbf{f}$ отображает открытое множество $E \subset R^n$ в пространство R^m. Тогда $\mathbf{f} \in \mathscr{C}'(E)$ в том и только в том случае, когда частные производные $D_j f_i$ существуют и непрерывны на E при $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Доказательство. Если $\mathbf{f} \in \mathscr{C}'(E)$, то неравенство

$$|\mathbf{f}'(\mathbf{y})\,\mathbf{e}_j - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_j| \leqslant \|\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\|$$

в сочетании с (16) и (18) показывает, что каждая частная производная $D_j f_i$ — непрерывная функция на E.

Для доказательства обратного достаточно рассмотреть случай $m=1$ (почему?). Зафиксируем $\mathbf{x} \in E$ и $\varepsilon > 0$. Ввиду того что множество E открыто, существует открытый шар S с центром в точке $\mathbf{x}$ и радиусом r, целиком принадлежащий E. Из непрерывности функций $D_j f$ следует, что r можно выбрать столь малым, чтобы иметь

$$(19) \qquad |(D_j f)(\mathbf{y}) - (D_j f)(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{n} \qquad (\mathbf{y} \in S,\ 1 \leqslant j \leqslant n).$$

Пусть $\mathbf{h} = \sum h_j \mathbf{e}_j$, $|\mathbf{h}| < r$, пусть $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ и $\mathbf{v}_k = h_1\mathbf{e}_1 + \ldots + h_k\mathbf{e}_k$ при $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда

$$(20) \qquad f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} [f(\mathbf{x}+\mathbf{v}_j) - f(\mathbf{x}+\mathbf{v}_{j-1})].$$

Ввиду того что $|\mathbf{v}_k| < r$ при $1 \leqslant k \leqslant n$, а множество S выпукло, отрезки с концами $\mathbf{x}+\mathbf{v}_{j-1}$ и $\mathbf{x}+\mathbf{v}_j$ лежат в S. Поскольку $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{j-1} + h_j\mathbf{e}_j$, то по теореме 5.10 о среднем значении j-е слагаемое в (20) равно

$$(21) \qquad h_j (D_j f)(\mathbf{x}+\mathbf{v}_{j-1}+\theta_j h_j \mathbf{e}_j)$$

при некотором $\theta_j \in (0,1)$, и потому оно в силу (19) отличается от $h_j (D_j f)(\mathbf{x})$ менее, чем на $|h_j|\varepsilon/n$. Согласно (20), отсюда следует, что

$$\left| f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{n} h_j (D_j f)(\mathbf{x}) \right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |h_j|\varepsilon \leqslant |\mathbf{h}|\varepsilon$$

при всех $\mathbf{h}$, таких, что $|\mathbf{h}| < r$.

Это означает, что функция f дифференцируема в точке $\mathbf{x}$ и что $f'(\mathbf{x})$ — линейная функция, которая ставит в соответствие число $\sum h_j (D_j f)(\mathbf{x})$ вектору $\mathbf{h} = \sum h_j \mathbf{e}_j$. Матрица $[f'(\mathbf{x})]$ состоит из строки $(D_1 f)(\mathbf{x}), \ldots, (D_n f)(\mathbf{x})$, а так как функции $D_1 f, \ldots, D_n f$ непрерывны на E, то, как показывает заключительное замечание п. 9.9, $f \in \mathscr{C}'(E)$.

Теорема об обратной функции

Эта теорема утверждает, грубо говоря, что непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{f}$ обратимо в окрестности любой точки $\mathbf{x}$, в которой обратимо линейное преобразование $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$.

9.17. Теорема. *Пусть* $\mathbf{f}$ *есть* $\mathscr{C}'$*-отображение открытого множества* $E \subset R^n$ *в пространство* R^n, *пусть отображение* $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ *обратимо при некотором* $\mathbf{a} \in E$, *и пусть* $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. *Тогда*

(*a*) *существуют открытые множества* U *и* V *в пространстве* R^n, *такие, что* $\mathbf{a} \in U$, $\mathbf{b} \in V$, $\mathbf{f}$ *взаимно однозначно на* U *и* $\mathbf{f}(U) = V$;

(*b*) *если* $\mathbf{g}$ — *отображение, обратное к* $\mathbf{f}$ [*оно существует согласно* (*a*)], *заданное в* V *равенством*

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in V),$$

то $\mathbf{g} \in \mathscr{C}'(V)$.

Записывая равенство $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ с помощью компонент, мы приходим к следующей интерпретации заключения теоремы: равенства

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

определяют взаимно однозначное соответствие между достаточно малыми окрестностями точек $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; при этом $x_1, \ldots, x_n$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями от $y_1, \ldots, y_n$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = A$. Выберем λ так, чтобы $4\lambda \| A^{-1} \| = 1$. Ввиду того что $\mathbf{f} \in \mathscr{C}'(E)$, существует такой открытый шар U с центром в точке $\mathbf{a}$, что

$$\| \mathbf{f}'(\mathbf{x}) - A \| < 2\lambda \qquad (\mathbf{x} \in U). \tag{22}$$

Допустим, что $\mathbf{x} \in U$ и $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in U$. Положим

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) - tA\mathbf{h} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Вследствие выпуклости множества U, $\mathbf{x} + t\mathbf{h} \in U$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, и из (22) следует, что

$$|\mathbf{F}'(t)| = |\mathbf{f}'(\mathbf{x} + t\mathbf{h})\mathbf{h} - A\mathbf{h}| \leqslant 2\lambda |\mathbf{h}| \leqslant \frac{1}{2} |A\mathbf{h}|.$$

Последнее неравенство выполняется потому, что

$$2\lambda |\mathbf{h}| = 2\lambda |A^{-1}A\mathbf{h}| \leqslant 2\lambda \| A^{-1} \| \, |A\mathbf{h}| = \frac{1}{2} |A\mathbf{h}|,$$

в силу выбора числа λ. Из теоремы 5.20 следует теперь, что

$$|\mathbf{F}(1) - \mathbf{F}(0)| \leqslant \frac{1}{2} |A\mathbf{h}|,$$

или

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\mathbf{h}| \leqslant \frac{1}{2} |A\mathbf{h}|. \tag{23}$$

Отсюда следует, что

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})| > \frac{1}{2} |A\mathbf{h}| \geqslant 2\lambda |\mathbf{h}|. \tag{24}$$

Подчеркнем, что неравенства (23) и (24) выполняются, если только $\mathbf{x} \in U$ и $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in U$. В частности, из (24) следует, что *отображение* $\mathbf{f}$ *взаимно однозначно на* U.

Зафиксируем $\mathbf{x}_0 \in U$ и рассмотрим открытый шар S с центром в точке $\mathbf{x}_0$ радиуса $r > 0$, замыкание которого $\overline{S}$ лежит в U. Мы докажем, что $\mathbf{f}(S)$ содержит открытый шар с центром в точке $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ радиуса λr.

Чтобы сделать это, зафиксируем такой вектор $\mathbf{y}$, что $|\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)| < \lambda r$, и положим

$$\varphi(\mathbf{x}) = |\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x})| \qquad (\mathbf{x} \in \overline{S}).$$

Если $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = r$, то, как показывает (24),

$$2\lambda r \leqslant |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)| \leqslant \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}_0) < \varphi(\mathbf{x}) + \lambda r.$$

Таким образом,

$$\varphi(\mathbf{x}_0) < \lambda r < \varphi(\mathbf{x}) \qquad (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = r) \tag{25}$$

Ввиду того что φ — непрерывная функция, а $\overline{S}$ — компактное множество, существует $\mathbf{x}^* \in \overline{S}$, такой, что $\varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \varphi(\mathbf{x})$ при всех $\mathbf{x} \in \overline{S}$. Согласно (25), $\mathbf{x}^* \in S$.

Положим $\mathbf{w} = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$. Поскольку A обратим, существует вектор $\mathbf{h} \in R^n$, такой, что $A\mathbf{h} = \mathbf{w}$. Выберем число $t \in (0, 1)$, столь малое, что $\mathbf{x}^* + t\mathbf{h} \in S$. Тогда

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y} + At\mathbf{h}| = (1 - t)|\mathbf{w}|, \tag{26}$$

и, как показывает (23),

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) - At\mathbf{h}| \leqslant \frac{1}{2}|t\mathbf{w}|. \tag{27}$$

Поскольку $\varphi(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h})$ — норма суммы векторов, фигурирующих в левых частях равенства (26) и неравенства (27), и так как $|\mathbf{w}| = \varphi(\mathbf{x}^*)$, то

$$\varphi(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h}) \leqslant \left(1 - \frac{t}{2}\right)\varphi(\mathbf{x}^*). \tag{28}$$

Таким образом, $\varphi(\mathbf{x}^*) = 0$, т. е. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{y}$ [1]).

Тем самым доказано, что каждая точка множества $\mathbf{f}(U)$ имеет окрестность, содержащуюся в $\mathbf{f}(U)$. Поэтому $\mathbf{f}(U)$ — открытое подмножество пространства R^n. Полагая $V = \mathbf{f}(U)$, мы видим, что утверждение (a) теоремы доказано.

Чтобы доказать (b), выберем $\mathbf{y} \in V$, $\mathbf{y} + \mathbf{k} \in V$ и положим $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$,

$$\mathbf{h} = \mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}).$$

---

[1]) Эту часть доказательства можно еще немного сократить. Действительно, функция $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = |\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ достигает минимума в точке $\mathbf{x}^*$, принадлежащей S. Поэтому частные производные функции $\tilde{\varphi}(\mathbf{x})$ в этой точке обращаются в нуль. Отсюда следует, что $B(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)) = 0$, где $B \in L(R^n, R^n)$, $[B]$ — матрица, транспонированная к $[\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)]$ и потому обратимая. Значит, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$. — *Прим. перев.*

Согласно теореме 9.8 (a), неравенству (22) и нашему выбору числа λ, оператор $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ имеет обратный, который мы обозначим через B. Применяя B к равенству

$$\mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\,\mathbf{h} + \mathbf{r}(\mathbf{h}),$$

где $|\mathbf{r}(\mathbf{h})|/|\mathbf{h}| \to 0$ при $\mathbf{h} \to 0$, мы получим $B\mathbf{k} = \mathbf{h} + B\mathbf{r}(h)$, или

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}+\mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) = B\mathbf{k} - B(\mathbf{r}(\mathbf{h})). \tag{29}$$

Согласно (24), $2\lambda|\mathbf{h}| \leqslant |\mathbf{k}|$. Таким образом, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ при $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$ (что одновременно доказывает непрерывность отображения $\mathbf{g}$ в точке $\mathbf{y}$) и

$$\frac{|B(\mathbf{r}(\mathbf{h}))|}{|\mathbf{k}|} \leqslant \frac{\|B\|}{2\lambda}\,\frac{|\mathbf{r}(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} \to 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{k} \to \mathbf{0}. \tag{30}$$

Сравнение (30) и (29) показывает, что $\mathbf{g}$ дифференцируемо в точке $\mathbf{y}$ и что $\mathbf{g}'(\mathbf{y}) = B$. Иными словами,

$$\mathbf{g}'(\mathbf{y}) = \{\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{y}))\}^{-1} \qquad (\mathbf{y} \in V). \tag{31}$$

Кроме того, $\mathbf{g}$ — непрерывное отображение множества V на U, $\mathbf{f}'$ — непрерывное отображение множества U в множество Ω всех обратимых элементов множества $L(R^n)$, а переход к обратному — непрерывное отображение множества Ω на множество Ω [по теореме 9.8 (b)]. Используя эти факты и равенство (31), мы получаем, что $\mathbf{g} \in \mathscr{C}'(V)$.

Теорема доказана.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из теоремы [часть (a)]:

Следствие. *Если* $\mathbf{f}$ *есть* $\mathscr{C}'$*-отображение открытого множества* $E \subset R^n$ *в пространство* R^n *и если оператор* $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ *обратим при любом* $\mathbf{x} \in E$, *то* $\mathbf{f}(W)$ — *открытое подмножество пространства* R^n, *каково бы ни было открытое множество* $W \subset E$.

Иными словами, $\mathbf{f}$ — *открытое отображение* множества E в пространство R^n.

Предположения, сделанные в этом следствии, обеспечивают для каждой точки $\mathbf{x} \in E$ существование такой окрестности, на которой отображение $\mathbf{f}$ взаимно однозначно. Можно сказать, что $\mathbf{f}$ *локально* взаимно однозначно. Однако $\mathbf{f}$ не обязано при этом быть взаимно однозначным на всем множестве E. Пример приведен в упражнении 12.

Теорема о неявной функции

Если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in R^m$, то через $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ мы будем обозначать точку (или вектор)

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in R^{n+m}.$$

В этом разделе первый элемент в $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или в подобном символе всегда будет обозначать вектор пространства R^n, а второй — вектор пространства R^m.

Пусть $A \in L(R^{n+m}, R^n)$, и пусть

$$A(\mathbf{h}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ эквивалентно } \mathbf{h} = \mathbf{0}. \tag{32}$$

Заметим, что по теореме 9.5 отображение $\mathbf{h} \to A(\mathbf{h}, \mathbf{0})$ есть линейное взаимно однозначное отображение R^n *на* себя. Далее, при всяком $\mathbf{k} \in R^m$ и $\mathbf{b} \in R^n$ уравнение $A(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \mathbf{b}$ имеет единственное решение. Действительно, существует такое $\mathbf{x}$, что $A(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{b} - A(\mathbf{0}, \mathbf{k})$, т. е. $A(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \mathbf{b}$, а если $A(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}) = A(\mathbf{x}_2, \mathbf{k})$, то $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и, в силу (32), $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

В частности, *если A удовлетворяет условию* (32), *то уравнение*

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \tag{33}$$

имеет при каждом $\mathbf{y} \in R^m$ одно и только одно решение $\mathbf{x} \in R^n$.

Теорема о неявной функции утверждает, что подобное заключение справедливо и в отношении некоторых (не обязательно линейных) непрерывно дифференцируемых отображений. Прежде чем сформулировать ее, заметим, что если $[A]$ — матрица (из n строк и $n+m$ столбцов) отображения A по отношению к стандартным базисам, то (32) означает в точности, что *векторы, стоящие в первых n столбцах матрицы* $[A]$, линейно независимы. Пользуясь этим критерием, можно проверять, выполняется ли (32).

9.18. Теорема. *Пусть $\mathbf{f}$ есть $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E \subset R^{n+m}$ в пространство R^n. Допустим, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E$, $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, $A = \mathbf{f}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и A удовлетворяет условию* (32). *Тогда существуют окрестность W точки $\mathbf{b}$ $(W \subset R^m)$ и единственная функция $\mathbf{g} \in \mathscr{C}'(W)$ со значениями в R^n, такие, что $\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$ и*

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{y} \in W). \tag{34}$$

Функция $\mathbf{g}$ определена неявно равенством (34), отсюда и название теоремы. Ее можно сформулировать в терминах, относящихся к системе n уравнений с $n+m$ неизвестными:

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ &\vdots \\ &f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Наше предположение об A теперь означает, что квадратная матрица из n строк и n столбцов, такая, что на пересечении ее i-й строки и j-го столбца стоит $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, имеет независимые столбцы. Если это выполняется и если $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ удовлетворяют

уравнению (35), то (35) можно разрешить относительно $x_1, \ldots, x_n$ при каждом $\mathbf{y}$, достаточно близком к $\mathbf{b}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{F}$ — отображение, ставящее в соответствие точке $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E$ точку $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in R^{n+m}$, определенную равенством

$$\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{w} = \mathbf{y}. \tag{36}$$

Тогда $\mathbf{F} \in \mathscr{C}'(E)$. Поскольку $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, то

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}, \mathbf{b} + \mathbf{k}) = A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) + \mathbf{r}(\mathbf{h}, \mathbf{k}),$$

где $\mathbf{r}$ — остаток, участвующий в определении $\mathbf{f}'$. Из того что

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{h}, \mathbf{b} + \mathbf{k}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{f}((\mathbf{a} + \mathbf{h}), \mathbf{b} + \mathbf{k}), \mathbf{k}),$$

следует, что $\mathbf{F}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — линейный оператор на R^{n+m}, который вектору $(\mathbf{h}, \mathbf{k})$ ставит в соответствие вектор $(A(\mathbf{h}, \mathbf{k}), \mathbf{k})$. Если при таком отображении образ какого-нибудь вектора равен нулю, то $A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, а потому $A(\mathbf{h}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и из (32) следует, что $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Это значит, что оператор $\mathbf{F}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ взаимно однозначен и, следовательно, обратим (теорема 9.5).

Поэтому к $\mathbf{F}$ применима теорема об обратной функции: существуют открытые множества U и V в R^{n+m}, содержащие $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $(\mathbf{0}, \mathbf{b})$ и такие, что $\mathbf{F}$ взаимно однозначно отображает U на V; согласно (36), отображение, обратное к $\mathbf{F}$, имеет вид

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{w} \qquad ((\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in V), \tag{37}$$

где $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}'(V)$. Иными словами,

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}, \mathbf{w}), \mathbf{w}) = \mathbf{z} \qquad ((\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in V). \tag{38}$$

Если мы теперь обозначим через W такую окрестность точки $\mathbf{b}$, что $(\mathbf{0}, \mathbf{w}) \in V$ при $\mathbf{w} \in W$, и положим $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}, \mathbf{y})$ при $\mathbf{y} \in W$, то при $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ в (38) мы получим (34).

Ясно, что $\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$, так как $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}$. Единственность функции $\mathbf{g}$ следует из того, что отображение $\mathbf{F}$ взаимно однозначно: если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U$, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \in U$, а $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$, то $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$, а потому $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$.

Теорема о ранге

Назовем *рангом* линейного преобразования размерность его множества значений. Следующая теорема служит подготовительной к теореме 9.20.

9.19. Теорема. *Пусть p, q, r — неотрицательные целые числа, X и Y — векторные пространства, $\dim X = r + p$, $\dim Y = r + q$, A — линейное преобразование пространства X в пространство Y ранга r. Тогда существуют векторные пространства X_1,*

X_2, содержащиеся в X, и пространства Y_1, Y_2, содержащиеся в Y, такие, что

(*a*) *каждый* $\mathbf{x} \in X$ *единственным образом представим в виде* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, *где* $\mathbf{x}_1 \in X_1$, $\mathbf{x}_2 \in X_2$;

(*b*) *каждый* $\mathbf{y} \in Y$ *единственным образом представим в виде* $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, *где* $\mathbf{y}_1 \in Y_1$, $\mathbf{y}_2 \in Y_2$;

(*c*) $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ *при каждом* $\mathbf{x}_2 \in X_2$;

(*d*) *сужение преобразования A на X_1 — взаимно однозначное отображение пространства X_1 на пространство Y_1*;

(*e*) $\dim X_1 = \dim Y_1 = r$.

Доказательство. По теореме 9.3 (*c*) пространство Y имеет базис $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r+q}\}$, такой, что $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ — базис множества значений Y_1 преобразования A. Пусть Y_2 — оболочка множества $\{\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_{r+q}\}$. (Заметим, что если $q = 0$, то Y_2 состоит из одного лишь нулевого вектора. Некоторые утверждения, высказанные в ходе этого доказательства и в теореме 9.20, должны быть истолкованы аналогично, если одно или более из чисел p, q, r равны нулю. Мы предоставляем читателю подправить эти утверждения и истолковать их.)

Выберем векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \in X$, такие, что $A\mathbf{u}_j = \mathbf{v}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Тогда $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ — независимое множество; натянем на него пространство X_1. Пусть X_2 — множество всех $\mathbf{x} \in X$, таких, что $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ясно, что утверждения от (*b*) до (*e*) выполняются. Если $\mathbf{x} \in X$, то $A\mathbf{x} = \sum_1^r c_j \mathbf{v}_j$, где $c_1, \ldots, c_r$ — некоторые числа. Положим $\mathbf{x}_1 = \sum_1^r c_j \mathbf{u}_j$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$. Тогда $\mathbf{x}_1 \in X_1$, $A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}$; значит, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, или $\mathbf{x}_2 \in X_2$. Согласно (*c*) и (*d*), X_1 и X_2 имеют только один общий вектор — нулевой. Поэтому представление $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ единственно, и (*a*) доказано.

Следующая теорема еще раз иллюстрирует общий принцип, состоящий в том, что непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{F}$ вблизи точки $\mathbf{x}$ ведет себя примерно так же, как линейное преобразование $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$.

9.20. Теорема. *Пусть $X = R^{r+p}$, $Y = R^{r+q}$, $\mathbf{F}$ есть $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E \subset X$ в пространство Y и $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ — линейное преобразование ранга r при любом $\mathbf{x} \in E$.*

Зафиксируем точку $\mathbf{a} \in E$, положим $A = \mathbf{F}'(\mathbf{a})$, выберем X_1, X_2, Y_1, Y_2, как в теореме 9.19, и определим $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ равенством

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in E), \tag{39}$$

где $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \in Y_1$, $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) \in Y_2$.

Тогда существует открытое множество U в пространстве X, такое, что $\mathbf{a} \in U$, $U \subset E$ *и*

(*a*) $\mathbf{F}_1(U)$ — *открытое множество в* Y_1;

(*b*) *для любого* $\mathbf{y} \in \mathbf{F}_1(U)$ *существует ровно один* $\mathbf{y}_2 \in Y_2$, *такой, что*

$$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in \mathbf{F}(U).$$

Геометрический смысл утверждения (*b*) таков: $\mathbf{F}(U)$ — это «r-мерная поверхность» в Y, причем «над» каждой точкой множества $\mathbf{F}_1(U)$ лежит ровно одна точка этой поверхности. Мы советуем читателю набросать чертеж для случаев, когда числа p, q, r принимают одно из значений 0, 1, 2.

Доказательство. Пусть T — сужение отображения A на X_1. Согласно 9.19 (*d*), T — линейное взаимно однозначное преобразование пространства X_1 на Y_1, а обратное преобразование T^{-1} отображает Y_1 на X_1. Пусть P — линейный оператор на X, определенный так: $P\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1 \in X_1$, $\mathbf{x}_2 \in X_2$ (такого рода оператор называют *проектором*), и пусть

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = T^{-1}\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + P\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in E). \tag{40}$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции,

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = T^{-1}\mathbf{F}_1'(\mathbf{a}) + P. \tag{41}$$

При $i = 1, 2$ множество значений отображения $\mathbf{F}_i$ содержится в Y_i. Поскольку Y_i — замкнутое подпространство пространства Y, то из (18) ясно что $\mathbf{F}_i'(\mathbf{a})\mathbf{h} \in Y_i$ при всех $\mathbf{h} \in X$. Согласно (39), $A = \mathbf{F}_1'(\mathbf{a}) + \mathbf{F}_2'(\mathbf{a})$; а так как множество значений отображения A совпадает с Y_1, то, по теореме 9.19 (*b*), $A = \mathbf{F}_1'(\mathbf{a})$, и 9.19 (*c*) показывает, что $A\mathbf{h} = A\mathbf{h}_1$, если $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_1 \in X_1$, $\mathbf{h}_2 \in X_2$. Таким образом,

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{h} = T^{-1}A\mathbf{h} + P\mathbf{h} = T^{-1}A\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}.$$

Это значит, что $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ — тождественное отображение на X. Поэтому из теоремы об обратной функции следует, что существуют открытые множества U и V в X, такие, что $\mathbf{a} \in U$, $U \subset E$ и $\mathbf{f}$ — взаимно однозначное отображение множества U на V. Более того (заменяя, если потребуется, U и V надлежащими множествами), можно добиться, чтобы V было выпуклым. Пусть $\mathbf{g}$ — отображение множества V на U, обратное к $\mathbf{f}$. Положим

$$\Phi(\mathbf{z}) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{z})) \qquad (\mathbf{z} \in V). \tag{42}$$

Из того, что $AP = 0$, следует, что $A\mathbf{f} = AT^{-1}\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1$, так что

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{g}(\mathbf{z})) = A\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{z})) = A\mathbf{z} = A\mathbf{z}_1.$$

Таким образом,

(43) $$\mathbf{\Phi}(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}_1 + \varphi(\mathbf{z}) \qquad (\mathbf{z} \in V),$$

где $\varphi(\mathbf{z}) \in Y_2$, $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_1 \in X_1$, $\mathbf{z}_2 \in X_2$.

Согласно (42) и (43), $\mathbf{F}_1(U)$ — это множество всех точек $A\mathbf{z}_1$, где $\mathbf{z} \in V$. Поскольку V открыто, а Y_1 — множество значений отображения A, то утверждение (a) теоремы доказано.

Чтобы доказать (b), достаточно проверить, что $\mathbf{\Phi}(\mathbf{z})$ зависит только от $\mathbf{z}_1$.

Зафиксируем $\mathbf{z} \in V$. Согласно (42) и (43),

(44) $$\mathbf{\Phi}'(\mathbf{z}) = \mathbf{F}'(\mathbf{g}(\mathbf{z}))\,\mathbf{g}'(\mathbf{z}) = A + \varphi'(\mathbf{z}).$$

Ввиду того что $\mathbf{g}'(\mathbf{z})$ — обратимый линейный оператор на X, а $\mathbf{F}'(\mathbf{g}(\mathbf{z}))$ — отображение ранга r, множество значений R отображения $\mathbf{\Phi}'(\mathbf{z})$ — векторное пространство размерности r. Пусть Q — проектор пространства Y на пространство Y_1. Поскольку множество значений отображения $\varphi'(\mathbf{z})$ содержится в Y_2, то (44) показывает, что $A = Q\mathbf{\Phi}'(\mathbf{z})$. Таким образом, Q отображает пространство R на Y_1, а так как размерность обоих этих пространств равна r, то Q взаимно однозначно на R. Таким образом,

(45) из $A\mathbf{h} = \mathbf{0}$ следует, что $\mathbf{\Phi}'(\mathbf{z})\,\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

Если теперь $\mathbf{z} \in V$, $\mathbf{z} + \mathbf{h}_2 \in V$, $\mathbf{h}_2 \in X_2$, то положим

(46) $$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{z} + t\mathbf{h}_2) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Поскольку V выпукло, это определение имеет смысл, а так как $A\mathbf{h}_2 = 0$, то из (45) и (46) следует, что

(47) $$\mathbf{\Lambda}'(t) = \mathbf{\Phi}'(\mathbf{z} + t\mathbf{h}_2)\,\mathbf{h}_2 = \mathbf{0} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Таким образом, $\mathbf{\Lambda}(1) = \mathbf{\Lambda}(0)$, так что $\mathbf{\Phi}(\mathbf{z} + \mathbf{h}_2) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{z})$ и (b) установлено.

Теорема о разложении

Пусть $\mathbf{f}$ — отображение открытого множества $E \subset R^n$ в пространство R^n, и пусть существует такое целое j, что $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}$ при всех $i \neq j$, $\mathbf{x} \in E$. Таким образом, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ имеют равные i-е координаты при $i \neq j$, т. е. отображение $\mathbf{f}$ может изменять только j-ю координату. Мы будем называть такие отображения *простыми*.

9.21. Теорема. *Пусть $\mathbf{f}$ есть $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E \subset R^n$ в пространство R^n, $\mathbf{0} \in E$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, а $\mathbf{f}'(\mathbf{0})$ — обратимое преобразование. Тогда существует такая окрестность нуля в R^n, в которой имеет место представление*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_n(B_n(\mathbf{g}_{n-1}(\ldots(\mathbf{g}_1(B_1\mathbf{x}))).$$

Здесь каждое $\mathbf{g}_k$ — *простое* $\mathscr{C}'$-*отображение некоторой окрестности точки* $\mathbf{0}$, $\mathbf{g}_k(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, *а каждое* B_k — *линейное отображение на* R^n, *причем либо тождественное, либо меняющее местами какую-нибудь одну пару координат.*

Доказательство. Положим $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1$, и пусть $1 \leqslant m \leqslant n$. Примем следующее индуктивное предположение (очевидно, справедливое при $m = 1$): $\mathbf{f}_m$ отображает окрестность точки $\mathbf{0}$ пространства R^n в пространство R^n, $\mathbf{f}_m$ — отображение класса $\mathscr{C}'$, преобразование $A_m = \mathbf{f}'_m(\mathbf{0})$ обратимо и

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} \qquad (1 \leqslant i < m). \tag{48}$$

Положим $\alpha_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot A_m \mathbf{e}_j$. Из (48) следует, что $\alpha_{ij} = 0$, если $i < m$ и $j \geqslant m$. Если бы, кроме того, при всех $j \geqslant m$ выполнялось равенство $\alpha_{mj} = 0$, то из представления $A_m \mathbf{e}_j = \sum_i \alpha_{ij} \mathbf{e}_i$ следовало бы, что $n + m - 1$ независимых векторов $A_m \mathbf{e}_m, \ldots, A_m \mathbf{e}_n$ принадлежат оболочке $n - m$ векторов $\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$, вопреки теореме 9.2.

Таким образом, существует такое j, что $m \leqslant j \leqslant n$ и $\alpha_{mj} \neq 0$.

Определим операторы P_m, $B_m \in L(R^n)$ равенствами: $P_m \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$, если $i \neq m$, $P_m \mathbf{e}_m = 0$; $B_m \mathbf{e}_m = \mathbf{e}_j$, $B_m \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_m$, $B_m \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$ для всех прочих i. Положим

$$\mathbf{g}_m(\mathbf{x}) = P_m \mathbf{x} + \{\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{f}_m(B_m \mathbf{x})\} \mathbf{e}_m. \tag{49}$$

Тогда $\mathbf{g}_m$, очевидно, простое отображение. Поскольку $(\mathbf{f}_m B_m)'(\mathbf{0}) = A_m B_m$, то

$$\mathbf{g}'_m(\mathbf{0})\,\mathbf{h} = P_m \mathbf{h} + \{\mathbf{e}_m \cdot A_m B_m \mathbf{h}\} \mathbf{e}_m \qquad (\mathbf{h} \in R^n). \tag{50}$$

Если $\mathbf{g}'_m(\mathbf{0})\,\mathbf{h} = \mathbf{0}$, то, как показывает (50), $P_m \mathbf{h} = \mathbf{0}$, так что $\mathbf{h} = \lambda \mathbf{e}_m$. Но, кроме того, $\mathbf{e}_m \cdot A_m B_m \mathbf{h} = 0$, т. е. $\lambda \alpha_{mj} = 0$ по определению B_m. Поскольку $\alpha_{mj} \neq 0$, мы видим, что $\lambda = 0$, значит, $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

Тем самым доказано, что $\mathbf{g}'_m(\mathbf{0})$ — взаимно однозначное отображение. Стало быть, оно обратимо, и из теоремы об обратном отображении следует, что $\mathbf{g}_m$ взаимно однозначно в некоторой окрестности U_m точки $\mathbf{0}$ и что $\mathbf{g}_m(U_m) = V_m$ — открытое множество в R^n. Положим

$$\mathbf{f}_{m+1}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}_m(B_m \mathbf{g}_m^{-1}(\mathbf{y})) \qquad (\mathbf{y} \in V_m). \tag{51}$$

Если $\mathbf{y} \in V_m$, $\mathbf{y} = \mathbf{g}_m(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in U_m$, то, как показывает (49),

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{y} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{f}_m(B_m \mathbf{x}), \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{y} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} \qquad (i < m). \tag{52}$$

Теперь из (48) и определения B_m следует, что

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{f}_{m+1}(\mathbf{y}) = \mathbf{e}_i \cdot B_m \mathbf{x} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{y},$$

если $i < m$; из (52), кроме того, следует, что

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{f}_{m+1}(\mathbf{y}) = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{f}_m(B_m\mathbf{x}) = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{y}.$$

Следовательно, $\mathbf{f}_{m+1}$ удовлетворяет предположению индукции с $m+1$ вместо m, и построение можно продолжить. Переписывая (51) в виде

$$\mathbf{f}_m(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{m+1}(\mathbf{g}_m(B_m\mathbf{x})) \tag{53}$$

при $m = 1, \ldots, n$ и замечая, что $\mathbf{f}_{n+1}$ — тождественное отображение, мы получаем

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_2(\mathbf{g}_1(B_1\mathbf{x})) = \mathbf{f}_3(\mathbf{g}_2(B_2\mathbf{g}_1(B_1\mathbf{x})) = \ldots,$$

что и составляет нужное заключение.

Определители

9.22. Определение. Если $(j_1, \ldots, j_n)$ — упорядоченный набор целых чисел, то положим

$$s(j_1, \ldots, j_n) = \prod_{p>q} \operatorname{sgn}(j_q - j_p), \tag{54}$$

где $\operatorname{sgn} x = 1$, если $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = -1$, если $x < 0$, $\operatorname{sgn} x = 0$, если $x = 0$. Тогда $s(j_1, \ldots, j_n) = 1$, -1 или 0 и меняет знак, если какие-нибудь два из чисел j меняются местами.

Пусть $[A]$ — матрица линейного оператора A на R^n по отношению к стандартному базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$; на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $[A]$ стоит число $a(i, j)$. *Определителем* матрицы $[A]$ называется число

$$\det[A] = \sum s(j_1, \ldots, j_n)\, a(1, j_1)\, a(2, j_2) \ldots a(n, j_n). \tag{55}$$

Суммирование в (55) производится по всем упорядоченным наборам целых чисел $(j_1, \ldots, j_n)$, таким, что $1 \leqslant j_r \leqslant n$.

Векторы, которые служат столбцами матрицы $[A]$, таковы:

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{n} a(i, j)\, \mathbf{e}_i \qquad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{56}$$

Удобно представлять себе $\det[A]$ как функцию столбцов матрицы $[A]$. Если мы запишем

$$\det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \det[A],$$

то теперь det — вещественная функция, определенная на множестве всех упорядоченных наборов, состоящих из n векторов пространства R^n.

9.23. Теорема. (*a*) *Если* I — *тождественный оператор на* R^n, *то*

$$\det[I] = \det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

(*b*) det — *линейная функция по каждому из столбцов* $\mathbf{x}_j$, *если остальные фиксированы.*

(*c*) *Если* $[A]_1$ *получается из* $[A]$ *перестановкой двух столбцов, то* $\det[A]_1 = -\det[A]$.

(*d*) *Если матрица* $[A]$ *имеет два равных столбца, то* $\det[A] = 0$.

Доказательство. Если $A = I$, то $a(i, i) = 1$, $a(i, j) = 0$ при $i \neq j$. Значит,

$$\det[I] = s(1, 2, \ldots, n) = 1,$$

и (*a*) доказано. Согласно (54), $s(j_1, \ldots, j_n) = 0$, если какие-нибудь два из чисел j равны. Каждое из $n!$ остальных произведений, участвующих в (55), содержит ровно по одному множителю из каждого столбца. Тем самым доказано (*b*). Утверждение (*c*) немедленно следует из того, что $s(j_1, \ldots, j_n)$ меняет знак, если какие-нибудь два из чисел j равны, а (*d*) следует из (*c*).

9.24. Теорема. *Пусть* $[A]$ *и* $[B]$ — *матрицы операторов, действующих в* R^n. *Тогда* $\det([B][A]) = \det[B] \cdot \det[A]$.

Доказательство. Если $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ — столбцы матрицы $[A]$, то положим

$$\Delta_B(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \Delta_B[A] = \det([B][A]). \tag{57}$$

Столбцы матрицы $[B][A]$ — это векторы $B\mathbf{x}_1, \ldots, B\mathbf{x}_n$. Таким образом,

$$\Delta_B(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \det(B\mathbf{x}_1, \ldots, B\mathbf{x}_n). \tag{58}$$

Согласно (58) и теореме 9.23, функция Δ_B также обладает свойствами (9.23) (*b*), (*c*), (*d*). Согласно (*b*) и (56),

$$\Delta_B[A] = \Delta_B\Big(\sum_i a(i, 1)\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\Big) = \sum_i a(i, 1)\Delta_B(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n).$$

Повторяя эту процедуру с $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, мы получаем

$$\Delta_B[A] = \sum a(i_1, 1)\, a(i_2, 2) \ldots a(i_n, n)\, \Delta_B(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}), \tag{59}$$

где суммирование распространяется на все упорядоченные наборы $(i_1, \ldots, i_n)$ с $1 \leqslant i_r \leqslant n$. Согласно (*c*) и (*d*),

$$\Delta_B(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}) = t(i_1, \ldots, i_n)\, \Delta_B(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \tag{60}$$

где $t = 1$, 0 или -1, а так как $[B][I] = [B]$, то из (57) следует, что

$$\Delta_B(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \det[B]. \tag{61}$$

Подставляя (61) и (60) в (59), мы получаем

$$\det([B][A]) = \left\{\sum a(i_1, 1) \ldots a(i_n, n)\, t(i_1, \ldots, i_n)\right\} \det[B],$$

каковы бы ни были матрицы $[A]$ и $[B]$. Полагая $B = I$, мы видим, что сумма в фигурных скобках равна $\det[A]$. Теорема доказана.

9.25. Теорема. *Линейный оператор A на R^n обратим тогда и только тогда, когда* $\det[A] \neq 0$.

Доказательство. Если A обратим, то, как показывает теорема 9.24,

$$\det[A] \det[A^{-1}] = \det[AA^{-1}] = \det[I] = 1,$$

так что $\det[A] \neq 0$.

Если A не обратим, то столбцы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ матрицы $[A]$ зависимы (теорема 9.5) и, следовательно, имеется столбец, скажем, $\mathbf{x}_k$, такой, что

$$\mathbf{x}_k + \sum_{j \neq k} c_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}, \tag{62}$$

где c_j — некоторые числа. Согласно 9.23 (*b*) и (*d*), столбец $\mathbf{x}_k$ можно заменить столбцом $\mathbf{x}_k + c_j\mathbf{x}_j$, не меняя определителя, если $j \neq k$. Отсюда следует, что столбец $\mathbf{x}_k$, сохраняя значение определителя, можно заменить столбцом, стоящим слева в (62), т. е. столбцом нулей. Но матрица, имеющая $\mathbf{0}$ одним из своих столбцов, имеет нулевой определитель. Поэтому $\det[A] = 0$.

9.26. Замечание. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ — базисы в R^n. Каждому линейному оператору в R^n отвечают матрицы $[A]$ и $[A]_U$ с элементами a_{ij} и α_{ij} в соответствии с равенствами

$$A\mathbf{e}_j = \sum_i a_{ij}\mathbf{e}_i, \quad A\mathbf{u}_j = \sum_i \alpha_{ij}\mathbf{u}_i.$$

Если $\mathbf{u}_j = B\mathbf{e}_j = \sum b_{ij}\mathbf{e}_i$, то вектор $A\mathbf{u}_j$ равен вектору

$$\sum_k \alpha_{kj} B\mathbf{e}_k = \sum_k \alpha_{kj} \sum_i b_{ik}\mathbf{e}_i = \sum_i \left(\sum_k b_{ik}\alpha_{kj}\right) \mathbf{e}_i,$$

а также вектору

$$AB\mathbf{e}_j = A \sum_k b_{kj}\mathbf{e}_k = \sum_i \left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right) \mathbf{e}_i.$$

Таким образом, $\sum b_{ik}a_{kj} = \sum a_{ik}b_{kj}$, или

$$[B][A]_U = [A][B]. \tag{63}$$

Поскольку оператор B обратим, то $\det[B] \neq 0$. Комбинируя (63) с теоремой 9.24, получаем

$$\det[A]_U = \det[A]. \tag{64}$$

Поэтому определитель матрицы линейного оператора не зависит от базиса, который был использован для построения матрицы. *Таким образом, имеет смысл говорить об определителе линейного оператора, не имея при этом в виду никакого базиса.*

9.27. Якобианы. Пусть $\mathbf{f}$ отображает открытое множество $E \subset R^n$ в пространство R^n. Если $\mathbf{f}$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x} \in E$, то определитель линейного оператора $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ называется *якобианом* отображения $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}$. Якобиан отображения $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}$ обозначается символом $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, так что

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \det \mathbf{f}'(\mathbf{x}). \tag{65}$$

Мы будем использовать для $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ также обозначение

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}, \tag{66}$$

если $(y_1, \ldots, y_n) = \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n)$.

Используя понятие якобиана, основное условие теоремы об обратной функции можно записать так: $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$ (ср. с теоремой 9.25). Если теорему о неявной функции сформулировать в терминах функций (35), то условие этой теоремы сводится к неравенству

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Интегрирование

9.28. Определение. Назовем k-клеткой (или k-мерной клеткой) множество $I^k \subset R^k$, состоящее из точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, для которых

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \qquad (i = 1, \ldots, k). \tag{67}$$

Пусть f — непрерывная вещественная функция на I^k. Положим $f_k = f$, и пусть

$$f_{k-1} = f_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \int_{a_k}^{b_k} f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)\, dx_k.$$

Из равномерной непрерывности функции f_k на I^k следует, что f_{k-1} — непрерывная функция на множестве I^{k-1}, т. е. $(k-1)$-клетке в пространстве R^{k-1}, определяемой первыми $k-1$ неравенствами из (67). Поэтому мы можем продолжить процесс. В результате для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant k$, мы получим непрерывную функцию f_j на клетке $I^j \subset R^j$, причем f_{j-1} есть интеграл от f_j относительно x_j по сегменту $[a_j, b_j]$. Наконец, проинтегрировав f_1, мы получим

число f_0, которое называется *интегралом функции* f *по* k-*клетке* I^k и записывается в виде

$$\int_{I^k} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \quad \text{или} \quad \int_{I^k} f. \tag{68}$$

На первый взгляд это определение интеграла зависит от порядка, в котором производятся k однократных интегрирований. Однако это только кажущаяся зависимость. Чтобы доказать это, введем временно обозначение $L(f)$ для интеграла (68) и $L'(f)$ — для интеграла, возникающего в результате k интегрирований, произведенных в каком-либо ином порядке.

9.29. Теорема. *Какова бы ни была функция* $f \in \mathscr{C}(I^k)$, *имеем* $L(f) = L'(f)$.

Доказательство. Если $h(\mathbf{x}) = h_1(x_1) \ldots h_k(x_k)$, где $h_j \in \mathscr{C}([a_j, b_j])$, то

$$L(h) = \prod_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} h_i(x_i)\,dx_i = L'(h).$$

Если $\mathscr{A}$ — множество всех конечных сумм таких функций h, то $L(g) = L'(g)$ при всех $g \in \mathscr{A}$. Кроме того, $\mathscr{A}$ — алгебра функций на множестве I^k, к которой применима теорема Стона — Вейерштрасса.

Положим $V = \prod_1^k (b_i - a_i)$. Если $f \in \mathscr{C}(I^k)$, а $\varepsilon > 0$, то существует функция $g \in \mathscr{A}$, такая, что $\|f - g\| < \varepsilon/V$, где $\|f\| = \max|f(x)|$ $(\mathbf{x} \in I^k)$. Тогда $|L(f-g)| < \varepsilon$, $|L'(f-g)| < \varepsilon$, и так как

$$L(f) - L'(f) = L(f-g) + L'(g-f),$$

то $|L(f) - L'(f)| < 2\varepsilon$. Тем самым теорема доказана.

С этим пунктом связано упражнение 19.

9.30. Определение. *Носителем* (вещественной или комплексной) функции f, определенной на R^k, называется замыкание множества всех точек $\mathbf{x} \in R^k$, в которых $f(x) \neq 0$. Если f — непрерывная функция с компактным носителем, а I^k — какая-нибудь k-клетка, содержащая носитель функции f, то положим

$$\int_{R^k} f = \int_{I^k} f.$$

Так определенный интеграл, очевидно, не зависит от выбора I^k, лишь бы клетка I^k содержала носитель функции f.

Может показаться заманчивым распространить это определение интеграла по пространству R^k на функции, которые служат пределами (в некотором смысле) непрерывных функций с компактными носителями. Мы не хотим обсуждать условия, при которых это можно сделать; этот вопрос уместно решать с помощью интеграла Лебега. Мы лишь опишем один очень простой пример, который будет использован при доказательстве теоремы Стокса.

9.31. Пример. Пусть Q^k есть k-симплекс, состоящий из всех точек $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_k)$ пространства R^k, таких, что $x_1+\ldots+x_k\leqslant 1$ и $x_i\geqslant 0$ при $i=1, \ldots, k$. Если $k=3$, например, то Q^k — это тетраэдр с вершинами $\mathbf{0}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Если $f\in\mathscr{C}(Q^k)$, то продолжим функцию f до функции, определенной на единичном кубе I^k, полагая $f(\mathbf{x})=0$ вне Q^k.

Если полученная в результате продолжения функция окажется непрерывной, то естественно положить

$$\int_{Q^k} f=\int_{I^k} f, \tag{69}$$

причем интеграл справа в этой формуле определяется в соответствии с п. 9.28.

Однако в общем случае продолженная функция будет разрывной на I^k, и нам следует *определить* правую часть в (69). Мы сейчас покажем, как это можно сделать. Конечно, мы можем действовать так же, как в п. 9.28, и в этом случае необходимо установить, что интеграл не зависит от порядка, в котором выполняются k однократных интегрирований. Приводимое ниже рассуждение заодно содержит доказательство и этого факта.

Положим $\mathbf{y}=(x_1, \ldots, x_{k-1})$, $\mathbf{x}=(\mathbf{y}, x_k)$. Определим функцию $g: g(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in Q^k$, $g(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}/t)$, если $x_1+\ldots+x_k=t>1$, и положим

$$\lambda(\mathbf{y})=\max(0, 1-x_1-\ldots-x_{k-1}) \quad (\mathbf{y}\in I^{k-1}).$$

Действуя в соответствии с определением 9.28, получим

$$f_{k-1}(\mathbf{y})=\int_0^1 f(\mathbf{y}, x_k)\,dx_k=\int_0^{\lambda(\mathbf{y})} g(\mathbf{y}, x_k)\,dx_k. \tag{70}$$

Поскольку $g\in\mathscr{C}(I^k)$, а $\lambda\in\mathscr{C}(I^{k-1})$, то из (70) следует, что $f_{k-1}\in\mathscr{C}(I^{k-1})$. Значит, последующие интегрирования не составляют проблемы.

Если $0<\varepsilon<1$, то положим $\varphi(t)=1$ при $t<1-\varepsilon$, $\varphi(t)=(1-t)/\varepsilon$ на сегменте $[1-\varepsilon, 1]$, $\varphi(t)=0$ при $t>1$, и пусть

$$F(\mathbf{x})=\varphi(x_1+\ldots+x_k)\,f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x}\in I^k).$$

Тогда $|F_{k-1}(\mathbf{y})-f_{k-1}(\mathbf{y})|\leqslant\varepsilon\|f\|$ при всех $\mathbf{y}\in I^{k-1}$, так что

$$\left|\int_{I^k}(F-f)\right|\leqslant\varepsilon\|f\|. \tag{71}$$

Отметим, что неравенство (71) справедливо вне зависимости от порядка, в котором производятся k однократных интегрирований; ввиду того что $F\in\mathscr{C}(I^k)$, на интеграле $\int F$ не сказывается никакое изменение этого порядка; (71) показывает, что то же верно и в отношении $\int f$.

Наша следующая теорема показывает, как действует на интеграл замена переменных. Для простоты мы ограничимся непрерывными функциями с компактным носителем.

9.32. Теорема. *Пусть T — взаимно однозначное $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E\subset R^k$ в пространство R^k, такое, что $J_T(\mathbf{x})\neq 0$ при всех $\mathbf{x}\in E$. Если f — непрерывная функция на R^k с компактным носителем, содержащимся в $T(E)$, то*

$$\int_{R^k} f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=\int_{R^k} f(T(\mathbf{x}))\,|J_T(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}. \tag{72}$$

Напомним, что J_T — якобиан отображения T. Так как $J_T(\mathbf{x})\neq 0$, то по теореме об обратной функции отображение T^{-1} непрерывно на множестве $T(E)$, и тем самым подинтегральная функция в правой части равенства (72) имеет компактный носитель, содержащийся в E (теорема 4.14).

Поясним появление *абсолютной величины* якобиана $J_T(\mathbf{x})$ в (72). Пусть $k=1$. Предположим, что T — взаимно однозначное $\mathscr{C}'$-отображение пространства R^1 на R^1. Тогда $J_T(x)=T'(x)$. Если T *возрастает*, то, согласно теоремам 6.33 и 6.17, какова бы ни была непрерывная функция f с компактным носителем,

$$\int_{R^1} f(y)\,dy=\int_{R^1} f(T(x))\,T'(x)\,dx. \tag{73}$$

(Здесь можно обойтись и теоремой 6.16, так как функция T' непрерывна.) Но если T убывает, то $T'(x)<0$, и если функция f положительна на внутренности своего носителя, то правая часть равенства (73) отрицательна, а левая положительна. Верное равенство получится, если T' заменить в (73) на $|T'|$.

Заметим, что интегралы, которые мы сейчас рассматриваем, — это интегралы от функций по подмножествам пространства R^k, и с этими подмножествами мы не связываем никакой ориентации

или направления. Мы встанем на другую точку зрения, когда будем заниматься интегрированием дифференциальных форм по поверхностям.

Доказательство. Из только что сделанных замечаний следует, что (72) справедливо, если T — простое $\mathscr{C}'$-отображение (см. теорему 9.21), а теорема 9.29 показывает, что (72) верно и в том случае, когда T — линейное преобразование, меняющее местами две координаты.

Если теорема верна для отображений P, Q и если $S(\mathbf{x}) = P(Q(\mathbf{x}))$, то

$$\int f(\mathbf{z})\,d\mathbf{z} = \int f(P(\mathbf{y}))\,|J_P(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} =$$
$$= \int f(P(Q(\mathbf{x})))\,|J_P(Q(\mathbf{x}))|\,|J_Q(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} =$$
$$= \int f(S(\mathbf{x}))\,|J_S(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x},$$

так как

$$J_P(Q(\mathbf{x}))\,J_Q(\mathbf{x}) = \det P'(Q(\mathbf{x}))\det Q'(\mathbf{x}) =$$
$$= \det P'(Q(\mathbf{x}))\,Q'(\mathbf{x}) = \det S'(\mathbf{x}) = J_S(\mathbf{x}),$$

согласно теореме об умножении определителей и правилу дифференцирования сложной функции. Таким образом, теорема верна и для S.

Каждая точка $\mathbf{a} \in E$ имеет окрестность U, в которой

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{a}) + \mathbf{g}_k(B_k\mathbf{g}_{k-1}(\ldots\mathbf{g}_1(B_1(\mathbf{x}-\mathbf{a})))),$$

где $\mathbf{g}_i$, B_i те же, что в теореме 9.21. Полагая $V = T(U)$, получаем, что (72) справедливо, если носитель функции $\mathbf{f}$ содержится в V. Итак:

Каждая точка множества $T(E)$ имеет окрестность V, такую, что (72) справедливо для любой непрерывной функции f с носителем, содержащимся в V.

Теперь пусть f — непрерывная функция с компактным носителем K, содержащимся в $T(E)$. Каждая точка $y \in K$ служит центром некоторого открытого шара $V(\mathbf{y})$ радиуса $r(\mathbf{y})$, такого, что (72) выполняется для каждой непрерывной функции с носителем, лежащим в $V(\mathbf{y})$. Поскольку множество K компактно, существуют точки $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p$, принадлежащие K и такие, что объединение открытых шаров W_i с центром в $\mathbf{y}_i$ и радиуса $\frac{1}{2}r(\mathbf{y}_i)$ покрывает K.

Пусть β_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ — функция, непрерывная на R^k, с носителем в $V(\mathbf{y}_i)$, такая, что $\beta_i(\mathbf{y}) = 1$ на W_i. Положим $\alpha_1 = \beta_1$ и

$$\alpha_j = (1-\beta_1)(1-\beta_2)\ldots(1-\beta_{j-1})\,\beta_j,$$

если $2 \leqslant j \leqslant p$. Легко проверить, что

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = 1 - (1 - \beta_1)(1 - \beta_2) \ldots (1 - \beta_p).$$

В каждой точке множества K обращается в нуль хотя бы один из сомножителей последнего произведения, так что $\sum \alpha_i(\mathbf{y}) = 1$, если $\mathbf{y} \in K$. Носитель непрерывной функции $\alpha_j f$ лежит в $V(\mathbf{y}_j)$, так что (72) выполняется при каждом $\alpha_j f$. Из равенства $f = \sum \alpha_j f$ следует, что (72) справедливо и для f.

9.33. Определение. Пусть f — вещественная функция, определенная на открытом множестве $E \subset R^n$, с частными производными $D_1 f, \ldots, D_n f$ (см. п. 9.13). Если функции $D_j f$ сами дифференцируемы, то *частные производные второго порядка функции* f определяются равенством

$$D_{ij} f = D_i D_j f \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Если все эти функции $D_{ij} f$ непрерывны на E, то говорят, что f — функция класса $\mathscr{C}''$ на E или что $f \in \mathscr{C}''(E)$.

Говорят, что отображение $\mathbf{f}$ множества E в пространство R^k принадлежит классу $\mathscr{C}''$ на E, если каждая его компонента принадлежит классу $\mathscr{C}''$.

Для простоты (и не умаляя общности) мы сформулируем нашу следующую теорему для функций двух переменных.

9.34. Теорема. *Если $D_{12} f$ и $D_{21} f$ непрерывны на открытом множестве $E \subset R^2$, то $D_{12} f = D_{21} f$ в E.*

Доказательство. Допустим, что $D_{12} f(\mathbf{x}) > D_{21} f(\mathbf{x})$ в какой-нибудь точке $\mathbf{x}$ множества E. Из предположенной непрерывности следует, что тогда существует прямоугольник R, содержащийся в E, определяемый неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ и такой, что $(D_{12} f)(x, y) > (D_{21} f)(x, y)$ при всех $(x, y) \in R$. Значит,

$$\int_R D_{12} f > \int_R D_{21} f. \tag{74}$$

Но

$$\int_R D_{12} f = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b D_1 (D_2 f)(x, y)\, dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta [(D_2 f)(b, y) - (D_2 f)(a, y)]\, dy =$$

$$= f(b, \beta) - f(a, \beta) - f(b, \alpha) + f(a, \alpha)$$

по основной теореме интегрального исчисления, а по теореме 9.29 тот же результат получится и для $\int_R D_{21}f$, что противоречит неравенству (74).

Дифференциальные формы

В этом разделе будет частично разработан аппарат, необходимый для теоремы Стокса.

До сих пор мы рассматривали производные функций нескольких переменных только для функций, определенных на открытых множествах. Это было вызвано соображениями удобства и позволило нам избежать трудностей, которые могут встретиться при рассмотрении граничных точек. Однако теперь нам будет удобно рассматривать дифференцируемые функции на *компактных* множествах. Поэтому мы примем следующее соглашение. Говоря, что $\mathbf{f}$ есть $\mathscr{C}'$-отображение (или $\mathscr{C}''$-отображение) компактного множества $D \subset R^k$ в пространство R^n, мы будем иметь в виду, что существует $\mathscr{C}'$-отображение (или $\mathscr{C}''$-отображение) $\mathbf{g}$ некоторого открытого множества $W \subset R^k$ в пространство R^n, такое, что $D \subset W$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ при всех $\mathbf{x} \in D$.

9.35. Определение. Пусть E — открытое множество в R^n; $\mathscr{C}'$-отображение Φ некоторого компактного множества $D \subset R^k$ в множество E мы будем называть *k-поверхностью в множестве E*.

Множество D называется *множеством параметров* поверхности Φ. Точки множества D мы будем обозначать через $\mathbf{u}$, так что $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k)$.

Мы будем иметь дело только с простейшей ситуацией, когда D — или k-клетка, или k-симплекс Q^k, описанный в примере 9.31. Причина этого в том, что нам предстоит интегрировать по D, а мы еще не развили теории интегрирования по более сложным подмножествам пространства R^k. Мы увидим, что это ограничение, наложенное на D (мы будем его в дальнейшем, не оговаривая, предполагать выполненным) не влечет существенной потери общности в теории дифференциальных форм.

Сравнение с определением 6.34 показывает, что 1-поверхность — это не что иное, как непрерывно дифференцируемая кривая.

9.36. Определение. Пусть E — открытое множество в пространстве R^n. *Дифференциальной формой порядка $k \geqslant 1$, определенной в E* (или, кратко, *k-формой в E*) называется функция ω на множестве k-поверхностей, символически записываемая в виде

$$\omega = \sum a_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \tag{75}$$

(индексы $i_1, \ldots, i_k$ независимо пробегают множество $1, \ldots, n$) и сопоставляющая каждой k-поверхности Φ в множестве E число $\omega(\Phi) = \int\limits_{\Phi} \omega$ в соответствии с правилом

$$\int\limits_{\Phi} \omega = \int\limits_{D} \sum a_{i_1 \ldots i_k}(\Phi(\mathbf{u})) \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)} d\mathbf{u}, \tag{76}$$

где D — множество параметров поверхности Φ.

Функции $a_{i_1 \ldots i_k}$ предполагаются вещественными и непрерывными в E. Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — компоненты отображения Φ, то якобиан в (76) — это якобиан отображения

$$(u_1, \ldots, u_k) \to (\varphi_{i_1}(\mathbf{u}), \ldots, \varphi_{i_k}(\mathbf{u})).$$

Заметим, что правая часть равенства (76) — интеграл по множеству D, описанный в п. 9.28 (или 9.31), и что (76) — *определение* символа $\int\limits_{\Phi} \omega$.

Говорят, что k-форма ω принадлежит классу $\mathscr{C}'$ или $\mathscr{C}''$, если функции $a_{i_1 \ldots i_k}$ в (75) принадлежит классу $\mathscr{C}'$ или $\mathscr{C}''$.

0-формой называют функцию, непрерывную на множестве E.

Формы

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \tag{77}$$

называют *базисными* k-формами. Чтобы упростить обозначения, мы часто будем употреблять символ β^k только для базисных k-форм. Каждая k-форма оказывается тогда суммой k-форм $f\beta^k$, где f есть 0-форма.

В качестве простого примера рассмотрим 1-поверхность γ в R^2 (т. е. кривую класса $\mathscr{C}'$) с множеством параметров $[0, 1]$. Если $\omega = x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2$, то

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{0}^{1} [\gamma_2(t)\, \gamma_1'(t) + \gamma_1(t)\, \gamma_2'(t)]\, dt = \gamma_1(1)\, \gamma_2(1) - \gamma_1(0)\, \gamma_2(0).$$

Если γ — замкнутая кривая, то $\int\limits_{\gamma} \omega = 0$.

9.37. Элементарные свойства k-форм. Пусть $\omega, \omega_1, \omega_2$ суть k-формы в E. Мы будем писать $\omega_1 = \omega_2$ тогда и только тогда, когда $\omega_1(\Phi) = \omega_2(\Phi)$, какова бы ни была k-поверхность Φ в множестве E; в частности, $\omega = 0$ означает, что $\omega(\Phi) = 0$ для всех k-поверхностей Φ в множестве E. Если c — вещественное число, то $c\omega$ есть k-форма, определенная равенством

$$\int\limits_{\Phi} c\omega = c \int\limits_{\Phi} \omega.$$

В частности, $-\omega$ определяется так, что

$$\int_{\Phi} (-\omega) = -\int_{\Phi} \omega, \tag{78}$$

и $\omega = \omega_1 + \omega_2$ означает, что

$$\int_{\Phi} \omega = \int_{\Phi} \omega_1 + \int_{\Phi} \omega_2$$

для всех k-поверхностей Φ в множестве E.

Согласно (78) и (76), из того, что определитель меняет знак при перестановке двух его столбцов, следует, что выполняется *антикоммутативный закон*

$$dx_i \wedge dx_j = -(dx_j \wedge dx_i) \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{79}$$

Полагая в (79) $i = j$, получаем

$$dx_i \wedge dx_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{80}$$

Следовательно, каждая k-форма от n переменных — нулевая, если $k > n$.

9.38. Умножение. Пусть ω есть k-форма (75), а λ есть m-форма

$$\lambda = \sum b_{j_1 \ldots j_m}(\mathbf{x})\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_m} \tag{81}$$

в E, где $j_1, \ldots, j_m$ независимо пробегают множество целых чисел от 1 до n. *Произведение* этих форм, обозначаемое символом $\omega \wedge \lambda$, есть, по определению, $(k+m)$-форма

$$\begin{aligned} \omega \wedge \lambda = \sum a_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x})\, b_{j_1 \ldots j_m}(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \\ \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_m}. \end{aligned} \tag{82}$$

В сумме (82) индексы $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_m$ изменяются независимо от 1 до n.

Определенное так умножение, очевидно, ассоциативно и дистрибутивно по отношению к сложению, определенному в разделе 9.37. Заметим, что ранее введенное обозначение

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

согласуется с нашим теперешним определением умножения.

9.39. Дифференцирование. Мы определим теперь оператор дифференцирования d, который каждой k-форме класса $\mathscr{C}'$ в множестве E ставит в соответствие $(k+1)$-форму в E.

0-форма класса $\mathscr{C}'$ в E — это просто вещественная функция $f \in \mathscr{C}'(E)$, и мы полагаем, по определению,

$$df = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\mathbf{x})\, dx_i. \tag{83}$$

Если $\omega = f\beta^k$, где β^k — базисная k-форма, то ее *производной* $d\omega$ называется $(k+1)$-форма

$$d\omega = (df) \wedge \beta^k, \tag{84}$$

где df — то же, что в (83), а произведение понимается в смысле п. 9.38. Оператор d распространяется на суммы членов $f\beta^k$ (т. е. на все k-формы ω) по аддитивности.

Часто форму $d\omega$ называют *внешней производной* формы ω, а $\omega \wedge \lambda$ называют *внешним произведением* форм ω и λ. В соответствии с этим формальное исчисление, построением которого мы сейчас занимаемся, называют *внешним дифференциальным исчислением*.

9.40. Теорема. (*a*) *Если ω и λ суть k- и m-формы (соответственно) класса $\mathscr{C}'$ в E, то*

$$d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda. \tag{85}$$

(*b*) *Если ω — форма класса $\mathscr{C}''$ в E, то $d^2\omega = 0$ в E.* Здесь $d^2\omega$ обозначает, разумеется, форму $d(d\omega)$.

Доказательство. Для доказательства равенства (85) достаточно рассмотреть частный случай $\omega = f\beta^k$, $\lambda = g\beta^m$, где $f, g \in \mathscr{C}'(E)$, а β^k, β^m — базисные формы. Тогда

$$\omega \wedge \lambda = fg\beta^k \wedge \beta^m,$$

так что

$$d(\omega \wedge \lambda) = d(fg) \wedge \beta^k \wedge \beta^m. \tag{86}$$

Согласно (83),

$$d(fg) = g\, df + f\, dg. \tag{87}$$

Соотношение антикоммутативности (79) показывает, что

$$(dg) \wedge \beta^k = (-1)^k \beta^k \wedge dg. \tag{88}$$

Согласно (88), подставляя (87) в (86), получаем (85). Если f есть 0-форма класса $\mathscr{C}''$, то

$$d^2 f = d\Big(\sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\mathbf{x})\, dx_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} d(D_j f) \wedge dx_j =$$
$$= \sum (D_{ij} f)(\mathbf{x})\, dx_i \wedge dx_j.$$

Ввиду того что $D_{ij}f = D_{ji}f$ и $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, мы видим, что $d^2f = 0$. Если $\omega = f\beta^k$, то $d\omega = (df) \wedge \beta^k$, а так как $d(\beta^k) = 0$, то из (85) следует, что $d^2\omega = (d^2f) \wedge \beta^k = 0$.

9.41. Определение. Пусть E — открытое множество в пространстве R^n, T есть $\mathscr{C}'$-отображение множества E на открытое множество $V \subset R^m$, а ω есть k-форма в V:

$$\omega = \sum a_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{y})\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}.$$

Тогда T преобразует форму ω в k-форму ω_T в E, заданную следующим образом:

$$\omega_T = \sum a_{i_1 \ldots i_k}(T(\mathbf{x}))\, dt_{i_1} \wedge \ldots \wedge dt_{i_k},$$

где $t_1, \ldots, t_m$ — компоненты отображения T; другими словами, если $(y_1, \ldots, y_m) = T(\mathbf{x})$, то $y_i = t_i(\mathbf{x})$ и в соответствии с (83)

$$dt_i = \sum_{j=1}^{n} (D_j t_i)(\mathbf{x})\, dx_j.$$

Наша следующая теорема показывает, что операции сложения, умножения и дифференцирования форм определены так, что они инвариантны относительно замены переменных.

9.42. Теорема. *Пусть E и T — те же, что в определении* 9.41. *Пусть ω и λ суть k- и m-формы (соответственно) в V. Тогда*

(*a*) $(\omega + \lambda)_T = \omega_T + \lambda_T$, *если* $k = m$;
(*b*) $(\omega \wedge \lambda)_T = \omega_T \wedge \lambda_T$;
(*c*) $d(\omega_T) = (d\omega)_T$,

если ω — класса $\mathscr{C}'$, а T — класса $\mathscr{C}''$.

Доказательство. (*a*) и (*b*) вытекают непосредственно из определений. Если f есть 0-форма класса $\mathscr{C}'$ в V, то

$$f_T(\mathbf{x}) = f(T(\mathbf{x})), \qquad df = \sum (D_i f)(\mathbf{y})\, dy_i.$$

Из правила дифференцирования следует, что

$$d(f_T) = \sum_j (D_j f_T)(\mathbf{x})\, dx_j = \sum_j \sum_i (D_i f)(T(\mathbf{x}))(D_j t_i)(\mathbf{x})\, dx_j =$$
$$= \sum_i (D_i f)(T(\mathbf{x}))\, dt_i.$$

Таким образом,

$$d(f_T) = (df)_T.$$

Допустим теперь, что $\omega = f\beta^k$, где $\beta^k = dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}$. Тогда $(\beta^k)_T = dt_i \wedge \ldots \wedge dt_{i_k}$ и из теоремы 9.40 следует, что $d((\beta^k)_T) = 0$ (это единственное место, где мы используем предположение о том,

что $T \in \mathscr{C}''$). Поскольку

$$\omega_T = f_T (\beta^k)_T,$$

то (85) и (b) показывают теперь, что

$$d(\omega_T) = d(f_T) \wedge (\beta^k)_T = (df)_T \wedge (\beta^k)_T = ((df) \wedge \beta^k)_T = \\ = (d\omega)_T.$$

Тем самым доказано и (c).

Теперь мы переходим к другому важному свойству преобразований дифференциальных форм.

9.43. Теорема. *Пусть T есть $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E \subset R^n$ в открытое множество $V \subset R^n$, S есть $\mathscr{C}'$-отображение множества V в открытое множество $W \subset R^p$, а ω является k-формой в W, так что ω_S есть k-форма в V, и обе формы $(\omega_S)_T$ и ω_{ST} суть k-формы в E, где ST определяется равенством $(ST)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x}))$.*

Тогда

$$(\omega_S)_T = \omega_{ST}. \tag{89}$$

Доказательство. Если ω и λ — формы в W, то, как показывает теорема 9.42,

$$((\omega \wedge \lambda)_S)_T = (\omega_S \wedge \lambda_S)_T = (\omega_S)_T \wedge (\lambda_S)_T$$

и

$$(\omega \wedge \lambda)_{ST} = \omega_{ST} \wedge \lambda_{ST}.$$

Таким образом, если (89) выполняется для ω и для λ, то (89) выполняется и для $\omega \wedge \lambda$. Поскольку каждую форму можно построить из 0-форм и 1-форм с помощью операций сложения и умножения и поскольку (89) выполняется тривиальным образом для 0-форм, то достаточно доказать (89) в том случае, когда $\omega = dz_q$, $q = 1, \ldots, p$. (Мы обозначаем точки множеств E, V, W через $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ соответственно.)

Пусть $t_1, \ldots, t_m$ — компоненты отображения T, $s_1, \ldots, s_p$ — компоненты отображения S, а $r_1, \ldots, r_p$ — компоненты отображения ST. Если $\omega = dz_q$, то

$$\omega_S = ds_q = \sum_j (D_j s_q)\, dy_j,$$

так что по правилу дифференцирования (см. пример 9.14)

$$(\omega_S)_T = \sum_j (D_j s_q)(T(\mathbf{x}))\, dt_j = \\ = \sum_j (D_j s_q)(T(\mathbf{x})) \sum_i (D_j t_j)(\mathbf{x})\, dx_i = \\ = \sum_i (D_i r_q)(\mathbf{x})\, dx_i = dr_q = \omega_{ST}.$$

9.44. Теорема. *Пусть ω есть k-форма в открытом множестве $E \subset R^n$, Φ есть k-поверхность в E с множестзом параметров $D \subset R^k$, а Δ есть k-поверхность в R^k с множеством параметров D, определенная так: $\Delta(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ $(\mathbf{u} \in D)$. Тогда*

$$\int_{\Phi} \omega = \int_{\Delta} \omega_{\Phi}.$$

Доказательство. Нам достаточно рассмотреть только случай

$$\omega = a(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — компоненты отображения Φ, то

$$\omega_{\Phi} = a(\Phi(\mathbf{u}))\, d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Теорема будет доказана, если мы установим, что

$$d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k} = J(\mathbf{u})\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k, \tag{90}$$

где

$$J(\mathbf{u}) = \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)},$$

поскольку из (90) следует, что

$$\int_{\Phi} \omega = \int_{D} a(\Phi(\mathbf{u}))\, J(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} =$$

$$= \int_{\Delta} a(\Phi(\mathbf{u}))\, J(u)\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k = \int_{\Delta} \omega_{\Phi}.$$

Пусть $[A]$ — матрица из k строк и k столбцов с элементами

$$\alpha(p, q) = (D_q \varphi_{i_p})(\mathbf{u}) \quad (p, q = 1, \ldots, k).$$

Тогда

$$d\varphi_{i_p} = \sum_q \alpha(p, q)\, du_q,$$

так что

$$d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k} = \sum \alpha(1, q_1) \ldots \alpha(k, q_k)\, du_{q_1} \wedge \ldots \wedge du_{q_k}.$$

В последней сумме $q_1, \ldots, q_k$ изменяются независимо от 1 до k. Из закона антикоммутативности (79) следует, что

$$du_{q_1} \wedge \ldots \wedge du_{q_k} = s(q_1, \ldots, q_k)\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k,$$

где s — то же, что в определении 9.22. Применяя это определение, мы видим, что

$$d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k} = \det[A]\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k,$$

а так как $J(\mathbf{u}) = \det[A]$, то (90) доказано.

Комбинируя две последние теоремы, получаем заключительный результат этого раздела.

9.45. Теорема. *Пусть T есть $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E \subset R^n$ в открытое множество $V \subset R^m$, Φ есть k-поверхность в E, а ω есть k-форма в V. Тогда*

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_{\Phi} \omega_T.$$

Доказательство. Пусть D — множество параметров поверхности Φ (и тем самым поверхности $T\Phi$). Определим Δ, как в теореме 9.44. Применяя эту теорему к ω_T и Φ, получаем

$$\int_{\Phi} \omega_T = \int_{\Delta} (\omega_T)_\Phi.$$

Применяя этот результат к ω и к $T\Phi$, получаем

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_{\Delta} \omega_{T\Phi}.$$

Но $(\omega_T)_\Phi = \omega_{T\Phi}$ по теореме 9.43. Теорема доказана.

Симплексы и цепи

9.46. Определения. При $k = 1, 2, 3, \ldots$ мы определяем *стандартный симплекс* Q^k как множество всех $\mathbf{u} \in R^k$ вида

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{e}_i \quad \left(\alpha_i \geqslant 0 \text{ при } i = 1, \ldots, k \text{ и } \sum_1^k \alpha_i \leqslant 1\right),$$

где $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — стандартный базис пространства R^k.

Если $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ — точки пространства R^n и A — линейное отображение пространства R^k в пространство R^n, определяемое равенствами $A\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$ $(i = 1, \ldots, k)$, то *ориентированным прямолинейным k-симплексом*

$$\sigma = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k] \tag{91}$$

называется k-поверхность в R^n с множеством параметров Q^k, заданная равенством

$$\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + A\mathbf{u} \quad (\mathbf{u} \in Q^k). \tag{92}$$

Заметим, что $\sigma(0) = \mathbf{p}_0$, $\sigma(\mathbf{e}_i) = \mathbf{p}_i$ при $i = 1, \ldots, k$.

Мы называем симплекс σ *ориентированным*, чтобы подчеркнуть, что порядок вершин $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k$ следует учитывать. Если

$$\bar{\sigma} = [\mathbf{p}_{i_0}, \ldots, \mathbf{p}_{i_k}],$$

где $\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$ — перестановка множества $\{0, 1, \ldots, k\}$, то мы будем писать

$$\bar{\sigma} = s(i_0, i_1, \ldots, i_k)\,\sigma,$$

где s — функция, определенная в п. 9.22. Таким образом, $\bar{\sigma} = \pm\sigma$ в зависимости от того, какое из двух равенств $s = 1$ или $s = -1$ выполняется. Строго говоря, считая (91) и (92) определением симплекса σ, мы имеем право писать $\bar{\sigma} = \sigma$ только в том случае, когда $i_0 = 0, \ldots, i_k = k$, хотя бы $s(i_0, \ldots, i_k)$ и равнялось 1, так что, строго говоря, здесь мы имеем дело не с равенством, а с отношением эквивалентности. Однако для наших целей такое обозначение оправдано, как показывает теорема 9.47.

Если $\bar{\sigma} = \varepsilon\sigma$ (мы следуем только что принятому соглашению) и если $\varepsilon = 1$, то говорят, что $\bar{\sigma}$ и σ имеют *одинаковую ориентацию*; если $\varepsilon = -1$, то говорят, что $\bar{\sigma}$ и σ имеют *противоположные ориентации*. Заметим, что мы не определяем, что такое «ориентация симплекса». То, что мы определили — это отношение между парами симплексов, имеющих одно и то же множество вершин, т. е. свойство двух таких симплексов иметь одинаковую ориентацию.

До сих пор мы предполагали, что $k \geqslant 1$. *Ориентированным 0-симплексом* называется точка, которой приписан некоторый знак. Мы пишем $\sigma = +\mathbf{p}_0$ или $\sigma = -\mathbf{p}_0$. Если $\sigma = \varepsilon\mathbf{p}_0$ ($\varepsilon = \pm 1$) и если f есть 0-форма (т. е. вещественная функция), то мы полагаем, по определению,

$$\int_\sigma f = \varepsilon f(\mathbf{p}_0).$$

9.47. Теорема. *Если σ — ориентированный прямолинейный k-симплекс в открытом множестве $E \subset R^n$ и если $\bar{\sigma} = \varepsilon\sigma$, то*

$$\int_{\bar{\sigma}} \omega = \varepsilon \int_\sigma \omega \tag{93}$$

для любой k-формы ω в E.

Доказательство. Если $k = 0$, то (93) следует из предыдущего определения. Итак, будем считать, что $k \geqslant 1$ и что σ — симплекс (91).

Пусть $1 < j \leqslant k$, и пусть $\bar{\sigma}$ получается из σ перестановкой вершин $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{p}_j$. Тогда $\varepsilon = -1$ и

$$\bar{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_j + B\mathbf{u} \quad (\mathbf{u} \in Q^k),$$

где B — линейное отображение пространства R^k в пространство R^n, определенное равенствами $B\mathbf{e}_j = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_j$, $B\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$, если $i \neq j$. Обозначая $A\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, где A задано равенствами (92), мы видим, что столбцы матрицы $[B]$ (т. е. векторы $B\mathbf{e}_i$) таковы

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_j, \ \ldots, \ \mathbf{x}_{j-1} - \mathbf{x}_j, -\mathbf{x}_j, \ \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j, \ \ldots, \ \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j.$$

Если вычесть из каждого столбца j-й столбец, то ни один из определителей в (76) не изменится, и мы получим столбцы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, -\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_k$. Они отличаются от соответствующих столбцов матрицы $[A]$ только знаком j-го столбца. Значит, в этом случае (93) доказано.

Пусть теперь $0 < i < j \leqslant k$, и пусть $\bar{\sigma}$ получается из σ перестановкой вершин $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_j$. Тогда $\bar{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + C\mathbf{u}$, где $[C]$ имеет те же столбцы, что и $[A]$, за исключением i-го и j-го, которые переставлены. Отсюда снова следует, что выполняется (93), так как $\varepsilon = -1$.

Поэтому (93) выполняется и в общем случае, так как каждая перестановка множества $\{0, 1, \ldots, k\}$ равна суперпозиции перестановок, с которыми мы уже имели дело.

9.48. Определение. *Прямолинейной k-цепью* Γ в открытом множестве $E \subset R^n$ называется семейство, состоящее из конечного числа ориентированных k-симплексов $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ в E (не обязательно различных).

Если Γ — такая цепь и если ω есть k-форма в E, то, по определению, полагаем

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{i=1}^{r} \int_{\sigma_i} \omega. \tag{94}$$

Мы можем рассматривать k-поверхность Φ в E как функцию, определенную на множестве всех k-форм ω в E, сопоставляющую каждой форме ω число $\int_\Phi \omega$. Вещественные функции можно складывать (см. определение 4.3), поэтому (94) подсказывает следующее обозначение:

$$\Gamma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_r. \tag{95}$$

Например, если $\sigma_2 = -\sigma_1$ и $\Gamma = \sigma_1 + \sigma_2$, то $\int_\Gamma \omega = 0$ при всех ω. В этом случае можно записать $\Gamma = 0$.

При $k=1, 2, 3, \ldots$ *границей* ориентированного прямолинейного k-симплекса $\sigma=[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k]$ называется прямолинейная $(k-1)$-цепь

$$\partial\sigma=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j[\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \ldots, \mathbf{p}_k]. \tag{96}$$

Например, если $\sigma=[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$, то

$$\partial\sigma=[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]-[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2]+[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]=[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]+[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]+[\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_0].$$

Это совпадает с обычным определением ориентированной границы треугольника.

Заметим, что если $1\leqslant j\leqslant k$, то симплекс $\sigma_j=[\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \ldots, \mathbf{p}_k]$, фигурирующий в (96), имеет Q^{k-1} своим множеством параметров, и что он определяется так:

$$\sigma_j(\mathbf{u})=\mathbf{p}_0+B\mathbf{u} \qquad (\mathbf{u}\in Q^{k-1}), \tag{97}$$

где B — линейное отображение из R^{k-1} в R^n, определяемое равенствами

$$B\mathbf{e}_i=\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0,$$

если $1\leqslant i\leqslant j-1$, $B\mathbf{e}_i=\mathbf{p}_{i+1}-\mathbf{p}_0$, если $j\leqslant i\leqslant k-1$. Симплекс

$$\sigma_0=[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_k],$$

который тоже участвует в (96), задается как отображение

$$\sigma_0(\mathbf{u})=\mathbf{p}_1+B\mathbf{u},$$

где $B\mathbf{e}_i=\mathbf{p}_{i+1}-\mathbf{p}_1$ при $1\leqslant i\leqslant k-1$.

9.49. Определение. Пусть T есть $\mathscr{C}''$-отображение открытого множества $E\subset R^n$ в открытое множество $V\subset R^m$, не обязательно взаимно однозначное. Если σ — ориентированный прямолинейный k-симплекс в E, то сложное отображение $\Phi=T(\sigma)$ есть k-поверхность в V с множеством параметров Q^k. Мы будем называть Φ *ориентированным k-симплексом класса $\mathscr{C}''$*.

Конечное семейство Ψ ориентированных k-симплексов $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ класса $\mathscr{C}''$ в V называется *k-цепью класса $\mathscr{C}''$ в V*; если ω есть k-форма в V, то, по определению, полагаем

$$\int_{\Psi}\omega=\sum_{i=1}^{r}\int_{\Phi_i}\omega \tag{98}$$

и используем соответствующее обозначение $\Psi=\sum\Phi_i$. Если $\Gamma=\sum\sigma_i$ — прямолинейная цепь и $\Phi_i=T(\sigma_i)$, то мы будем писать $\Psi=T(\Gamma)$, или

$$T\left(\sum\sigma_i\right)=\sum T(\sigma_i).$$

Граница $\partial\Phi$ ориентированного k-симплекса $\Phi = T(\sigma)$ — это, по определению, $(k-1)$-цепь

$$\partial\Phi = T(\partial\sigma).$$

Очевидно, что $\partial\Phi$ принадлежит классу $\mathscr{C}''$, если Φ принадлежит этому классу.

Наконец, мы определяем границу $\partial\Psi$ некоторой k-цепи $\Psi = \sum \Phi_i$ как $(k-1)$-цепь

$$\partial\Psi = \sum \partial\Phi_i. \tag{99}$$

Теорема Стокса

Формулируя эту теорему, мы будем пользоваться терминологией и обозначениями из п. 9.49.

9.50. Теорема. *Если Ψ есть k-цепь класса $\mathscr{C}''$ в открытом множестве $V \subset R^m$ и если ω есть $(k-1)$-форма класса $\mathscr{C}'$ в V, то*

$$\int_{\Psi} d\omega = \int_{\partial\Psi} \omega. \tag{100}$$

(В случае $k = m = 2$ эту теорему называют теоремой Грина. В случае $k = m = 1$ эта теорема — не что иное, как основная теорема интегрального исчисления.)

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\int_{\Phi} d\omega = \int_{\partial\Phi} \omega \tag{101}$$

для каждого ориентированного k-симплекса Φ класса $\mathscr{C}''$ в V, так как если доказано (101), а $\Psi = \sum \Phi_i$, то из (99) следует, что (100) тоже выполняется.

Зафиксируем такое Φ, и пусть σ — ориентированный прямолинейный k-симплекс в R^k:

$$\sigma = [\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k]. \tag{102}$$

Этот симплекс σ — просто тождественное отображение на Q^k; в обозначениях (92) здесь $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$, $A = I$.

Ввиду того что Φ — класса $\mathscr{C}''$ в V, существует открытое множество $E \subset R^k$, содержащее Q^k, и $\mathscr{C}''$-отображение T множества E в V, такое, что $\Phi = T(\sigma)$. Левая часть равенства (101) равна

$$\int_{T(\sigma)} d\omega = \int_{\sigma} (d\omega)_T = \int_{\sigma} d(\omega_T),$$

согласно теоремам 9.45 и 9.42 (*c*). Еще раз применяя 9.45, мы видим, что правую часть равенства (101) можно записать в следующем виде:

$$\int_{\partial(T(\sigma))} \omega = \int_{T(\partial\sigma)} \omega = \int_{\partial\sigma} \omega_T.$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$\int_{\sigma} d\lambda = \int_{\partial\sigma} \lambda \tag{103}$$

для специального симплекса (102) и произвольной $(k-1)$-формы класса $\mathscr{C}'$ в E.

Граница симплекса (102) равна

$$[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k] + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \ldots, \mathbf{e}_k),$$

согласно (96). Передвинем элемент $\mathbf{0}$ в j-м слагаемом этой суммы так, чтобы он оказался между $\mathbf{e}_{j-1}$ и $\mathbf{e}_{j+1}$. Это можно сделать с помощью $j-1$ транспозиций. Значит,

$$\partial\sigma = \tau_0 - \sum_{j=1}^{k} \tau_j, \tag{104}$$

где $\tau_0 = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k]$ и τ_j получается из τ_0 заменой $\mathbf{e}_j$ на $\mathbf{0}$, $j = 1, \ldots, k$.

Если $k = 1$, то из определения ориентированного $\mathbf{0}$-симплекса вытекает, что в (103) утверждается всего лишь следующее:

$$\int_0^1 f'(u)\, du = f(1) - f(0)$$

для любой непрерывно дифференцируемой функции f на $[0, 1]$; это утверждение справедливо, согласно основной теореме интегрального исчисления.

Если $k > 1$, то достаточно доказать (103) для

$$\lambda = a(\mathbf{x})\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_k, \tag{105}$$

где $a \in \mathscr{C}'(E)$, так как (104) показывает, что то же самое будет тогда справедливо и для любой формы $\alpha\beta^{k-1}$, а любая $(k-1)$-форма равна сумме форм вида $\alpha\beta^{k-1}$.

Множеством параметров для симплексов $\tau_0, \ldots, \tau_k$ служит симплекс Q^{k-1}. Если $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{k-1}) \in Q^{k-1}$, а $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) = \tau_0(\mathbf{u})$, то

$$x_1 = 1 - u_1 - \ldots - u_{k-1}, \quad x_i = u_{i-1} \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant k. \tag{106}$$

Если $\mathbf{x}=\tau_1(\mathbf{u})$, то

(107) $$x_1=0, \quad x_i=u_{i-1} \quad \text{для} \quad 2\leqslant i\leqslant k.$$

Если $\mathbf{x}=\tau_j(\mathbf{u})$ и $2\leqslant j\leqslant k$, то $x_j=0$. Следовательно, якобиан

$$\frac{\partial(x_2, \ldots, x_k)}{\partial(u_1, \ldots, u_{k-1})}$$

равен 1 для τ_0 и τ_1 и равен нулю для $\tau_2, \ldots, \tau_k$. Таким образом,

$$\int_{\tau_j} \lambda=0 \qquad (j=2, \ldots, k).$$

Отсюда будет следовать (103) после того, как мы покажем, что

(108) $$\int_{\sigma} d\lambda=\int_{\tau_0]]} \lambda-\int_{\tau_1} \lambda.$$

Левая часть равенства (108) равна

(109) $$\int_{Q^k} (D_1 a)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

так как $d\lambda=(D_1 a)(\mathbf{x})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_k$, а σ — тождественное отображение на Q^k.

Вычисляя k-кратный интеграл (109) интегрированием по x_1, получаем

$$\int_{Q^{k-1}} [a(\tau_0(\mathbf{u}))-a(\tau_1(\mathbf{u}))]\, d\mathbf{u},$$

согласно (106) и (107), что в свою очередь равно правой части равенства (108). Теперь доказательство закончено.

Упражнения

1. Доказать, что каждому $A\in L(R^n, R^1)$ соответствует единственная точка $\mathbf{y}\in R^n$, такая, что $A\mathbf{x}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$. Доказать, что $\|A\|=|\mathbf{y}|$.

Указание. При некоторых условиях неравенство Шварца превращается в равенство.

2. Доказать, что функция f непрерывна в точке $\mathbf{x}$, если $D_1 f, \ldots, D_n f$ ограничены в некоторой окрестности этой точки.

Указание. Действовать так же, как при доказательстве теоремы 9.16.

3. Пусть f — вещественная дифференцируемая функция на открытом множестве $E\subset R^n$, и пусть f имеет локальный максимум в точке $\mathbf{x}\in E$. Доказать, что $f'(\mathbf{x})=0$.

4. Пусть $(D_1 f)(\mathbf{x}) = 0$ при всех $\mathbf{x}$ из выпуклого открытого множества $E \subset R^n$. Доказать, что $f(\mathbf{x})$ зависит только от $x_2, \ldots, x_n$. Показать, что выпуклость множества E можно заменить более слабым условием, но что какое-то условие все-таки требуется. Например, если $n = 2$, а множество E имеет форму подковы, то утверждение может и не быть верным.

5. Пусть f — вещественная дифференцируемая функция на связном открытом множестве $E \subset R^n$, и пусть $f'(\mathbf{x}) = 0$ при всех $\mathbf{x} \in E$. Доказать, что f постоянна на E.

6. Вычислить $f'(\mathbf{x})$, если $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$ при $\mathbf{x} \in R^n$.

7. Пусть $f(0, 0) = 0$ и

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{если } (x, y) \neq (0, 0).$$

Доказать, что

(*a*) f, $D_1 f$, $D_2 f$ непрерывны на R^2;

(*b*) $D_{12} f$, $D_{21} f$ существуют в каждой точке пространства R^2 и непрерывны всюду, кроме точки $(0, 0)$;

(*c*) $(D_{12} f)(0, 0) = 1$, $(D_{21} f)(0, 0) = -1$.

8. Из существования (и даже из непрерывности) производной $D_{12} f$ не следует существование производной $D_1 f$. Например, пусть $f(x, y) = g(x)$, где g — нигде не дифференцируемая функция. Тогда $D_1 f$ не существует, но $D_2 f = 0$, так что $D_{12} f = 0$.

9. Положим $f(0, 0) = 0$ и

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \quad \text{если } (x, y) \neq (0, 0).$$

Тогда функция f непрерывна в R^2. а ее сужение на любую прямую дифференцируемо. Более того, покажите что если γ — любая дифференцируемая кривая в R^2, то функция $f(\gamma)$ дифференцируема. Это значит, что если γ — дифференцируемое отображение сегмента $[0, 1]$ в пространство R^2 и если $g(t) = f(\gamma(t))$, то функция g дифференцируема на $[0, 1]$. Покажите, что если $\gamma \in \mathscr{C}'$, то и $f(\gamma) \in \mathscr{C}'$.

Доказать, что, несмотря на это, функция f не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

10. Показать, что непрерывность производной f' существенна в теореме об обратной функции, даже в том случае, когда $n = 1$. Если $f(t) = t + 2t^2 \sin(1/t)$ при $t \neq 0$, $f(0) = 0$, то $f'(0) \neq 0$, f' ограничена на $(-1, 1)$, но f не взаимно однозначна ни в какой окрестности точки 0.

11. Пусть f — вещественная дифференцируемая функция на открытом множестве $E \subset R^n$. Назовем *градиентом* функции f в точке $\mathbf{x} \in E$ вектор $(\nabla f)(\mathbf{x}) \in R^n$, такой, что

$$\mathbf{h} \cdot (\nabla f)(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\,\mathbf{h}$$

при всех $\mathbf{h} \in R^n$ (ср. с упражнением 1). Если $\mathbf{u} \in R^n$ — единичный вектор (т. е. если $|\mathbf{u}| = 1$), то предел

$$(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})]$$

назовем *производной функции f в направлении вектора* $\mathbf{u}$ *в точке* $\mathbf{x}$.

Доказать, что

$$(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla f)(\mathbf{x})$$

и что, стало быть, для любого $\mathbf{x} \in E$ существует вектор $\mathbf{u}$, такой, что

$$|(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x})| = |(\nabla f)(\mathbf{x})| = \|f'(\mathbf{x})\|.$$

Если $(\nabla f)(\mathbf{x}) \neq 0$, то такой вектор $\mathbf{u}$ — единственный.

12. Пусть $\mathbf{f}$ — отображение, которое точке $(x, y) \in R^2$ ставит в соответствие точку $(u, v) \in R^2$, где

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Каково множество значений отображения $\mathbf{f}$? Показать, что якобиан этого отображения отличен от нуля во всех точках пространства R^2. Таким образом, каждая точка пространства R^2 обладает окрестностью, на которой отображение $\mathbf{f}$ взаимно однозначно. Тем не менее $\mathbf{f}$ не является взаимно однозначным на R^2.

Каковы образы прямых, параллельных координатным осям, при отображении $\mathbf{f}$?

13. Исследовать аналогичным образом отображение

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

14. Из системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x + y - z + u^2 &= 0, \\ x - y + 2z + u &= 0, \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

можно x, y, u выразить через z; x, z, u через y; y, z, u через x; но нельзя выразить x, y, z через u.

15. В теореме о неявной функции положить $n = m = 1$ и истолковать эту теорему графически.

16. Положим $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, где

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0)).$$

Вычислить ранг преобразования $\mathbf{f}'(x, y)$ и найти множество значений отображения $\mathbf{f}$.

17. Переставляющие преобразования B_i действительно нужны в теореме 9.21. Чтобы убедиться в этом, покажите, что отобра-

жение $(x, y) \to (y, x)$ пространства R^2 на R^2 *нельзя* разложить в произведение двух простых преобразований ни в какой окрестности начала. Найти другие примеры этого явления.

18. Пусть $\mathbf{f}$ — то же, что в теореме 9.21. Положим $A = \mathbf{f}'(\mathbf{0})$, $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Тогда $\mathbf{f}_1'(\mathbf{0}) = I$. Показать, что

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_n(\mathbf{g}_{n-1}(\ldots(\mathbf{g}_1(\mathbf{x})))$$

в некоторой окрестности нуля, где $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n$ — простые отображения. Таким образом, мы получаем другую теорему о разложении:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{g}_n(\mathbf{g}_{n-1}(\ldots(\mathbf{g}_1(\mathbf{x}))).$$

19. Пусть φ_i — функция, непрерывная на R^1 $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ с носителем в интервале $(2^{-i}\ 2^{1-i})$, такая, что $\int \varphi_i = 1$. Положим

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} [\varphi_i(x) - \varphi_{i+1}(x)]\, \varphi_i(y).$$

Тогда f имеет компактный носитель, непрерывна всюду, кроме точки $(0, 0)$, и

$$\int dy \int f(x, y)\, dx = 0, \quad \text{но} \quad \int dx \int f(x, y)\, dy = 1.$$

Заметьте, что f не ограничена в каждой окрестности точки $(0, 0)$.

20. Пусть $F(x) = \int_{-1}^{1} f(x, y)\, dy$. Рассматривая разностные отношения и переходя к пределу, найти условия, при которых

$$F'(x) = \int_{-1}^{1} (D_1 f)(x, y)\, dy,$$

т. е. условия, которые позволяют «дифференцировать под знаком интеграла».

Вот контрпример: при $x \geqslant 0$ положим

$$f(x, y) = \begin{cases} y, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}, \\ 2\sqrt{x} - y, & \text{если } \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x}, \\ 0, & \text{в прочих случаях} \end{cases}$$

и положим $f(-x, -y) = -f(x, y)$. Тогда функция f непрерывна на R^2,

$$(D_1 f)(0, y) = 0$$

при всех y, но $F(x) = x$, если $|x| < \frac{1}{4}$.

21. Пусть ω и λ суть k- и m-формы соответственно. Какова связь между $\omega \wedge \lambda$ и $\lambda \wedge \omega$?

22. Доказать, что каждая k-форма ω в открытом множестве $E \subset R^n$ может быть приведена к *стандартному виду*

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Показать, что если $\omega = 0$, т. е. если $\int_\Phi \omega = 0$ для всех k-поверхностей Φ в E, то все коэффициенты в этой стандартной записи равны нулю. Показать, что поэтому каждая форма ω *единственным образом* приводится к стандартному виду.

23. Показать, что (72) можно записать в виде

$$\int f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int f(T(\mathbf{x}))\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k,$$

если $T(\mathbf{x}) = (y_1, \ldots, y_k)$ и если $J_T(\mathbf{x}) > 0$.

24. Найти условия, при которых верна формула

$$\int_{\partial\Phi} f\omega = \int_\Phi (df) \wedge \omega + \int_\Phi f \wedge d\omega,$$

и показать, что ее частным случаем является формула интегрирования по частям.

25. Пусть σ есть k-симплекс ($k \geqslant 2$). Показать, что $\partial^2\sigma = 0$, исходя непосредственно из определения граничного оператора ∂. Иными словами, «граница границы» равна нулю. Отметим, что это утверждение согласуется с теоремой Стокса:

$$\int_{\partial^2\Phi} \omega = \int_{\partial\Phi} d\omega = \int_\Phi d^2\omega = 0.$$

26. Пусть Φ есть k-поверхность с множеством параметров Q^k, пусть $\Phi^* = \Phi(Q_k)$ — множество значений отображения Φ; если $\psi = \sum \Phi_i$ есть k-цепь, то положим, по определению, $\psi^* = \bigcup \Phi_i^*$.

Пусть

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}(x_1 + \ldots + x_k)^4 \qquad (\mathbf{x} \in Q_k).$$

Показать, что Φ — ориентированный симплекс класса $\mathscr{C}''$ в R^k и что Φ^* заполняет часть замкнутого единичного шара B^k пространства R^k. (Показатель 4 обеспечивает дифференцируемость в начале координат.)

Показать, что существует k-цепь ψ класса $\mathscr{C}''$ в R^k, такая, что $\psi^* = B^k$, и такая, что $(\partial\psi)^*$ — единичная сфера S^{k-1}, т. е. множество всех $x \in R^k$, таких, что $|x| = 1$.

Этот пример показывает, что $\mathscr{C}''$-образ прямолинейной цепи вполне может быть «круглым», так что теорема 9.50 применима к разнообразным множествам.

27. Положить $k=3$ в упражнении 26 и воспользоваться теоремой Стокса для вычисления интеграла

$$\int_{\partial\Psi} (x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy).$$

Вычислить при $k=2$ интегралы $\int_{\partial\Psi} x\,dy - y\,dx$ и $\int_{\partial\Psi} x\,dy + y\,dx$.

28. Пусть $\omega = \sum a_j(\mathbf{x})\,dx_j$ есть 1-форма класса $\mathscr{C}'$ на открытом множестве $E \subset R^n$. Назовем форму ω *замкнутой*, если $d\omega = 0$. Назовем форму ω *точной* в E, если существует 0-форма f в E, такая, что $\omega = df$.

(a) Доказать, что ω замкнута тогда и только тогда, когда $D_i a_j = D_j a_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

(b) Доказать, что если ω точна, то ω замкнута.

(c) Пусть множество E выпукло, а форма ω замкнута. Доказать, что ω точна в E.

Указание. Зафиксируем $\mathbf{p}_0 \in E$, положим $f(\mathbf{p}) = \int \omega$ при $\mathbf{p} \in E$, где интеграл берется по ориентированному прямолинейному симплексу $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}]$. Применить теорему Стокса к прямолинейным 2-симплексам в E. Показать, что

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum (y_j - x_j) \int_0^1 a_j((1-t)\,\mathbf{x} + t\mathbf{y})\,dt,$$

если $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{y} \in E$, и что $df = \omega$.

Таким образом, утверждение, обратное к (b), верно, если множество E выпукло.

(d) Пусть T — взаимно однозначное $\mathscr{C}''$-отображение выпуклого открытого множества E на открытое множество V. Доказать, что каждая замкнутая 1-форма ω в V точна в V.

Указание. Воспользоваться определением 9.41. Согласно (c), $\omega_T = df$ в E и существует 0-форма g в V, такая, что $f = g_T$. Тогда $\omega_T = d(g_T) = (dg)_T$, так что $\omega = dg$.

(e) Доказать, что если V — то же, что в (d), если γ — замкнутая $\mathscr{C}'$-кривая в V, а ω — замкнутая 1-форма в V, то

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

(*f*) Показать, что утверждения (*d*) и (*e*) становятся неверными, если V — пространство R^2, из которого удалено начало координат, и если

$$\omega = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}.$$

29. Пусть Φ есть 2-поверхность в R^3 с множеством параметров D, пусть $\Phi(u, v) = (x, y, z)$. Назовем *нормалью* к поверхности Φ в точке (u, v) вектор

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{e}_3.$$

Чем объясняется эта терминология? Если f — функция, непрерывная на Φ^* (см. упражнение 26), то положим

$$\int_{\Phi^*} f = \int_D f(\Phi(u, v))\,|\mathbf{N}(u, v)|\,du\,dv.$$

Если $f = 1$, то этот интеграл называют *площадью* поверхности Φ. Показать, что определение площади дает естественные результаты в том случае, когда Φ — линейное отображение, когда Φ определяется равенствами

$$x = \cos u \sin v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos v \quad (0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi)$$

30. Пусть $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ есть $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E \subset R^3$ в пространство R^3 (в физике такое отображение называют векторным полем). *Дивергенция* и *вихрь* (*ротор*) поля $\mathbf{F}$ определяются равенствами

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D_1F_1 + D_2F_2 + D_3F_3,$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = (D_2F_3 - D_3F_2)\,\mathbf{e}_1 + (D_3F_1 - D_1F_3)\,\mathbf{e}_2 + (D_1F_2 - D_2F_1)\,\mathbf{e}_3.$$

С полем $\mathbf{F}$ связаны две дифференциальные формы:

$$\omega = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz,$$

$$\lambda = F_1\,dy \wedge dz + F_2\,dz \wedge dx + F_3\,dx \wedge dy.$$

(*a*) Доказать, что $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$, если $\mathbf{F} \in \mathscr{C}''$.

(*b*) Доказать, что $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, если $\mathbf{F} = \nabla f$ при некоторой $f \in \mathscr{C}''$.

(*c*) Доказать утверждение, обратное к (*b*): если V — то же, что в упражнении 28 (*d*), и если $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ в V, то $\mathbf{F} = \nabla f$ при некоторой f класса $\mathscr{C}''$ в V.

Указание: $\mathbf{F} = \nabla f$ означает, что $\omega = df$; связать $d\omega$ с $\nabla \times \mathbf{F}$.

(*d*) Пусть Ψ есть 3-цепь класса $\mathscr{C}''$ в множестве E, пусть $\Phi = \partial\Psi$. Применяя к λ теорему Стокса, получить «теорему

о дивергенции» Гаусса:

$$\int_{\Psi^*} \nabla \cdot \mathbf{F} = \int_{\Phi^*} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ в обозначениях упражнения 29.

(*e*) Пусть Φ есть 2-цепь класса $\mathscr{C}''$ в множестве E, и пусть $\Gamma = \partial\Phi$. Применяя к ω теорему Стокса, получить формулу

$$\int_{\Phi^*} \nabla \times \mathbf{F} = \int_{\Gamma^*} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t},$$

где $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$ — «касательная составляющая поля $\mathbf{F}$ вдоль Γ». (Мы предоставляем читателю выяснить точный смысл этой последней фразы.)

31. Пусть $\mathbf{F} = f\nabla g$, где f и g класса $\mathscr{C}''$ в открытом множестве $E \subset R^3$. Применяя результат упражнения 30 (*d*), получить тождество

$$\int_{\Psi^*} (\nabla f) \cdot (\nabla g) + \int_{\Psi^*} f\nabla^2 g = \int_{\Phi^*} f \frac{\partial g}{\partial n},$$

где $\nabla^2 g = \nabla \cdot (\nabla g)$, $\partial g/\partial n = (\nabla g) \cdot \mathbf{n}$, а $\mathbf{\Phi} = \partial\mathbf{\Psi}$.

(*a*) Что дает это тождество в том случае, когда $f = 1$, а g — гармоническая функция (т. е. $\nabla^2 g = 0$)?

(*b*) Пусть g гармонична в E и $g = 0$ на Φ^*. Полагая в последнем тождестве $f = g$, доказать, что $g = 0$ на Ψ^*.