ЛЕКЦИЯ 2

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ И МЕТОДОВ. МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО ЕГИПТА И ВАВИЛОНА

Процесс формирования математических понятий и регулярных приемов решения определенных классов элементарных задач охватывает огромный промежуток времени. Его начало теряется в глубине веков; заканчивается он лишь тогда, когда совокупность этих понятий и методов и их содержание делаются достаточно богатыми, чтобы образовать логически связанные системы — начальные формы математических теорий. Последние возникают в математике около VI—V вв. до н. э.

Материальные свидетельства, по которым можно изучать этот самый ранний период в истории математики, крайне немногочисленны и неполны. Исследователю приходится привлекать данные общей истории культуры человечества, по преимуществу археологические материалы и факты истории языка. История математики периода ее зарождения практически неотделима от этих данных.

Формы и пути развития математических знаний у различных народов весьма разнообразны. Однако при всем своеобразии путей развития общим для всех народов является то, что все основные понятия математики: понятие числа, фигуры, площади, бесконечно продолжающегося натурального ряда и т. д. — возникли из практики и прошли длинный путь совершенствования.

Например, понятие числа возникло вследствие практической необходимости пересчета предметов. Вначале счет производился с помощью подручных средств: пальцев, камней, еловых шишек и т. д. Следы этого сохранились в названии математических исчислений: calculus, которое имеет латинское происхождение и означает: счет камешками. Запас чисел на ранних ступенях весьма ограничен. Ряд известных и используемых натуральных чисел конечен и удлиняется лишь постепенно. Сознание неограниченной

продолжимости натурального ряда является признаком уже сравнительно высокого уровня знаний и культуры.

Наряду с употреблением все бо́льших и бо́льших чисел возникали и развивались их символы, а сами числа образовывали системы. Для ранних периодов истории материальной культуры характерно разнообразие числовых систем. Историческое развитие постепенно приводило к совершенствованию и унификации систем счисления. Употребляемая ныне во всех странах десятичная позиционная система нумерации — итог длительного исторического развития. Ей предшествовали:

1. Различные иероглифические непозиционные системы. В каждой из них строится система так называемых узловых чисел (чаще всего 1, 10, 100, 1000, ...). Каждое такое число имеет индивидуальный символ — иероглиф. Остальные числа (их называют алгоритмическими) образуются приписыванием с той или другой стороны узлового числа других узловых чисел и повторением их. Примерами таких систем являются системы: египетская, финикийская, пальмирская, критская, сирийская, аттическая (или Геродианова), старокитайская, староиндусская (карошти), ацтекская, римская. Последняя, например, имеет систему узловых чисел: I, V, X, L, C, D, M, построенную по десятичному признаку с заметным влиянием пятиричной системы.

2. Алфавитные системы счисления. В этих системах буквы алфавита, взятые по 9, используются соответственно для обозначения единиц, десятков и сотен. Каждой букве при этом дается отличительный знак, указывающий, что она используется как число. В случае, если букв алфавита недостаточно, привлекаются дополнительные буквы или знаки. Типичный пример алфавитной системы — греческая ионическая (древнейшая сохранившаяся запись, сделанная по этой системе, относится к V в. до н. э.):

$\overline{\alpha}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\gamma}$	$\overline{\delta}$	$\overline{\varepsilon}$	$\overline{\varsigma}$ (дигамма)	$\overline{\zeta}$	$\overline{\eta}$	$\overline{\vartheta}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\overline{\iota}$	$\overline{\varkappa}$	$\overline{\lambda}$	$\overline{\mu}$	$\overline{\nu}$	$\overline{\xi}$	$\overline{o}$	$\overline{\pi}$	$\overline{q}$ (коппа)
10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\overline{\rho}$	$\overline{\sigma}$	$\overline{\tau}$	$\overline{\upsilon}$	$\overline{\varphi}$	$\overline{\chi}$	$\overline{\psi}$	$\overline{\omega}$	$\overline{\text{ϡ}}$ (сампи)
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Запись чисел по этой системе ясна из примера: $\overline{\upsilon\mu\delta}=444$. Чтобы записать числа, бо́льшие тысячи, необходимо усложнять знаки, например: $,\overline{\alpha}=1000$, $\overline{\beta}=2000$ и т. д.

Алфавитные системы имеют преимущества краткости записи, однако они мало пригодны для оперирования с большими числами и требуют больших усилий для запоминания.

Примерами алфавитной системы, кроме приведенной, явля-

ются: древнеславянская (кириллица и глаголица), еврейская, арабская, грузинская, армянская и др.

3. Позиционные недесятичные, а затем десятичная система. К позиционным недесятичным системам относятся: вавилонская, индейская (племени майя на полуострове Юкатан), индийская, современная двоичная.

Записи в позиционной десятичной системе с нулем впервые появились около 500 г. н. э. в Индии.

Также в результате длительного исторического развития из повседневной практической деятельности людей сформировались другие математические понятия: площади, объемы и другие абстракции пространственных свойств предметов.

Накопление знаний как численно-арифметического, так и геометрического характера создало следующие предпосылки для формирования математических теорий:

а) возможность предварять непосредственное оперирование с вещами оперированием с их упрощенными, схематическими изображениями и наименованиями (символами). На более поздней ступени это повело к развитию числовых систем и геометрических построений;

б) умение заменять конкретную задачу канонической задачей более общего вида, решаемой по определенным правилам, охватывающим целую совокупность частных случаев. Речь идет о первичных формах создания общих алгоритмов и связанных с ними математических исчислений.

Когда в истории наступает такой период, что указанные предпосылки оказываются действующими в заметных масштабах, а в обществе образуется прослойка людей, умеющих пользоваться определенной совокупностью математических приемов, тогда появляются основания говорить о начале существования математики как науки, о наличии ее элементов.

Рассмотрим конкретно ранние стадии формирования математики на примере сохранившихся памятников математической культуры древних египтян и вавилонян.

О математике древнего Египта. Наши познания о древнеегипетской математике основаны главным образом на двух больших папирусах математического характера и на нескольких небольших отрывках. Один из больших папирусов носит название математического папируса Ринда (по имени обнаружившего его ученого) и находится в Лондоне. Он имеет приблизительно 5,5 *м* в длину и 0,32 *м* в ширину. Другой большой папирус, почти такой же длины и 8 *см* в ширину, находится в Москве. Содержащиеся в них математические сведения относятся примерно к 2000 г. до н. э,

Папирус Ринда представляет собой собрание 84 задач прикладного характера. При решении этих задач производятся дейст-

вия с дробями, вычисляются площади прямоугольника, треугольника, трапеции и круга (последняя $= \left(\frac{8}{9}d\right)^2$, что соответствует грубому приближению $\pi = 3{,}1605...$), объемы параллелепипеда, цилиндра, размеры пирамид. Имеются также задачи на пропорциональное деление, а при решении одной задачи находится сумма геометрической прогрессии.

В московском папирусе собраны решения 25 задач. Большинство их такого же типа, как и в папирусе Ринда. Кроме того, в одной из задач (№ 14) правильно вычисляется объем усеченной пирамиды с квадратным основанием. В другой задаче (№10) содержится самый ранний в математике пример определения площади кривой поверхности: вычисляется боковая поверхность корзины, т. е. полуцилиндра, высота которого равна диаметру основания.

При изучении содержания математических папирусов обнаруживается следующий уровень математических знаний египтян.

Ко времени написания этих документов у древних египтян уже сложилась определенная система счисления: десятичная иероглифическая. Для узловых чисел вида 10^k ($k=0,1, 2, ..., 7$) установлены индивидуальные иероглифы. Алгоритмические числа записывались комбинациями узловых чисел. С помощью этой системы египтяне справлялись со всеми вычислениями, в которых употребляются целые числа. Что касается дробей, то египтяне создали специальный аппарат, опиравшийся на понимание дроби только как доли единицы. В силу этого представления употреблялись лишь дроби аликвотные (вида $\frac{1}{n}$) и некоторые индивидуальные, как например $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. Все результаты, которые должны были выражаться дробями вида $\frac{m}{n}$, выражались суммой аликвотных дробей. Для облегчения этих операций были составлены специальные таблицы, например таблица чисел вида $\frac{2}{n}$ ($n=3,..., 101$). Интересно отметить, что в этой таблице подбор слагаемых неоднозначен. Таблицы, по-видимому, составлялись долгое время, складывались постепенно и в дошедшем до нас виде представляли просто сводку достигнутых результатов. Кстати, «тривиальное» разложение $\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$ никогда не встречается, вероятно, в силу своей очевидности.

Сложились также определенные приемы производства математических операций с целыми числами и дробями. Общим для всей вычислительной техники египтян являлся ее аддитивный характер, при котором все процедуры по возможности сводятся к сложению. Совместно с примитивным пониманием дроби только

как части единицы эта особенность обусловила своеобразный характер вычислений.

При умножении, например, преимущественно используется способ постепенного удвоения одного из сомножителей и складывания подходящих частных произведений (отмечены звездочкой)

(12·12)	1	12
	2	24
	*4	48
	*8	96
	Вместе	144

$\left(\frac{2}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{30}\cdot 10\right)$	1	$\frac{2}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{30}$
	*2	$1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{30}$
	4	$3\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{10}$
	*8	$7\ \frac{1}{5}$
	Вместе	$8\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{30}$ или 9.

При делении также используется процедура удвоения и последовательного деления пополам. Деление, по-видимому, было самой трудной математической операцией для египтян. В нем наблюдается самое большое разнообразие приемов. Так, иногда в качестве промежуточного действия применялось нахождение двух третей или одной десятой доли числа и т. п.:

(19:8)	1	8
	*2	16
	$\frac{1}{2}$	4
	*$\frac{1}{4}$	2
	*$\frac{1}{8}$	1

т. е. $19:8=2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$,

(16:3)	*1	3
	2	6
	*4	12
	$\frac{2}{3}$	2
	*$\frac{1}{3}$	1

т. е. $16:3=5\frac{1}{3}$

(4:15)	1	15
	$\frac{1}{10}$	$1\frac{1}{2}$
	*$\frac{1}{5}$	3
	*$\frac{1}{15}$	1

т. е. $4:15=\frac{1}{5}\frac{1}{15}$.

Кроме этих примеров, приведем еще пример одной из задач: «Сало. Годовой сбор 10 беша. Какой ежедневный сбор? Обрати 10 беша в ро. Это будет 3200. Обрати год в дни. Это будет 365. Раздели 3200 на 365. Это $8\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{2190}$. Обрати. Это $\frac{1}{10}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2190}\ \frac{1}{64}$ беша и $3\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{2190}$ ро. Делай, как делается»:

1	365	$\frac{2}{3}$	$243\ \frac{1}{3}$
2	730	$\frac{1}{10}$	$36\ \frac{1}{2}$
4	1460	$\frac{1}{2190}$	$\frac{1}{6}$
8	2920		

Вместе $8\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{2190}$.

В левом столбце производится постепенный подбор частного. Первый результат: 8 дает разницу между истинным и частичным делимым: $3200-2920=280$. Сомножитель $\frac{2}{3}$ дает: $365\cdot\frac{2}{3}=$ $=243\frac{1}{3}$. Еще до 280 не хватает $36\frac{2}{3}$. Очередной подбор $\frac{1}{10}$ дает уже разницу в $\frac{1}{6}$ (так как $36\frac{2}{3}-36\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$). Остается только подобрать число, которое, будучи умножено на 365, дало бы $\frac{1}{6}$. Это $\frac{1}{2190}$.

Таким образом частное отыскивается постепенным подбором, для которого еще нет единого метода.

Часто встречается операция, называемая «х а у» («куча»), соответствующая решению линейного уравнения вида

$$ax+bx+\ldots\ldots+cx=\alpha.$$

При сложении дробей, имеющих разные знаменатели, египтяне использовали умножение их на вспомогательные числа. Способы подбора этих вспомогательных чисел не дают, однако, права судить об этом приеме как о единообразном процессе, адекватном способу приведения дробей к общему знаменателю. Исторические реконструкции во многом еще спорны и не подтверждены достаточным количеством фактов.

Материалы, содержащиеся в папирусах, позволяют утверждать, что за 20 веков до нашей эры в Египте начали складываться элементы математики как науки. Эти элементы еще только начинают выделяться из практических задач, целиком подчинены их содержанию. Техника вычислений еще примитивна, методы решения задач не единообразны. Однако материалов, которые позволяли бы вообще судить о развитии математики в Египте, еще недостаточно. Наличные материалы мы использовали поэтому лишь в качестве одного из примеров того, в какое время и в какой форме начинает складываться математическая наука.

О математике древнего Вавилона. Другим примером того же рода может служить математическое наследие древнего Вавилона. Это название обычно распространяется на совокупность государств, располагавшихся в междуречье Тигра и Евфрата и существовавших в период от 2000 до 200 г. до н. э. От этих государств дошло до нас около ста тысяч глиняных табличек с записями на них, сделанными клинописью. Однако табличек с текстами математического содержания известно только около 50, а математических таблиц без текста — около 200.

Вавилонская система имеет два основных элемента: «клин» ∇ с числовым значением 1 и «крючок» $\lhd$ с числовым значением 10. Повторением этих знаков можно записать числа от 1 до 59. Любое число записывается слева направо по принципу $N=\alpha_0\cdot 60^\circ+$

$+\alpha_1 60^1+\alpha_2 60^2+\ldots$ Таким образом, система счисления оказывается позиционной 60-ричной. Однако эта система не знает нуля, а один и тот же знак «клина» может обозначать не только единицу, но любое число вида $60^{\pm k}$ (k — натуральное число). Различать числа, написанные в такой системе (она называется неабсолютной), оказывается возможным лишь исходя из условий задачи.

Содержание табличек показывает, что на основе этой системы были созданы многие единообразные правила арифметических действий как с целыми числами, так и с дробями. Для облегчения действий существовали таблицы умножения (от $1\cdot 1$ до $60\cdot 60$). При перемножении больших чисел с помощью таблицы умножения находились частичные произведения, которые затем складывались. Деление производилось с помощью таблиц обратных значений (так как $в{:}a = в.\frac{1}{a}$).

Кроме указанных таблиц, вавилоняне использовали: таблицу квадратов целых чисел, их кубов, обращенные таблицы (таблицы квадратных корней), таблицы чисел вида n^3+n^2 и т. д.

В ряде вавилонских текстов содержится исчисление процентов за долги, пропорциональное деление. Имеется также ряд текстов, посвященных решению задач, которые с современной точки зрения сводятся к уравнениям 1-й, 2-й и даже 3-й степени.

Б. Л. ван дер Варден классифицировал все приемы решения задач в вавилонских табличках. Он пришел к выводу, что эти приемы эквивалентны приемам решения следующих десяти видов уравнений и их систем:

а) Уравнения с одним неизвестным: $ax=b$, $x^2=a$; $x^2\pm ax=b$; $x^3=a$; $x^2(x+1)=a$.

б) Системы уравнений с двумя неизвестными: $x\pm y=a$, $xy=b$; $x\pm y=a$, $x^2+y^2=b$.

Кроме того, вавилонянам были известны: суммирование арифметических прогрессий; суммы вида

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k=2^n+(2^n-1);$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n\right)\sum_{k=1}^{n} k.$$

Наконец, в 1945 г. Нейгебауер и Сакс опубликовали расшифровку чрезвычайно интересной таблички, хранящейся в библиотеке Колумбийского университета (США). В ней оказался перечень прямоугольных треугольников с рациональными сторонами, т. е. *троек* пифагоровых чисел $x^2+y^2=z^2$. Реконструкция метода их подбора приводит, по-видимому, к формулам: $x=p^2-q^2$; $y=2pq$; $z=p^2+q^2$, вошедшим в теорию чисел под именем Диофантовых.

Геометрические знания вавилонян, по-видимому, превышали египетские, так как в текстах, помимо общих типов задач, встречаются начатки измерения углов и тригонометрических соотношений. В основном, впрочем, они тоже состояли из вычислений площадей и объемов прямолинейных фигур, обычных для элементарной геометрии. Площадь круга вычислялась по формуле $S = \frac{c^2}{12}$ (c — длина окружности), откуда получается плохое еще приближение : $\pi = 3$. Имелись также и способы приблизительного вычисления объемов, основанные на своеобразном усреднении размеров. Например, объем неравностороннего вала вычислялся по формуле

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a_1+b_1}{2}\right) \cdot \frac{h+h_1}{2}\, l.$$

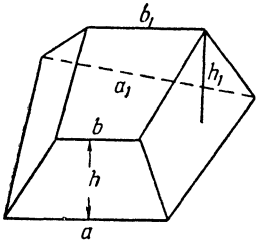

Рис. 1

Внимание ряда исследователей привлекала и пленяла высокая алгоритмичность, проявлявшаяся в математических текстах древнего Вавилона. Это давало повод к высказыванию предположений, что в те времена культивировались общие методы, отвлеченные от конкретных задач и представлявшие своеобразную алгебру (Нейгебауер, Фогель). Однако существуют и более осторожные оценки математических достижений вавилонян.

Вавилонские математические традиции распространялись на сопредельные государства Ближнего Востока и могут быть прослежены в них вплоть до эпохи эллинизма (ок. 330 г. — ок. 30 г. до н. э.).

Приведенные примеры показывают, как в разных странах происходил процесс накапливания большого конкретного математического материала в виде приемов арифметических действий, способов определения площадей и объемов, методов решения некоторых классов задач, вспомогательных таблиц и т. п. Примерно такой же процесс накопления математических знаний происходил в Китае и в Индии, о чем будет сказано в одной из дальнейших лекций.

Итак, к середине первого тысячелетия до н. э. в ряде стран Средиземноморского бассейна сложились достаточные условия для того, чтобы математика могла быть осмыслена как самостоятельная наука, чтобы были выделены как самостоятельный объект человеческой мысли ее основные понятия и предложения, чтобы форма этого выделения оказалась достаточно общей и абстрактной для введения логических доказательств. Эта следующая фаза развития математики с наибольшей силой определилась в античной Греции к VI—V вв. до н. э.