ГЛАВА 10

ТЕОРИЯ ЛЕБЕГА

Цель этой главы — изложить основные понятия лебеговой теории меры и интеграла и в довольно общем виде доказать некоторые важнейшие теоремы, не затемняя основных идей множеством сравнительно тривиальных деталей. Поэтому в некоторых случаях доказательства лишь намечаются, а некоторые более легкие предложения формулируются без доказательства. Однако читателю, овладевшему техникой, применявшейся в предыдущих главах, нетрудно будет восстановить пропущенные этапы рассуждений.

Теорию интеграла Лебега можно излагать несколькими различными способами. Из них здесь будет обсуждаться лишь один. Что касается других возможных способов, то за ними мы отсылаем читателя к специальным курсам по теории интеграла, перечисленным в библиографии.

Функции множества

Пусть A и B — какие-нибудь множества. Символом $A-B$ мы будем обозначать множество всех элементов x, таких, что $x \in A$, $x \notin B$. Обозначение $A-B$ применяется не только тогда, когда $B \subset A$. Пустое множество будет обозначаться символом $\varnothing$, и мы будем говорить, что множества A и B не пересекаются, если $A \cap B = \varnothing$.

10.1. Определение. Множество $\mathscr{R}$, состоящее из множеств, называется *кольцом*, если из того, что $A \in \mathscr{R}$ и $B \in \mathscr{R}$, следует, что

$$A \cup B \in \mathscr{R}, \quad A-B \in \mathscr{R}. \tag{1}$$

Ввиду того что $A \cap B = A-(A-B)$, верно также, что $A \cap B \in \mathscr{R}$, если $\mathscr{R}$ — кольцо.

Кольцо $\mathscr{R}$ называется *σ-кольцом*, если

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}, \tag{2}$$

каковы бы ни были множества $A_n \in \mathscr{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Поскольку

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n),$$

то мы имеем также

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R},$$

если $\mathscr{R}$ есть σ-кольцо.

10.2. Определение. Мы будем говорить, что φ — функция множества, определенная на $\mathscr{R}$, если φ каждому множеству $A \in \mathscr{R}$ сопоставляет число $\varphi(A)$, принадлежащее расширенной системе вещественных чисел. Функция φ называется *аддитивной*, если из того, что $A \cap B = \varnothing$, $A \in \mathscr{R}$, $B \in \mathscr{R}$, следует

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B), \tag{3}$$

и φ называется счетно-аддитивной, если из того, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, $A_n \in \mathscr{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, следует

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n). \tag{4}$$

Мы всегда будем предполагать, что не более чем одно из чисел $+\infty$ и $-\infty$ принадлежит множеству значений функции φ; если бы это было не так, то правая часть равенства (3) могла бы не иметь смысла. Кроме того, мы исключим из рассмотрения функции множества, единственным значением которых служит $+\infty$ или $-\infty$.

Интересно отметить, что левая часть равенства (4) не зависит от порядка, в котором расположены множества A_n. Значит, из теоремы о перестановках ряда следует, что ряд в правой части равенства (4) сходится абсолютно, если вообще сходится; если же он расходится, то его частные суммы стремятся к $+\infty$ или к $-\infty$.

Если функция φ аддитивна, то, как легко видеть, она обладает следующими свойствами:

$$\varphi(\varnothing) = 0, \tag{5}$$

$$\varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \varphi(A_1) + \ldots + \varphi(A_n), \tag{6}$$

если $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

$$\varphi(A_1 \cup A_2) + \varphi(A_1 \cap A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2). \tag{7}$$

Если $\varphi(A) \geqslant 0$ при всех A и $A_1 \subset A_2$, то

$$\varphi(A_1) \leqslant \varphi(A_2). \tag{8}$$

Имея в виду это неравенство, неотрицательные функции множества часто называют монотонными. Наконец,

$$\varphi(A-B)=\varphi(A)-\varphi(B), \tag{9}$$

если $B\subset A$ и $|\varphi(B)|<\infty$.

10.3. Теорема. *Пусть φ — счетно-аддитивная функция множества, определенная на кольце $\mathscr{R}$. Пусть $A_n\in\mathscr{R}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\ldots$, $A\in\mathscr{R}$ и*

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Тогда при $n\to\infty$

$$\varphi(A_n)\to\varphi(A).$$

Доказательство. Пусть $A_1=B_1$ и

$$B_n=A_n-A_{n-1} \qquad (n=2, 3, \ldots).$$

Тогда $B_i\cap B_j=\varnothing$ при $i\neq j$, $A_n=B_1\cup\ldots\cup B_n$ и $A=\bigcup B_n$. Значит,

$$\varphi(A_n)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(B_i)$$

и

$$\varphi(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(B_i).$$

Построение меры Лебега

10.4. Определение. Пусть R^p обозначает p-мерное евклидово пространство. *Прямоугольником* в R^p мы называем множество всех точек $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_p)$, таких, что

$$a_i\leqslant x_i\leqslant b_i \qquad (i=1, \ldots, p), \tag{10}$$

или же множество точек, определяемое неравенствами (10), в которых некоторые (или все) знаки $\leqslant$ заменены на $<$. Возможность равенства $a_i=b_i$ при каком-нибудь значении i не исключается; в частности, пустое множество — тоже прямоугольник[1]).

Если A — объединение конечного числа прямоугольников, то говорят, что A — *элементарное множество*.

Пусть I — прямоугольник; положим, по определению,

$$m(I)=\prod_{i=1}^{p}(b_i-a_i),$$

---

[1]) Однако возможность неравенства $a_i>b_i$ следует исключить заранее, так как в противном случае число $m(\varnothing)$ (см. ниже) не будет определено однозначно.— *Прим. перев.*

вне зависимости от того, включается или нет знак равенства в неравенства (10).

Если $A = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ и эти прямоугольники попарно не пересекаются, то мы полагаем

(11) $$m(A) = m(I_1) + \ldots + m(I_n).$$

Обозначим буквой $\mathscr{E}$ множество всех элементарных подмножеств пространства R^p.

Теперь следует убедиться в том, что

(12) $\mathscr{E}$ — кольцо, но не σ-кольцо.

(13) Если $A \in \mathscr{E}$, то A представимо в виде объединения *непересекающихся* прямоугольников.

(14) Если $A \in \mathscr{E}$, то $m(A)$ действительно определено равенством (11). Это значит, что, исходя из двух различных представлений множества A в виде объединения непересекающихся прямоугольников, мы получим одно и то же значение $m(A)$.

(15) Функция m аддитивна на $\mathscr{E}$.

Заметим, что если $p = 1, 2, 3$, то m — это соответственно длина, площадь и объем.

10.5. Определение. Неотрицательная аддитивная функция множества φ, определенная на $\mathscr{E}$, называется *регулярной*, если верно следующее: для любого $A \in \mathscr{E}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существуют множества $F \in \mathscr{E}$, $G \in \mathscr{E}$, такие, что F замкнуто, G открыто, $F \subset A \subset G$ и

(16) $$\varphi(G) - \varepsilon \leqslant \varphi(A) \leqslant \varphi(F) + \varepsilon.$$

10.6. Примеры. (*a*) *Функция множества m регулярна.* Если A — прямоугольник, то требование определения 10.5 выполняется тривиальным образом. Общий случай следует из (13).

(*b*) Положим $R^p = R^1$, и пусть α — монотонно возрастающая функция, определенная на R^1. Положим

$$\mu([a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a-),$$
$$\mu([a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a-),$$
$$\mu((a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a+),$$
$$\mu((a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a+).$$

Здесь $[a, b)$ — множество всех чисел x, таких, что $a \leqslant x < b$, и т. д. Эти множества следует различать из-за возможных разрывов функции α. Если μ определить на элементарных множествах, как в (11), то функция μ оказывается регулярной на $\mathscr{E}$. Доказательство точно такое же, как в (*a*).

Наша следующая цель состоит в доказательстве того, что каждая функция множества, регулярная на $\mathscr{E}$, может быть продолжена до счетно-аддитивной функции множества, определенной на σ-кольце, содержащем $\mathscr{E}$.

10.7. Определение. Пусть функция μ аддитивна, регулярна, неотрицательна и конечна на $\mathscr{E}$. Рассмотрим счетные покрытия какого-нибудь множества $E \subset R^p$ открытыми элементарными множествами A_n:

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Положим, по определению,

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \tag{17}$$

где нижняя грань берется по всем счетным покрытиям множества E открытыми элементарными множествами. Число $\mu^*(E)$ называется *внешней мерой* множества E, соответствующей функции μ.

Ясно, что $\mu^*(E) \geqslant 0$ при всех E и что

$$\mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2), \tag{18}$$

если $E_1 \subset E_2$.

10.8. Теорема. (*a*) *Для любого* $A \in \mathscr{E}$ *имеем* $\mu^*(A) = \mu(A)$.

(*b*) *Если* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, *то*

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n). \tag{19}$$

Отметим, что (*a*) означает, что функция μ^* — продолжение функции μ с кольца $\mathscr{E}$ на множество *всех* подмножеств пространства R^p. Свойство (19) называется *полуаддитивностью*.

Доказательство. Пусть $A \in \mathscr{E}$ и $\varepsilon > 0$.

Из регулярности меры μ следует, что множество A содержится в некотором открытом элементарном множестве G, таком, что $\mu(G) \leqslant \mu(A) + \varepsilon$. Поскольку $\mu^*(A) \leqslant \mu(G)$ и поскольку число ε произвольно, то

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(A). \tag{20}$$

По определению μ^* существует такая последовательность $\{A_n\}$ открытых элементарных множеств, объединение которых содер-

жит множество A, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Регулярность функции μ показывает, что множество A содержит элементарное замкнутое множество F, такое, что $\mu(F) \geqslant \geqslant \mu(A) - \varepsilon$, а так как множество F компактно, то

$$F \subset A_1 \cup \ldots \cup A_N$$

при некотором N. Значит,

$$\mu(A) \leqslant \mu(F) + \varepsilon \leqslant \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_N) + \varepsilon \leqslant \sum_{1}^{N} \mu(A_n) + \varepsilon \leqslant \mu^*(A) + 2\varepsilon.$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (20), получаем утверждение (a).

Пусть теперь $E = \bigcup E_n$, и пусть $\mu^*(E_n) < +\infty$ при всех n. Данному числу $\varepsilon > 0$ отвечают покрытия $\{A_{nk}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, множеств E_n открытыми элементарными множествами, такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leqslant \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon. \tag{21}$$

Тогда

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

откуда следует (19). Если же $\mu^*(E_n) = +\infty$ при некотором n, то неравенство (19), разумеется, тривиально.

10.9. Определение. Для любых множеств $A \subset R^p$, $B \subset R^p$ положим

$$S(A, B) = (A - B) \cup (B - A), \tag{22}$$

$$d(A, B) = \mu^*(S(A, B)). \tag{23}$$

Будем писать $A_n \to A$, если

$$\lim_{n\to\infty} d(A, A_n) = 0.$$

Если существует такая последовательность $\{A_n\}$ элементарных множеств, что $A_n \to A$, то мы будем говорить, что множество A *конечно* μ-*измеримо*, и будем писать $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Если множество A равно объединению счетного семейства конечно μ-измеримых множеств, то мы будем говорить, что A μ-*измеримо*, и будем писать $A \in \mathfrak{M}(\mu)$.

Множество $S(A, B)$ — это так называемая «симметрическая разность» множеств A и B. Мы увидим, что $d(A, B)$ обладает основными свойствами расстояния.

Следующая теорема позволит нам получить нужное распространение функции μ.

10.10. Теорема. *Множество $\mathfrak{M}(\mu)$ является σ-кольцом, а функция μ^* счетно-аддитивна на $\mathfrak{M}(\mu)$.*

Прежде чем обратиться к доказательству этой теоремы, мы изучим некоторые свойства множества $S(A, B)$ и числа $d(A, B)$. Имеем:

$$S(A, B) = S(B, A), \quad S(A, A) = \varnothing, \tag{24}$$

$$S(A, B) \subset S(A, C) \cup S(C, B), \tag{25}$$

$$\left.\begin{array}{l} S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{array}\right\} \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2). \tag{26}$$

Утверждение (24) очевидно, а (25) следует из того, что

$$(A - B) \subset (A - C) \cup (C - B), \quad (B - A) \subset (C - A) \cup (B - C).$$

Первая из формул (26) следует из того, что

$$(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2).$$

Наконец, обозначая через E^c дополнение множества E, получаем

$$S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) = S(A_1^c \cup A_2^c, B_1^c \cup B_2^c) \subset S(A_1^c, B_1^c) \cup S(A_2^c, B_2^c) = \\ = S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2),$$

и последняя из формул (26) получится, если заметить, что

$$A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^c.$$

Согласно (23), (19) и (18), из этих свойств множества $S(A, B)$ следует, что

$$d(A, B) = d(B, A), \quad d(A, A) = 0, \tag{27}$$

$$d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B), \tag{28}$$

$$\left.\begin{array}{l} d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{array}\right\} \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2). \tag{29}$$

Соотношения (27) и (28) показывают, что $d(A, B)$ удовлетворяет требованиям определения 2.17, за исключением того, что из $d(A, B) = 0$ не следует $A = B$. Например, если $\mu = m$, множество A счетно, а B пусто, то

$$d(A, B) = m^*(A) = 0.$$

Чтобы убедиться в этом, покроем n-ю точку множества A прямоугольником I_n, таким, что

$$m(I_n) < 2^{-n}\varepsilon.$$

Но если мы будем считать два множества A и B эквивалентными при условии

$$d(A, B) = 0,$$

то все подмножества пространства R^p разобьются на классы эквивалентности, и $d(A, B)$ превращает множество всех этих классов эквивалентности в метрическое пространство. Тогда $\mathfrak{M}_F(\mu)$ оказывается замыканием множества $\mathscr{E}$ [1]).

Эта интерпретация несущественна для доказательства, но она объясняет идею, лежащую в его основе.

Нам потребуется еще одно свойство числа $d(A, B)$, а именно

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant d(A, B), \tag{30}$$

если по крайней мере одно из чисел $\mu^*(A)$, $\mu^*(B)$ конечно. Действительно, пусть $0 \leqslant \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A)$. Тогда, как показывает неравенство (28),

$$d(A, \varnothing) \leqslant d(A, B) + d(B, \varnothing),$$

т. е.

$$\mu^*(A) \leqslant d(A, B) + \mu^*(B).$$

Но так как $\mu^*(B)$ конечно, то

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leqslant d(A, B).$$

Доказательство теоремы 10.10. Пусть $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, $B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Выберем последовательности $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ так, чтобы $A_n \in \mathscr{E}$, $B_n \in \mathscr{E}$, $A_n \to A$, $B_n \to B$. Тогда (29) и (30) показывают, что

$$A_n \cup B_n \to A \cup B, \tag{31}$$

$$A_n \cap B_n \to A \cap B, \tag{32}$$

$$A_n - B_n \to A - B, \tag{33}$$

$$\mu^*(A_n) \to \mu^*(A), \tag{34}$$

и $\mu^*(A) < +\infty$, так как $d(A_n, A) \to 0$. Согласно (31) и (33), $\mathfrak{M}_F(\mu)$ — кольцо. Согласно (7),

$$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n).$$

Полагая $n \to \infty$, получаем из (34) и теоремы 10.8 (a)

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B).$$

---

[1]) Точнее было бы здесь говорить не о $\mathfrak{M}_F(\mu)$ и $\mathscr{E}$, а о множествах всех классов эквивалентности, содержащих элементы множеств $\mathfrak{M}_F(\mu)$ и $\mathscr{E}$. — *Прим. перев.*

Если $A \cap B = \varnothing$, то $\mu^*(A \cap B) = 0$. Следовательно, функция μ^* аддитивна на $\mathfrak{M}_F(\mu)$.

Пусть теперь $A \in \mathfrak{M}(\mu)$. Тогда A можно представить в виде объединения счетного множества *непересекающихся* множеств из $\mathfrak{M}_F(\mu)$. Действительно, если $A = \bigcup A'_n$, где $A'_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, то положим $A_1 = A'_1$ и

$$A_n = (A'_1 \cup \ldots \cup A'_n) - (A'_1 \cup \ldots \cup A'_{n-1}) \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Тогда

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{35}$$

—требуемое представление. Согласно (19),

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{36}$$

С другой стороны, $A \supset A_1 \cup \ldots \cup A_n$, и, в силу аддитивности функции μ^* на $\mathfrak{M}_F(\mu)$, получаем

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \ldots + \mu^*(A_n). \tag{37}$$

Из (36) и (37) следует, что

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{38}$$

Допустим, что число $\mu^*(A)$ конечно. Положим $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Тогда, как показывает (38),

$$d(A, B_n) = \mu^*\Big(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i) \to 0$$

при $n \to \infty$. Значит $B_n \to A$, а так как $B_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, то легко видеть, что $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$.

Таким образом, мы показали, что $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, если $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ и $\mu^*(A) < +\infty$.

Теперь уже ясно, что функция μ^* счетно-аддитивна на $\mathfrak{M}(\mu)$. Действительно, если

$$A = \bigcup A_n,$$

где $\{A_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств, принадлежащих $\mathfrak{M}(\mu)$, то, как мы показали, (38) выполняется, если $\mu^*(A_n) < +\infty$ при всех n, а в противном случае равенство (38) тривиально.

Наконец, мы должны показать, что $\mathfrak{M}(\mu)$ — это σ-кольцо. Если $A_n \in \mathfrak{M}(\mu)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то ясно, что $\bigcup A_n \in \mathfrak{M}(\mu)$ (теорема 2.14).

Пусть $A \in \mathfrak{M}(\mu)$, $B \in \mathfrak{M}(\mu)$ и

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

где A_n, $B_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Тогда тождество

$$A_n \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_n \cap B_i)$$

показывает, что $A_n \cap B \in \mathfrak{M}(\mu)$, а так как

$$\mu^*(A_n \cap B) \leqslant \mu^*(A_n) < +\infty,$$

то $A_n \cap B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Значит, $A_n - B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, и $A - B \in \mathfrak{M}(\mu)$, так как $A - B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - B)$.

Теперь мы заменим $\mu^*(A)$ на $\mu(A)$, если $A \in \mathfrak{M}(\mu)$. Таким образом, функция μ, определенная первоначально только на $\mathscr{E}$, продолжена до счетно-аддитивной функции множества на σ-кольце $\mathfrak{M}(\mu)$. Эта продолженная функция множества называется *мерой*. В том частном случае, когда $\mu = m$ (на $\mathscr{E}$), она называется лебеговой мерой в пространстве R^p.

10.11. Замечания. (*a*) Если множество A открыто, то $A \in \mathfrak{M}(\mu)$. Действительно, каждое открытое множество в R^p равно объединению счетного семейства открытых прямоугольников. Чтобы в этом убедиться, достаточно построить счетную базу, элементами которой служат открытые прямоугольники.

(*b*) Если $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ и $\varepsilon > 0$, то существуют множества F и G, такие, что

$$F \subset A \subset G,$$

F замкнуто, G открыто и

$$\mu(G - A) < \varepsilon, \qquad \mu(A - F) < \varepsilon. \tag{39}$$

Первое неравенство выполняется потому, что внешняя мера была определена с помощью покрытий *открытыми* элементарными множествами. Второе неравенство получится, если перейти к дополнениям.

(*c*) Мы говорим, что E — *борелевское множество*, если E может быть получено с помощью счетного множества операций, исходя из открытых множеств, причем каждая операция — это либо взятие объединения, либо взятие пересечения, либо переход к дополнению. Множество $\mathscr{B}$ всех борелевских подмножеств пространства R^p образует σ-кольцо; в действительности это наименьшее из σ-колец, содержащих все открытые множества. Согласно замечанию (*a*), $E \in \mathfrak{M}(\mu)$, если $E \in \mathscr{B}$.

(*d*) Если $A \in \mathfrak{M}(\mu)$, то существуют борелевские множества F и G, такие, что $F \subset A \subset G$ и

$$\mu(G - A) = \mu(A - F) = 0. \tag{40}$$

Это следует из (*b*), если взять $\varepsilon = 1/n$ и положить $n \to \infty$.

Поскольку $A = F \cup (A - F)$, мы видим, что каждое $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ представляет собой объединение борелевского множества и множества нулевой меры.

Борелевские множества μ-измеримы при каждом μ. Но множества меры нуль (т. е. множества E, для которых $\mu^*(E) = 0$) могут быть различными для различных μ.

(*e*) Какова бы ни была функция μ, множества меры нуль образуют σ-кольцо.

(*f*) В случае меры Лебега всякое счетное множество имеет меру нуль. Но существуют и несчетные (и даже совершенные) множества меры нуль. Примером может служить множество Кантора: используя обозначения из п. 2.44, легко показать, что

$$m(E_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

а так как $P = \bigcap E_n$, то $P \subset E_n$ при любом n, так что $m(P) = 0$.

10.12. Определение. Пусть X — множество, не обязательно являющееся подмножеством евклидова пространства или вообще какого-нибудь метрического пространства; X называется *пространством с мерой*, если существует σ-кольцо $\mathfrak{M}$ подмножеств множества X (элементы множества $\mathfrak{M}$ называются измеримыми множествами) и неотрицательная счетно-аддитивная функция множества μ (называемая *мерой*), определенная на $\mathfrak{M}$.

Если, кроме того, $X \in \mathfrak{M}$, то X называется *измеримым пространством*.

Например, мы можем взять в качестве X пространство R^p, в качестве $\mathfrak{M}$ — множество всех измеримых подмножеств пространства R^p, а в качестве μ — меру Лебега.

Или в качестве X можно взять множество всех положительных целых чисел, в качестве $\mathfrak{M}$ — множество всех подмножеств множества X, а в качестве $\mu(E)$ — число элементов множества E.

Другой пример дает теория вероятностей, в которой события можно рассматривать как множества, а вероятность наступления события — это аддитивная (или счетно-аддитивная) функция множества.

В следующих разделах мы всегда будем иметь дело с измеримыми пространствами. Следует подчеркнуть, что теория интеграла, к которой мы вскоре перейдем, ни в каком отношении не стала бы проще, если бы мы пожертвовали той степенью общности, которой мы сейчас достигли, и ограничились, скажем,

мерой Лебега на промежутке вещественной прямой. На самом деле основные черты теории с гораздо большей ясностью проявляются именно в общей ситуации, когда хорошо видно, что все зависит только от счетной аддитивности меры μ, определенной на некотором σ-кольце.

Нам будет удобно ввести обозначение

$$\{x \mid P\} \tag{41}$$

для множества всех элементов x, обладающих свойством P.

Измеримые функции

10.13. Определение. Пусть f — функция, определенная на измеримом пространстве X со значениями в расширенной системе вещественных чисел. Функция f называется *измеримой*, если множество

$$\{x \mid f(x) > a\} \tag{42}$$

измеримо при каждом вещественном a.

10.14. Пример. Если $X = R^p$, а $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mu)$ — в соответствии с определением 10.9, — то каждая непрерывная функция f измерима, так как в этом случае множество (42) открыто.

10.15. Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*

(43) $\{x \mid f(x) > a\}$ *измеримо при каждом вещественном* a.

(44) $\{x \mid f(x) \geqslant a\}$ *измеримо при каждом вещественном* a.

(45) $\{x \mid f(x) < a\}$ *измеримо при каждом вещественном* a.

(46) $\{x \mid f(x) \leqslant a\}$ *измеримо при каждом вещественном* a.

Доказательство. Отношения

$$\{x \mid f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \mid f(x) > a - \frac{1}{n}\right\},$$

$$\{x \mid f(x) < a\} = X - \{x \mid f(x) \geqslant a\},$$

$$\{x \mid f(x) \leqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \mid f(x) < a + \frac{1}{n}\right\},$$

$$\{x \mid f(x) > a\} = X - \{x \mid f(x) \leqslant a\}$$

последовательно показывают, что из (43) следует (44), из (44) следует (45), из (45) следует (46), а из (46) следует (43).

Значит, каждое из этих условий можно использовать вместо (42) для определения измеримости.

10.16. Теорема. *Если f измерима, то измерима и $|f|$.*

Доказательство:

$$\{x \mid |f(x)| < a\} = \{x \mid f(x) < a\} \cap \{x \mid f(x) > -a\}.$$

10.17. Теорема. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций. При $x \in X$ положим*

$$g(x) = \sup f_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$h(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x).$$

Тогда функции g и h измеримы.

Конечно, то же верно и в отношении нижней грани и нижнего предела.

Доказательство.

$$\{x \mid g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > a\},$$

$$h(x) = \inf g_m(x), \text{ где } g_m(x) = \sup f_n(x) \quad (n \geqslant m).$$

Следствия. (*a*) *Если f и g измеримы, то* $\max(f, g)$ *и* $\min(f, g)$ *измеримы. Если*

$$f^+ = \max(f, 0), \qquad f^- = -\min(f, 0), \tag{47}$$

то, в частности, f^+ и f^- измеримы.

(*b*) *Предел сходящейся последовательности измеримых функций — измеримая функция.*

10.18. Теорема. *Пусть f и g — измеримые конечные вещественные функции, определенные на множестве X, пусть функция F вещественна и непрерывна на R^2, и пусть*

$$h(x) = F(f(x), g(x)) \qquad (x \in X).$$

Тогда функция h измерима.

В частности, функции $f+g$ и fg измеримы.

Доказательство. Пусть $G_a = \{(u, v) \mid F(u, v) > a\}$. Тогда G_a — открытое подмножество пространства R^2 и

$$G_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

где $\{I_n\}$ — последовательность открытых прямоугольников:

$$I_n = \{(u, v) \mid a_n < u < b_n,\ c_n < v < d_n\}.$$

Поскольку множество

$$\{x \mid a_n < f(x) < b_n\} = \{x \mid f(x) > a_n\} \cap \{x \mid f(x) < b_n\}$$

измеримо, то множество

$$\{x \mid (f(x),\ g(x)) \in I_n\} = \{x \mid a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x \mid c_n < g(x) < d_n\}$$

измеримо. Значит, то же верно и в отношении множества

$$\{x \mid h(x) > a\} = \{x \mid (f(x),\ g(x)) \in G_a\} = \\ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid (f(x),\ g(x)) \in I_n\}.$$

Подводя итоги, мы можем сказать, что все обычные операции анализа, включая операции, связанные с предельным переходом, будучи примененными к измеримым функциям, приводят снова к измеримым функциям; иными словами, все функции, с которыми обычно встречаются, измеримы.

То, что эта формулировка тем не менее довольно груба, видно, однако, из следующего замечания: если $h(x) = f(g(x))$, где функция f измерима, а g непрерывна, то функция h не обязательно измерима.

Читатель, возможно, заметил, что в нашем обсуждении измеримых функций нигде не упоминалась мера. В самом деле, класс функций, измеримых на X, зависит только от σ-кольца $\mathfrak{M}$ (обозначения те же, что в п. 10.12). Например, можно говорить о функциях, измеримых по Борелю на R^p, т. е. о функциях f, для которых множество

$$\{x \mid f(x) > a\}$$

всегда борелевское, не упоминая при этом никакой конкретной меры.

Простые функции

10.19. Определение. Пусть s — вещественная функция, определенная на множестве X. Если множество значений функции s конечно, то мы будем говорить, что s — *простая функция*.

Пусть $E \subset X$, и пусть

$$K_E(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E), \\ 0 & (x \notin E). \end{cases} \tag{48}$$

K_E называется *характеристической функцией* множества E.

Пусть множество значений функции s состоит из различных чисел $c_1, \ldots, c_n$. Пусть

$$E_i = \{x \mid s(x) = c_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}, \tag{49}$$

т. е. каждая простая функция представляет собой конечную линейную комбинацию характеристических функций. Ясно, что s измерима тогда и только тогда, когда множества $E_1, \ldots, E_n$ измеримы.

Оказывается, любую функцию можно приблизить простыми функциями,

10.20. Теорема. *Пусть f — вещественная функция, определенная на множестве X. Тогда существует последовательность $\{s_n\}$ простых функций, такая, что $s_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для всякого $x \in X$. Если функция f измерима, то можно выбрать последовательность $\{s_n\}$ так, чтобы все функции s_n тоже были измеримы. Если $f \geqslant 0$, то последовательность $\{s_n\}$ можно считать монотонно возрастающей.*

Доказательство. Если $f \geqslant 0$, то положим

$$E_{ni} = \left\{x \,\middle|\, \frac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i}{2^n}\right\}, \quad F_n = \{x \mid f(x) \geqslant n\}$$

при $n = 1, 2, 3, \ldots, i = 1, 2, \ldots n2^n$, Пусть

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} K_{E_{ni}} + nK_{F_n}. \tag{50}$$

В общем случае запишем $f = f^+ - f^-$ и применим предыдущую конструкцию к f^+ и f^-.

Заметим, что последовательность $\{s_n\}$, заданная равенством (50), сходится к f равномерно, если f ограничена.

Интегрирование

Мы определим интегрирование на измеримом пространстве X с σ-кольцом $\mathfrak{M}$ измеримых множеств и с мерой μ. Читатель, желающий иметь перед глазами более конкретную ситуацию, может представлять себе X как прямоугольник или как вещественную прямую, а μ — как меру Лебега.

10.21. Определение. Допустим, что функция

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x) \qquad (x \in X,\ c_i > 0) \tag{51}$$

измерима, и пусть $E \in \mathfrak{M}$. Положим

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i). \tag{52}$$

Если функция f измерима и неотрицательна, то мы определим

$$\int_E f\, d\mu = \sup I_E(s), \tag{53}$$

где верхняя грань берется по всем простым функциям, таким, что $0 \leqslant s \leqslant f$.

Левая часть равенства (53) называется *интегралом Лебега функции f относительно меры μ по множеству E*. Заметим, что интеграл может быть равным $+\infty$.

Легко проверить, что

$$\int_E s\, d\mu = I_E(s) \tag{54}$$

для любой неотрицательной простой измеримой функции s.

10.22. Определение. Пусть функция f измерима. Рассмотрим два интеграла

$$\int_E f^+ d\mu, \qquad \int_E f^- d\mu, \tag{55}$$

где f^+ и f^- определены, как в (47).

Если хотя бы один из интегралов (55) конечен, то мы полагаем, по определению,

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu. \tag{56}$$

Если оба интеграла (55) конечны, то и разность (56) конечна, и мы говорим, что функция f *интегрируема* (или *суммируема*) на множестве E в смысле Лебега по отношению к мере μ; мы пишем $f \in \mathcal{L}(\mu)$ на множестве E. Если $\mu = m$, то обычное обозначение таково: $f \in \mathcal{L}$ на множестве E.

Эта терминология может вызвать небольшую путаницу: если (56) равно $+\infty$ или $-\infty$, то интеграл функции f по множеству E определен, хотя функция f и не интегрируема в только что разъясненном смысле слова; f интегрируема по множеству E только тогда, когда ее интеграл по этому множеству конечен.

10.23. Замечания. Следующие свойства очевидны:

(*a*) Если f измерима и ограничена на множестве E и $\mu(E) < +\infty$, то $f \in \mathcal{L}(\mu)$ на E.

(*b*) Если f измерима, причем $a \leqslant f(x) \leqslant b$ при $x \in E$, а $\mu(E) < +\infty$, то

$$a\mu(E) \leqslant \int_E f\,d\mu \leqslant b\mu(E).$$

(*c*) Если f и $g \in \mathscr{L}(\mu)$ на E и если $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in E$, то

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu.$$

(*d*) Если $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, то $cf \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, каково бы ни было конечное число c, и

$$\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu.$$

(*e*) Если $\mu(E) = 0$, а f — измерима, то

$$\int_E f\,d\mu = 0.$$

(*f*) Если $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, $A \in \mathfrak{M}$ и $A \subset E$, то $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на A.

10.24. Теорема. (*a*) *Пусть f измерима и неотрицательна на множестве X. Для $A \in \mathfrak{M}$ положим*

$$\varphi(A) = \int_A f\,d\mu. \tag{57}$$

Тогда функция φ счетно-аддитивна на $\mathfrak{M}$.

(*b*) *То же верно, если $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на X.*

Доказательство. Ясно, что (*b*) следует из (*a*), если мы запишем $f = f^+ - f^-$ и применим (*a*) к f^+ и f^-.

Чтобы доказать (*a*), мы должны показать, что

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n), \tag{58}$$

если $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $A = \bigcup_1^{\infty} A_n$.

Если f — характеристическая функция, то счетная аддитивность функции φ — то же самое, что счетная аддитивность функции μ, так как

$$\int_A K_E\,d\mu = \mu(A \cap E).$$

Если f — простая функция, то f имеет вид (51) и утверждение теоремы также выполняется.

В общем случае для каждой простой измеримой функции s, такой, что $0 \leqslant s \leqslant f$, имеем

$$\int_A s\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s\,d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Поэтому, согласно (53),

$$\varphi(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n). \tag{59}$$

Заметим теперь, что если $\varphi(A_n) = +\infty$ при каком-нибудь n, то (58) тривиально, так как $\varphi(A) \geqslant \varphi(A_n)$. Поэтому пусть $\varphi(A_n) < +\infty$ при всех n.

Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем измеримую функцию s так, что $0 \leqslant s \leqslant f$ и

$$\int_{A_1} s\,d\mu \geqslant \int_{A_1} f\,d\mu - \varepsilon, \quad \int_{A_2} s\,d\mu \geqslant \int_{A_2} f\,d\mu - \varepsilon. \tag{60}$$

Ясно, что

$$\varphi(A_1 \cup A_2) \geqslant \int_{A_1 \cup A_2} s\,d\mu = \int_{A_1} s\,d\mu + \int_{A_2} s\,d\mu \geqslant \varphi(A_1) + \varphi(A_2) - 2\varepsilon,$$

так что

$$\varphi(A_1 \cup A_2) \geqslant \varphi(A_1) + \varphi(A_2).$$

Следовательно, при каждом n

$$\varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geqslant \varphi(A_1) + \ldots + \varphi(A_n). \tag{61}$$

Поскольку $A \supset A_1 \cup \ldots \cup A_n$, то из (61) следует, что

$$\varphi(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n), \tag{62}$$

и (58) вытекает из (59) и (62).

Следствие. *Если $A \in \mathfrak{M}$, $B \subset A$, $\mu(A - B) = 0$ и функция f измерима, то*

$$\int_A f\,d\mu = \int_B f\,d\mu.$$

Поскольку $A = B \cup (A - B)$, это следует из замечания 10.23 (*e*).

10.25. Замечания. Приведенное выше следствие показывает, что множествами меры нуль при интегрировании можно пренебречь.

Если множество

$$\{x \mid f(x) \neq g(x)\} \cap E$$

имеет меру нуль, то мы будем писать $f \sim g$ на E. Тогда $f \sim f$; из $f \sim g$ следует, что $g \sim f$, и из $f \sim g$, $g \sim h$ следует, что $f \sim h$. Это значит, что отношение $\sim$ есть отношение эквивалентности.

Если $f \sim g$ на E, то мы, очевидно, имеем для любого измеримого подмножества A множества E

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$$

при условии, что эти интегралы существуют[1]).

Если свойство P выполняется для каждого $x \in E - A$ и если $\mu(A) = 0$, то обычно говорят, что P выполняется для почти всех $x \in E$ или что P выполняется почти всюду на E. (Смысл этого «почти всюду» зависит, разумеется, от той конкретной меры, которую мы рассматриваем. В литературе, если не оговорено противное, обычно имеют в виду меру Лебега.)

Если $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, то ясно, что значение $f(x)$ конечно почти всюду на E. Поэтому в большинстве случаев мы можем, не умаляя общности, с самого начала предполагать, что функции, с которыми мы имеем дело, принимают только конечные значения.

10.26. Теорема. *Если $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, то и $|f| \in \mathscr{L}(\mu)$ на E и*

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\,d\mu. \tag{63}$$

Доказательство. Запишем $E = A \cup B$, где $f(x) \geqslant 0$ на A и $f(x) < 0$ на B. По теореме 10.24

$$\int_E |f|\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu + \int_B |f|\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu + \int_B f^-\,d\mu < +\infty,$$

так что $|f| \in \mathscr{L}(\mu)$. Поскольку $f \leqslant |f|$ и $-f \leqslant |f|$, мы видим, что

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E |f|\,d\mu, \qquad -\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E |f|\,d\mu,$$

откуда и следует (63).

Поскольку из интегрируемости функции f следует интегрируемость функции $|f|$, то интеграл Лебега часто называют абсолютно сходящимся. Конечно, можно определить и неабсолютно

---

[1]) Более того, если существует один из этих интегралов, то существует и другой.—*Прим. перев.*

сходящиеся интегралы, и при изучении некоторых проблем это даже существенно. Но у этих интегралов отсутствуют наиболее полезные свойства интеграла Лебега, и они играют в анализе несколько менее важную роль.

10.27. Теорема. *Пусть функция f измерима на E, $|f| \leqslant g$, и $g \in \mathscr{L}(\mu)$ на E. Тогда $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E.*

Доказательство. Имеем $f^+ \leqslant g$ и $f^- \leqslant g$.

10.28. Теорема Лебега о монотонной сходимости[1]). *Пусть $E \in \mathfrak{M}$. Пусть $\{f_n\}$ — такая последовательность измеримых функций, что*

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \qquad (x \in E). \tag{64}$$

Пусть функция f определена равенством

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad (x \in E). \tag{65}$$

Тогда

$$\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu \qquad (n \to \infty). \tag{66}$$

Доказательство. Согласно (64), существует такое α, что

$$\int_E f_n \, d\mu \to \alpha \tag{67}$$

при $n \to \infty$, а так как $\int f_n \leqslant \int f$, то

$$\alpha \leqslant \int_E f \, d\mu. \tag{68}$$

Выберем c так, чтобы $0 < c < 1$, и пусть s — простая измеримая функция, такая, что $0 \leqslant s \leqslant f$. Положим

$$E_n = \{x \mid f_n(x) \geqslant cs(x)\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Согласно (64), $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$, а в силу (65)

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{69}$$

При любом n

$$\int_E f_n \, d\mu \geqslant \int_{E_n} f_n \, d\mu \geqslant c \int_{E_n} s \, d\mu. \tag{70}$$

---

[1]) Эта теорема обычно называется теоремой Б. Леви. — *Прим. перев.*

Устремим в (70) n к ∞. Поскольку интеграл — счетно-аддитивная функция множества (теорема 10.24), то, как показывает (69), можно применить теорему 10.3 к последнему интегралу в (70), и мы получим

$$\alpha \geqslant c \int_E s\, d\mu. \tag{71}$$

Устремляя c к единице, мы видим, что

$$\alpha \geqslant \int_E s\, d\mu,$$

а из (53) следует, что

$$\alpha \geqslant \int_E f\, d\mu. \tag{72}$$

Теорема следует теперь из (67), (68) и (72).

10.29. Теорема. *Пусть* $f = f_1 + f_2$, *где* $f_i \in \mathscr{L}(\mu)$ *на* E $(i = 1, 2)$. *Тогда* $f \in \mathscr{L}(\mu)$ *на* E *и*

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f_1\, d\mu + \int_E f_2\, d\mu. \tag{73}$$

Доказательство. Сначала допустим, что $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \geqslant 0$. Если f_1 и f_2 — простые функции, то (73) тривиально следует из (52) и (54). В общем случае выберем монотонно возрастающие последовательности $\{s_n'\}$, $\{s_n''\}$ неотрицательных измеримых простых функций, сходящихся к f_1, f_2. Теорема 10.20 показывает, что это возможно. Положим $s_n = s_n' + s_n''$.

Тогда

$$\int_E s_n\, d\mu = \int_E s_n'\, d\mu + \int_E s_n''\, d\mu,$$

и (73) получится, если мы устремим n к ∞ и применим теорему 10.28.

Теперь допустим, что $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \leqslant 0$. Положим

$$A = \{x \mid f(x) \geqslant 0\}, \quad B = \{x \mid f(x) < 0\}.$$

Тогда функции f, f_1 и $-f_2$ неотрицательны на A. Значит,

$$\int_A f_1\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_A (-f_2)\, d\mu = \int_A f\, d\mu - \int_A f_2\, d\mu. \tag{74}$$

Аналогично функции $-f$, f_1 и $-f_2$ неотрицательны на B, так что

$$\int_B (-f_2)\, d\mu = \int_B f_1\, d\mu + \int_B (-f)\, d\mu,$$

или

$$\int_B f_1\,d\mu = \int_B f\,d\mu - \int_B f_2\,d\mu, \tag{75}$$

и (73) вытекает из (74) и (75).

В общем случае множество E можно разложить на четыре множества E_i, на каждом из которых $f_1(x)$ и $f_2(x)$ сохраняют знак. Из доказанного следует, что

$$\int_{E_i} f\,d\mu = \int_{E_i} f_1\,d\mu + \int_{E_i} f_2\,d\mu \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

и (73) получается, если мы просуммируем эти равенства.

Теорему 10.28 можно следующим образом переформулировать в терминах рядов функций.

10.30. Теорема. *Пусть $E \in \mathfrak{M}$. Если $\{f_n\}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций и*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E), \tag{76}$$

то

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

Доказательство. Частные суммы ряда (76) образуют монотонно возрастающую последовательность.

10.31. Теорема Фату. *Пусть $E \in \mathfrak{M}$. Если $\{f_n\}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций и*

$$f(x) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E),$$

то

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu. \tag{77}$$

В (77) может иметь место строгое неравенство. Пример указан в упражнении 5.

Доказательство. Положим

$$g_n(x) = \inf f_i(x) \qquad (i \geqslant n)$$

при $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ и $x \in E$.

Тогда функция g_n измерима на множестве E и

(78) $$0 \leqslant g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant \ldots,$$

(79) $$g_n(x) \leqslant f_n(x),$$

(80) $$g_n(x) \to f(x) \qquad (n \to \infty).$$

Согласно (78), (80) и теореме 10.28,

(81) $$\int_E g_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu,$$

так что (77) следует из (79) и (81).

10.32. Теорема Лебега об ограниченной сходимости. *Пусть $E \in \mathfrak{M}$. Пусть $\{f_n\}$ — такая последовательность измеримых функций, что*

(82) $$f_n(x) \to f(x) \qquad (x \in E)$$

при $n \to \infty$. Если существует функция g, такая, что

(83) $$|f_n(x)| \leqslant g(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, x \in E),$$

и $g \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, то

(84) $$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Неравенство (83) означает, что функция g ограничивает последовательность $\{f_n\}$; этим объясняется название теоремы. В силу п. 10.25, утверждение теоремы остается верным, если (82) выполняется почти всюду на E.

Доказательство. Заметим сначала, что из теоремы 10.27 следует, что $f_n \in \mathscr{L}(\mu)$ и $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E.

Теорема Фату показывает, что

$$\int_E (f+g) \, d\mu \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \int_E (f_n + g) \, d\mu,$$

так как $f_n + g \geqslant 0$; иначе говоря,

(85) $$\int_E f \, d\mu \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Аналогично, поскольку $g - f_n \geqslant 0$, то

$$\int_E (g - f) \, d\mu \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \int_E (g - f_n \, d\mu,$$

так что

$$-\int_E f\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\left[-\int_E f_n\,d\mu\right],$$

а это значит, что

$$\int_E f\,d\mu \geqslant \varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu. \tag{86}$$

Существование предела в (84) и равенство (84) теперь следуют из (85) и (86).

Следствие. *Если* $\mu(E) < +\infty$, *последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно ограничена на* E *и* $f_n(x) \to f(x)$ *при всех* $x \in E$, *то выполняется* (84).

Сравнение с интегралом Римана

Наша следующая теорема показывает, что каждая функция, интегрируемая по Риману на некотором сегменте, интегрируема на этом сегменте и по Лебегу, и что функции, интегрируемые по Риману, подчиняются довольно ограничительным условиям непрерывности. Теория Лебега позволяет интегрировать функции гораздо более широкого класса. Однако самое значительное ее преимущество состоит, вероятно, в той свободе, с которой в интегралах Лебега оказывается возможным производить операции предельного перехода; с этой точки зрения теоремы о сходимости составляют суть лебеговской теории.

Одна из трудностей, встречающихся в теории Римана, заключается в том, что предел последовательности функций, интегрируемых по Риману (или даже непрерывных), может уже не быть интегрируемым по Риману. В теории Лебега эта трудность почти исключается, так как предел последовательности измеримых функций снова измеримая функция.

Пусть пространством X с мерой служит сегмент $[a, b]$ вещественной прямой с $\mu = m$ (мера Лебега), а $\mathfrak{M}$ — множество всех подмножеств сегмента X, измеримых по Лебегу. Вместо

$$\int_X f\,dm$$

для интеграла Лебега функции f по сегменту $[a, b]$ принято употреблять привычное обозначение

$$\int_a^b f\,dx.$$

Чтобы отличить лебегов интеграл от интеграла Римана, мы будем этот последний обозначать так:

$$\mathscr{R}\int_a^b f\,dx.$$

10.33. Теорема. (*a*) *Если* $f \in \mathscr{R}$ *на* $[a, b]$, *то* $f \in \mathscr{L}$ *на* $[a, b]$ *и*

$$\int_a^b f\,dx = \mathscr{R}\int_a^b f\,dx. \tag{87}$$

(*b*) *Пусть функция* f *ограничена на* $[a, b]$. *Тогда* $f \in \mathscr{R}$ *на* $[a, b]$ *тогда и только тогда, когда функция* f *непрерывна почти всюду на* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть функция f ограничена. Пусть $\{P_k\}$ — такая последовательность разбиений сегмента $[a, b]$, что P_{k+1} — измельчение разбиения P_k и $\mu(P_k) \to 0$ при $k \to \infty$ (в этом доказательстве μ обозначает не меру, а диаметр разбиения). Если P_k — разбиение

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

то положим $U_k(a) = L_k(a) = f(a)$ и

$$U_k(x) = M_i, \quad L_k(x) = m_i \quad (x_{i-1} < x \leqslant x_i,\ i = 1, \ldots, n)$$

(обозначения те же, что и в п. 6.1). Тогда

$$U(P_k, f) = \int_a^b U_k\,dx, \quad L(P_k, f) = \int_a^b L_k\,dx. \tag{88}$$

Поскольку P_{k+1} — измельчение разбиения P_k, то

$$U_1(x) \geqslant U_2(x) \geqslant \ldots \geqslant f(x) \geqslant \ldots \geqslant L_2(x) \geqslant L_1(x) \ (a \leqslant x \leqslant b). \tag{89}$$

Положим

$$U(x) = \lim_{k\to\infty} U_k(x), \quad L(x) = \lim_{k\to\infty} L_k(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{90}$$

Теперь допустим, что $f \in \mathscr{R}$. Ввиду того что $\mu(P_k) \to 0$,

$$U(P_k, f) \to \mathscr{R}\int_a^b f\,dx, \quad L(P_k, f) \to \mathscr{R}\int_a^b f\,dx. \tag{91}$$

Это последнее соотношение не было явно сформулировано в гл. 6 в виде теоремы, но его, конечно, легко вывести из доказательства теоремы 6.14 [см. формулы (28) и (29)]. Согласно (89)

и (90),

$$\int_a^b U_k\,dx \to \int_a^b U\,dx, \qquad \int_a^b L_k\,dx \to \int_a^b L\,dx, \tag{92}$$

так что из (88), (91) и (92) следует, что

$$\int_a^b U\,dx = \int_a^b L\,dx = \mathscr{R}\int_a^b f\,dx. \tag{93}$$

Поскольку $L(x) \leqslant f(x) \leqslant U(x)$ на $[a, b]$, то первое из равенств (93) показывает, что

$$L(x) = f(x) = U(x) \tag{94}$$

почти всюду на $[a, b]$ (упражнение 1). Поскольку L и U измеримы, то это верно и в отношении f. Значит, $f \in \mathscr{L}$, и (87) следует из (93) и (94).

Теперь допустим, что x не принадлежит никакому из разбиений P_k (отметим, что множество всех точек, входящих в состав какого-нибудь разбиения P_k, счетно и потому имеет меру нуль) Совсем легко показать, что тогда функция f непрерывна в точке x в том и только в том случае, когда $U(x) = L(x)$.

Таким образом, если $f \in \mathscr{R}$ на $[a, b]$, то, как показывает (94), функция f непрерывна почти всюду на $[a, b]$. Обратно, если f непрерывна почти всюду на $[a, b]$, то (94) выполнено. Значит, выполнено первое из равенств (93), и, как показывают (92) и (88), для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое k, что

$$U(P_k, f) - L(P_k, f) < \varepsilon,$$

следовательно, по теореме 6.6, $f \in \mathscr{R}$ на $[a, b]$.

Многие соотношения между интегрированием и дифференцированием функций переносятся и в лебеговскую теорию. Если $f \in \mathscr{L}$ на $[a, b]$ и

$$F(x) = \int_a^x f\,dt \quad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{95}$$

то $F'(x) = f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

Обратно, если функция F дифференцируема в каждой точке сегмента $[a, b]$ («почти всюду» здесь недостаточно!) и если $F' \in \mathscr{L}$ на $[a, b]$, то

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Доказательства можно найти в любой из достаточно подробных книг по теории интеграла.

Интегрирование комплексных функций

Пусть f — комплекснозначная функция, определенная на пространстве с мерой X, $f=u+iv$, где u и v — вещественны. Мы будем говорить, что функция f измерима, если обе функции u и v измеримы.

Легко проверить, что суммы и произведения комплексных измеримых функций снова измеримы. Из теоремы 10.18 следует, что $|f|$ — измеримая функция, если измерима комплексная функция f, так как

$$|f|=(u^2+v^2)^{1/2}.$$

Допустим, что μ — мера на X, E — измеримое подмножество X, а f — комплексная функция, определенная на X. Мы будем говорить, что $f\in\mathscr{L}(\mu)$ на E, если f измерима и

$$\int_E |f|\,d\mu<+\infty; \tag{96}$$

при этом мы полагаем, по определению,

$$\int_E f\,d\mu=\int_E u\,d\mu+i\int_E v\,d\mu,$$

если выполнено (96). Ясно, что (96) выполняется тогда и только тогда, когда $u\in\mathscr{L}(\mu)$ и $v\in\mathscr{L}(\mu)$ на E, так как $|u|\leqslant|f|$, $|v|\leqslant|f|$, $|f|\leqslant|u|+|v|$.

Теоремы 10.23 (*a*), (*d*), (*e*), (*f*), 10.24 (*b*), 10.26, 10.27, 10.29, 10.32 могут быть перенесены на интегралы Лебега от комплексных функций. Доказательства совсем просты, и только доказательство теоремы 10.26 представляет некоторый интерес. Вот оно.

Если $f\in\mathscr{L}(\mu)$ на E, то существует комплексное число c, $|c|=1$, такое, что

$$c\int_E f\,d\mu\geqslant 0.$$

Положим $g=cf=u+iv$, где u и v вещественны. Тогда

$$\left|\int_E f\,d\mu\right|=c\int_E f\,d\mu=\int_E g\,d\mu=\int_E u\,d\mu\leqslant\int_E |f|\,d\mu.$$

Заметим, что число $\int g\,d\mu$ вещественно (это следует из первых двух равенств).

Функции класса $\mathscr{L}^2$

В качестве приложения теории Лебега мы изложим обобщение теоремы Парсеваля (которую мы доказали лишь для непрерывных функций в гл. 8) и докажем теорему Рисса—Фишера для ортонормальных систем функций.

10.34. Определение. Пусть X — измеримое пространство. Мы будем говорить, что комплексная функция f принадлежит классу $\mathscr{L}^2(\mu)$ на X, если f измерима и

$$\int_X |f|^2 d\mu < +\infty.$$

Если μ — мера Лебега, то мы будем писать просто $f \in \mathscr{L}^2$. Если $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ (начиная с этого места мы будем опускать слова «на X»), то мы полагаем, по определению,

$$\|f\| = \left\{\int_X |f|^2 d\mu\right\}^{1/2}$$

и называем число $\|f\|$ нормой функции f.

10.35. Теорема. *Пусть* $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ *и* $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$. *Тогда* $fg \in \mathscr{L}(\mu)$ *и*

$$\int_X |fg|\, d\mu \leqslant \|f\| \cdot \|g\|. \tag{97}$$

Это неравенство, как и в случае рядов и интегралов Римана, называется неравенством Шварца. Как и в рассмотренных ранее случаях, оно вытекает из неравенства

$$0 \leqslant \int_X (|f| + \lambda |g|)^2 d\mu = \|f\|^2 + 2\lambda \int_X |fg|\, d\mu + \lambda^2 \|g\|^2,$$

которое выполняется при всяком вещественном λ.

10.36. Теорема. *Если* $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ *и* $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$, *то* $f + g \in \mathscr{L}^2(\mu)$ *и*

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

Доказательство. Неравенство Шварца показывает, что

$$\|f+g\|^2 = \int |f|^2 + \int f\bar{g} + \int \bar{f}g + \int |g|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2.$$

10.37. Замечание. Определим расстояние между двумя функциями f и g в $\mathscr{L}^2(\mu)$, полагая его равным $\|f - g\|$. Ясно,

что все, кроме одного условия п. 2.17, выполняются. Дело в том, что из равенства $\|f-g\|=0$ не следует, что $f(x)=g(x)$ при всех x, а следует только, что $f(x)=g(x)$ при почти всех x. Таким образом, если мы отождествим функции, отличающиеся только на множестве меры нуль, то $\mathscr{L}^2(\mu)$ оказывается метрическим пространством.

Рассмотрим теперь $\mathscr{L}^2$ на сегменте вещественной оси с мерой Лебега.

10.38. Теорема. *Непрерывные функции образуют всюду плотное множество в $\mathscr{L}^2$ на $[a, b]$.*

Точнее, это значит, что для любой функции $f \in \mathscr{L}^2$ на $[a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция g, непрерывная на $[a, b]$ и такая, что

$$\|f-g\| = \left\{\int_a^b (f-g)^2\,dx\right\}^{1/2} < \varepsilon.$$

Доказательство. Мы будем говорить, что последовательность $\{g_n\}$ аппроксимирует функцию f в $\mathscr{L}^2$, если $\|f-g_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть A — замкнутое подмножество сегмента $[a, b]$, а K_A — характеристическая функция этого подмножества. Положим

$$t(x) = \inf|x-y| \qquad (y \in A)$$

и

$$g_n(x) = \frac{1}{1+nt(x)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда функция g_n непрерывна на $[a, b]$, $g_n(x)=1$ на A и $g_n(x) \to 0$ на B, где $B=[a, b]-A$. Значит,

$$\|g_n - K_A\| = \left\{\int_B g_n^2\,dx\right\}^{1/2} \to 0$$

по теореме 10.32. Итак, характеристическую функцию замкнутого множества можно аппроксимировать в $\mathscr{L}^2$ последовательностью непрерывных функций.

Согласно (39), то же верно и в отношении характеристической функции любого измеримого множества, и, стало быть, в отношении любой простой измеримой функции.

Если $f \geqslant 0$ и $f \in \mathscr{L}^2$, то пусть $\{s_n\}$ — такая монотонно возрастающая последовательность простых неотрицательных измеримых функций, что $s_n(x) \to f(x)$ при всех x. Теорема 10.32 показывает, что $\|f-s_n\| \to 0$, так как $|f-s_n|^2 \leqslant |f|^2$.

Отсюда следует утверждение теоремы и в общем случае.

10.39. Определение. Мы будем говорить, что последовательность комплексных функций $\{\varphi_n\}$ есть *ортонормальная* система функций на измеримом пространстве X, если

$$\int_X \varphi_n \bar{\varphi}_m \, d\mu = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ 1 & (n = m). \end{cases}$$

В частности, должно выполняться включение $\varphi_n \in \mathscr{L}^2(\mu)$. Если $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ и если

$$c_n = \int_X f \bar{\varphi}_n \, d\mu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то мы будем писать

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$$

как в определении 8.10.

Аналогично распространяется на $\mathscr{L}^2$ (или даже на $\mathscr{L}$) определение тригонометрического ряда Фурье на $[-\pi, \pi]$. Теоремы 8.11 и 8.12 (неравенство Бесселя) верны для любой $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$. Доказательства дословно те же.

Теперь мы можем доказать теорему Парсеваля.

10.40. Теорема. Пусть

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{98}$$

где $f \in \mathscr{L}^2$ *на* $[-\pi, \pi]$. *Пусть* s_n *есть* n*-я частная сумма ряда* (98) *Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \| f - s_n \| = 0, \tag{99}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \, dx. \tag{100}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме 10.38 существует непрерывная функция g, такая, что

$$\| f - g \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Легко видеть, что функцию g можно подобрать так, чтобы удовлетворялось условие $g(\pi) = g(-\pi)$. Тогда g можно продолжить на всю прямую как непрерывную периодическую функцию. По теореме 8.16 существует тригонометрический многочлен T степени N, такой, что

$$\| g - T \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, по теореме 8.11 (в случае $\mathscr{L}^2$) при $n \geqslant N$ имеем

$$\| s_n - f \| \leqslant \| T - f \| < \varepsilon,$$

откуда и следует (99). Равенство (100) можно вывести из (99) так же, как при доказательстве теоремы 8.16

Следствие. *Если $f \in \mathscr{L}^2$ на $[-\pi, \pi]$ и если*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

то $\| f \| = 0$.

Таким образом, если две функции имеют одинаковые ряды Фурье, то они совпадают почти всюду.

10.41. Определение. Пусть f и $f_n \in \mathscr{L}^2(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f в $\mathscr{L}^2(\mu)$, если $\| f_n - f \| \to 0$. Будем говорить, что $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\mathscr{L}^2(\mu)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует целое N, такое, что из $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ следует неравенство $\| f_n - f_m \| \leqslant \varepsilon$.

10.42. Теорема. *Если $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\mathscr{L}^2(\mu)$, то существует функция $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$, такая, что $\{f_n\}$ сходится к f в $\mathscr{L}^2(\mu)$.*

Другими словами, $\mathscr{L}^2(\mu)$ — полное метрическое пространство.

Доказательство Поскольку $\{f_n\}$ — последовательность Коши, то мы можем найти такую строго возрастающую последовательность $\{n_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, что

$$\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \| < \frac{1}{2^k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Выберем функцию $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$. В силу неравенства Шварца,

$$\int_X | g (f_{n_k} - f_{n_{k+1}}) | \, d\mu \leqslant \frac{\| g \|}{2^k}.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X | g (f_{n_k} - f_{n_{k+1}}) | \, d\mu \leqslant \| g \|. \tag{101}$$

По теореме 10.30 мы можем поменять местами суммирование и интегрирование в (101). Следовательно,

$$| g(x) | \sum_{k=1}^{\infty} | f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x) | < +\infty \tag{102}$$

почти всюду на X. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < +\infty \tag{103}$$

почти всюду на X. Действительно, если бы ряд (103) расходился на множестве E положительной меры, то мы могли бы выбрать функцию g отличной от нуля на множестве положительной меры, содержащемся в E, и прийти к противоречию с (102).

Поскольку k-я частная сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)),$$

сходящегося почти всюду на X, совпадает с

$$f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_1}(x),$$

то равенство

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

определяет $f(x)$ для почти всех $x \in X$, и неважно, как мы определим $f(x)$ в остальных точках множества X.

Теперь мы покажем, что функция f обладает нужными свойствами. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем число N, указанное в определении 10.41. Если $n_k > N$, то теорема Фату показывает, что

$$\|f - f_{n_k}\| \leqslant \varliminf_{i\to\infty} \|f_{n_i} - f_{n_k}\| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, $f - f_{n_k} \in \mathscr{L}^2(\mu)$, а так как $f = (f - f_{n_k}) + f_{n_k}$, то $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$. Кроме того, ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_{n_k}\| = 0.$$

Наконец, из неравенства

$$\|f - f_n\| \leqslant \|f - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f_n\| \tag{104}$$

следует, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f в $\mathscr{L}^2(\mu)$; действительно, выбирая n и n_k достаточно большими, мы можем сделать оба слагаемых в правой части неравенства (104) сколь угодно малыми.

10.43. Теорема Рисса—Фишера. *Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормальная система на X. Допустим, что ряд $\sum |c_n|^2$ сходится, и положим $s_n = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$. Тогда существует функция $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$, такая, что $\{s_n\}$ сходится к f в $\mathscr{L}^2(\mu)$, причем*

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n.$$

Доказательство. Если $n > m$, то

$$\| s_n - s_m \|^2 = | c_{m+1} |^2 + \ldots + | c_n |^2,$$

так что $\{s_n\}$ — последовательность Коши в $\mathscr{L}^2(\mu)$. По теореме 10.42 существует функция $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$, такая, что

$$\lim_{n \to \infty} \| f - s_n \| = 0.$$

Теперь при $n > k$

$$\int_X f\bar{\varphi}_k d\mu - c_k = \int_X f\bar{\varphi}_k d\mu - \int_X s_n\bar{\varphi}_k d\mu,$$

так что

$$\left| \int_X f\bar{\varphi}_k d\mu - c_k \right| \leqslant \| f - s_n \| \cdot \| \varphi_k \| = \| f - s_n \|.$$

Полагая $n \to \infty$, получаем

$$c_k = \int_X f\bar{\varphi}_k d\mu \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

и доказательство закончено.

10.44. Определение. Ортонормальная система $\{\varphi_n\}$ называется *полной*, если из того, что $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ и

$$\int_X f\bar{\varphi}_n d\mu = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

следует, что $\| f \| = 0$.

Из теоремы 10.40 и равенства Парсеваля (100) следует полнота тригонометрической системы. Обратно, равенство Парсеваля выполняется для любой полной ортонормальной системы.

10.45. Теорема. *Пусть $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормальная система. Если $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ и если*

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n, \tag{105}$$

то

$$\int_X | f |^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2. \tag{106}$$

Доказательство. Из неравенства Бесселя следует, что ряд $\sum | c_n |^2$ сходится. Положим

$$s_n = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n.$$

В силу теоремы Рисса—Фишера существует функция $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$, такая, что

$$g \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \tag{107}$$

и $\|g - s_n\| \to 0$. Значит, $\|s_n\| \to \|g\|$. Поскольку

$$\|s_n\|^2 = |c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2.$$

то

$$\int_X |g|^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \tag{108}$$

Теперь из (105), (107) и полноты системы $\{\varphi_n\}$ следует, что $\|f - g\| = 0$, так что из (108) следует (106).

Комбинируя теоремы 10.43 и 10.45, мы приходим к очень интересному выводу: каждая полная ортонормальная система порождает взаимно однозначное соответствие между функциями $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ (причем функции, совпадающие почти всюду, отождествляются) и последовательностями $\{c_n\}$, для которых сходится ряд $\sum |c_n|^2$. Представление

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

и равенство Парсеваля показывают, что $\mathscr{L}^2(\mu)$ можно рассматривать как бесконечномерное евклидово пространство (так называемое «гильбертово пространство»), в котором точка f имеет координаты c_n, а функции φ_n служат координатными векторами.

Упражнения

1. Пусть $f \geqslant 0$ и $\int_E f\, d\mu = 0$. Доказать, что $f(x) = 0$ почти всюду на E.

Указание. Пусть E_n — подмножество множества E, на котором $f(x) > 1/n$. Положим $A = \bigcup E_n$; $\mu(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(E_n) = 0$ при всех n.

2. Если $\int_A f\, d\mu = 0$ для всякого измеримого подмножества A множества E, то $f(x) = 0$ почти всюду на E.

3. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций. Доказать, что множество точек x, в которых $\{f_n(x)\}$ сходится, измеримо.

4. Если $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, а функция g ограничена и измерима на E, то $fg \in \mathscr{L}(\mu)$ на E.

5. Положим

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (0\leqslant x\leqslant 1/2), \\ 1 & (1/2<x\leqslant 1), \end{cases}$$

$$f_{2k}(x)=g(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

$$f_{2k+1}(x)=g(1-x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

Тогда $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$,

но

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\frac{1}{2}.$$

(ср. с (77)).

6. Пусть

$$f_n(x)=\begin{cases} \frac{1}{n} & (|x|\leqslant n), \\ 0 & (|x|>n). \end{cases}$$

Тогда $f_n(x)\to 0$ равномерно на R^1, но

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n\,dx=2 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

(Мы пишем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ вместо $\int\limits_{R^1}$.) Таким образом, из равномерной сходимости не следует ограниченная сходимость в смысле теоремы 10.32. Однако на множествах конечной меры равномерно сходящиеся последовательности ограниченных функций сходятся ограниченно.

7. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$

Указание. Рассмотреть пример 10.6 (*b*) и теорему 10.33.

8. Если $f\in\mathscr{R}$ на $[a, b]$ и если $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$, то $F'(x)=f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

9. Доказать, что функция F, заданная равенством (95), непрерывна на $[a, b]$.

10. Если $\mu(X)<+\infty$ и $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$ на X, то $f\in\mathscr{L}(\mu)$ на X. Если

$$\mu(X)=+\infty,$$

то это, вообще говоря, неверно. Например, если

$$f(x)=\frac{1}{1+|x|},$$

то $f\in\mathscr{L}^2$ на R^1, но $f\notin\mathscr{L}$ на R^1.

11. Если $f, g\in\mathscr{L}(\mu)$ на X, то определим расстояние между f и g, полагая его равным

$$\int_X |f-g|\,d\mu.$$

Доказать, что $\mathscr{L}(\mu)$ — полное метрическое пространство.

12. Допустим, что

(a) $|f(x, y)|\leqslant 1$, если $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$,

(b) при фиксированном x функция $f(x, y)$ непрерывна по y,

(c) при фиксированном y функция $f(x, y)$ непрерывна по x.

Положим

$$g(x)=\int_0^1 f(x, y)\,dy \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

Непрерывна ли функция g?

13. Рассмотрим функции

$$f_n(x)=\sin nx \qquad (n=1, 2, 3, \ldots, -\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

как точки пространства $\mathscr{L}^2$. Доказать, что множество этих точек замкнуто и ограничено, но не компактно.

14. Доказать, что комплексная функция f измерима тогда и только тогда, когда множество $f^{-1}(V)$ измеримо, каково бы ни было открытое плоское множество V.

15. Пусть $\mathscr{R}$ — кольцо элементарных подмножеств промежутка $(0, 1]$. Если $0<a\leqslant b\leqslant 1$, то положим

$$\varphi([a, b])=\varphi([a, b))=\varphi((a, b])=\varphi((a, b))=b-a,$$

и

$$\varphi((0, b))=\varphi((0, b])=1+b,$$

если $0<b\leqslant 1$. Показать, что этим определена аддитивная функция множества на $\mathscr{R}$, которая не регулярна и не может быть продолжена до функции, счетно-аддитивной на σ-кольце.

16. Пусть $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность положительных целых чисел, а E — множество всех точек $x\in(-\pi, \pi)$, в которых сходится последовательность $\{\sin n_k x\}$. Доказать, что $m(E)=0$.

Указание. При любом $A \subset E$

$$\int_A \sin n_k x \, dx \to 0$$

и

$$2 \int_A (\sin n_k x)^2 \, dx = \int_A (1 - \cos 2n_k x) \, dx \to m(A) \text{ при } k \to \infty.$$

17. Допустим, что $E \subset (-\pi, \pi)$, $m(E) > 0$, $\delta > 0$. Воспользоваться неравенством Бесселя для доказательства того, что имеется не более чем конечное число таких целых n, что $\sin nx \geqslant \delta$ при всех $x \in E$.

18. Пусть $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$, $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$. Доказать, что

$$\left| \int f\bar{g} \, d\mu \right|^2 = \int |f|^2 d\mu \int |g|^2 d\mu$$

тогда и только тогда, когда существует такое число c, что $g(x) = cf(x)$ почти всюду. (Ср. с теоремой 10.35.)