ЛЕКЦИЯ 3

ПЕРВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ В АНТИЧНОЙ ГРЕЦИИ

Математика древнего Египта и Вавилона относится к периоду зарождения математики. Следующий период называется периодом элементарной математики. Характерным обстоятельством, позволяющим выделить начало этого периода, является рассмотрение наряду с узкопрактическими задачами систем основных идей в отдельных областях математики. Эти системы обобщали математическую практику и отражали объективные закономерности математического мышления людей. Они являлись первыми математическими теориями. Процесс их формирования являлся частью более общего процесса становления первых естественнонаучных теорий. Классическим примером образования математических теорий и становления математики как науки является математика древней Греции.

В период VI—IV вв. до н. э., который мы здесь будем рассматривать, античная Греция представляла собой совокупность рабовладельческих государств — полисов (городов), ведущих оживленную торговлю как между собой, так и с другими государствами Средиземноморского бассейна: Египтом, Финикией, Персией и т. д. В государствах античной Греции техника, наука и культура достигли высокого уровня, о чем свидетельствуют с большой убедительностью сохранившиеся прекрасные памятники. Дошедшие до нас естественнонаучные и философские труды античных ученых и сведения о них показали, что в древней Греции сложились все основные типы мировоззрений, действовали естественнонаучные школы. Ведущее место среди греческих натурфилософских школ последовательно занимали: ионийская (VII—VI вв. до н. э.), пифагорейская (VI—V вв. до н. э.) и афинская (со второй половины V в. до н. э.). В этих школах с большой полнотой и обстоятельностью разрабатывались и математические вопросы.

Вклад этих школ в развитие науки оказался настолько значительным, что даже в наше время «теоретическое естествознание, если оно хочет проследить историю возникновения и развития своих теперешних общих положений, вынуждено возвращаться к грекам» (Ф. Энгельс. Анти-Дюринг, 1949, стр. 25).

Обратимся с этой целью к грекам и мы. При этом мы не будем, разумеется, претендовать на монографическое описание богатой фактами истории античной математики. Коснемся лишь отдельных вопросов, представляющих, по нашему мнению, интерес для современной математики. Первым из них выберем вопрос о том, как и в силу каких причин возникают математические теории. В историко-математическом плане это приводит нас к вопросу о путях преобразования накопленных математических фактов, воспринятых и усвоенных греками, в теоретическую науку.

В последующих лекциях мы остановимся на первых аксиоматических построениях античной математики, на разработке инфинитезимальных методов и на античных прообразах аналитической геометрии.

В античной математике этого времени практические задачи, сопряженные с необходимостью арифметических вычислений и геометрических измерений и построений, продолжали играть большую роль. Однако новым было то, что эти задачи постепенно были выделены в отдельную область математики, получившую наименование логистики. В логистику были отнесены: операции с целыми числами, численное извлечение корней, счет с помощью вспомогательных устройств, вроде абака, вычисления с дробями, численное решение задач, сводящихся к уравнениям 1-й и 2-й степени, практические вычислительные и конструктивные задачи архитектуры, землемерия и т. д.

В то же время уже в школе Пифагора из арифметики была выделена в отдельную область теория чисел, т. е. совокупность математических знаний, относящихся к общим свойствам операций с натуральными числами. В это время уже стали известными способы суммирования простейших арифметических прогрессий и результаты вроде $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$. Были рассмотрены вопросы делимости чисел, введены арифметическая, геометрическая и гармоническая пропорции * и различные средние: арифметическое — $\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$, геометрическое — $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ и гармоническое — $\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$.

* Последняя имела вид $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$, а название получила от того факта математической теории музыки, что интервалы между полными тонами обратно пропорциональны высоте тона.

Наряду с геометрическим доказательством теоремы Пифагора был найден способ отыскания неограниченного ряда троек «пифагоровых» чисел, т. е. троек чисел, удовлетворяющих соотношению $a^2+b^2=c^2$ и имеющих вид: n, $\frac{1}{2}(n^2-1)$, $\frac{1}{2}(n^2+1)$, где n — нечетное. Другое правило: n, $\left(\frac{n}{2}\right)^2-1$, $\left(\frac{n}{2}\right)^2+1$, где n — четное, относится к Платону, т. е. к более позднему времени. Было открыто много математических закономерностей теории музыки. Особенностью школы Пифагора являлось то, что отдельным числам и числовым соотношениям приписывались таинственные, магические свойства, а само занятие теорией чисел рассматривалось как удел «избранных» и «посвященных». Числовой мистицизм пифагорейцев, разумеется, имел не естественнонаучное, а социально-политическое происхождение.

В тот же период времени происходили абстрагирование и систематизация геометрических сведений. Были написаны специальные книги, излагающие сложившуюся к тому времени систему геометрии. Таковы были, например, «Начала» Гиппократа Хиосского. В геометрических работах вводились и совершенствовались приемы геометрического доказательства. Рассматривались, в частности, теорема Пифагора, задачи о квадратуре круга, трисекции угла, удвоение куба, квадрирование ряда площадей, в том числе ограниченных кривыми линиями.

Одной из первых побудительных причин к созданию математических теорий явилось открытие иррациональности, вначале в виде установления геометрического факта несоизмеримости двух отрезков. Значение этого шага в развитии математики трудно переоценить. С ним в математику вошло такое понятие, которое представляет собой сложную математическую абстракцию, не имеющую достаточно прочной опоры в донаучном общечеловеческом опыте.

Едва ли не первой открытой иррациональностью явился $\sqrt{2}$. Можно предполагать, что исходным пунктом этого открытия были попытки найти общую меру с помощью алгоритма последовательного вычитания, известного под именем алгоритма Евклида. Возможно, что некоторую побудительную роль сыграла задача математической теории музыки: деление октавы, приводящей к решению пропорции $1 : n=n : 2$. Не последнюю роль, по-видимому, играл и характерный для пифагорейской школы общий интерес к проблемам теории чисел.

Очень рано стало известным древним грекам логически строгое доказательство иррациональности $\sqrt{2}$ путем сведения к противоречию. Пусть $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые числа. Тогда $m^2=2n^2$, откуда следует, что m^2 — четное и, следова-

тельно, m — четное. Тогда n является нечетным. Однако если m — четное, то m^2 делится на 4 и, следовательно, n^2—четное. Четно, следовательно, и n. Получающееся формальное противоречие (n не может быть одновременно и четным и нечетным) указывает на неверность посылки о рациональности $\sqrt{2}$.

Для исследования вновь открываемых квадратичных иррациональностей сразу же оказалось необходимым разработать теорию делимости. В самом деле, пусть $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, где p и q — взаимно просты, а n есть произведение только первых степеней сомножителей. Отсюда $p^2=nq^2$. Если t—простой делитель n, то p^2 (а значит и p) делится на t. Следовательно, p^2 делится на t^2. Но в n содержится только первая степень t. Значит, q^2 (равно как и q) делится на t. Но этот результат формально противоречит предположению, что p и q взаимно просты.

Вслед за иррациональностью $\sqrt{2}$ были открыты многие другие иррациональности. Так, Архит (конец V в. до н. э.) доказал иррациональность чисел вида $\sqrt{n(n+1)}$. Теодор из Кирены установил иррациональность квадратного корня из чисел 3, 5, 6, ..., 17. Теэтет (начало IV в. до н. э.) дал одну из первых классификаций иррациональностей.

Появление иррациональностей означало для неокрепшей греческой математики одновременное появление серьезных трудностей как в теоретико-числовом, так и в геометрическом плане. Была фактически поставлена под удар вся теория метрической геометрии и теория подобия. Необходимость научного осмысления сущности открытого явления и его сочетания со сложившимися представлениями побудила к дальнейшему развитию математических теорий.

Этот следующий этап был ознаменован попыткой создать для нужд научного исследования общую математическую теорию, пригодную как для рациональных чисел, так и для иррациональных величин. Коль скоро после открытия иррациональности оказалось, что совокупность геометрических величин (например, отрезков) более полна, чем множество рациональных чисел, то представилось целесообразным это более общее исчисление строить в геометрической форме. Это исчисление было создано. В литературе оно получило название геометрической алгебры.

Первичными элементами геометрической алгебры являлись отрезки прямой. С ними были определены все операции исчисления. Сложение интерпретировалось приставлением отрезков, вычитание — отбрасыванием от отрезка части, равной вычитаемому отрезку. Умножение отрезков приводило к построению двумерного образа; произведением отрезков a и b считался прямоугольник со сторонами a и b. Произведение трех отрезков давало параллелепипед, а произведение большего числа сомножителей

в геометрической алгебре не могло быть рассматриваемо. Деление оказывалось возможным лишь при условии, что размерность делимого больше размерности делителя. Оно интерпретировалось эквивалентной задачей приложения площадей:

Приложить к отрезку c прямоугольник, равновеликий данному (ab). Решение задачи, как это видно из чертежа, состоит в прикладывании друг к другу прямоугольников ab и bc и в построении нового прямоугольника, диагональю которого является диагональ

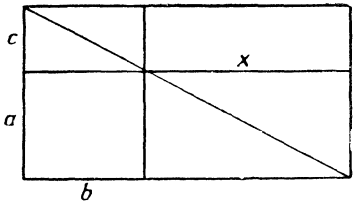

Рис. 2

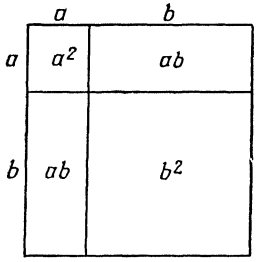

Рис. 3

прямоугольника bc, продолженная до пересечения с продолжением стороны b. Тогда прямоугольники $ab=cx$ оказываются равновеликими, и задача решена.

Метод приложения площадей, описанный здесь, позволял решать задачи, сводящиеся к линейным уравнениям, и носил название параболического (παραβολή' и означает по-гречески «приложение площадей»).

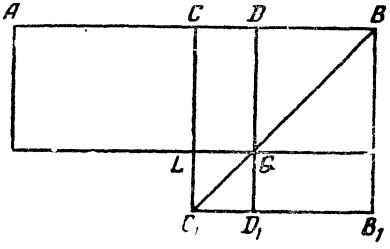

Рис. 4

В геометрическую алгебру входила и совокупность геометрических предложений, интерпретирующих алгебраические тождества. Например, рис. 3 дает геометрическую интерпретацию тождества $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Метод приложения площадей был распространен и на случаи решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям. Примерами таких задач являются: определение сторон правильных вписанных многоугольников; так называемое «золотое сечение» отрезка, т. е. деление отрезка a на две части: x и $a-x$, удовлетворяющие соотношению $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$; выражение ребер правильных многогранников через диаметр описанного шара и т. д. Решение этого класса задач проводилось с помощью единообразного канонического метода,

имеющего следующие разновидности в зависимости от вида квадратного уравнения.

а) Построить квадрат, равновеликий заданному прямоугольнику ab. Существо метода заключается в замене прямоугольника ab разностью квадратов $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ и в последующем применении теоремы Пифагора (рис. 4):

$$AD \cdot DG = \text{гномону } CLGD_1B_1B = CB^2 - LG^2,$$

или

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

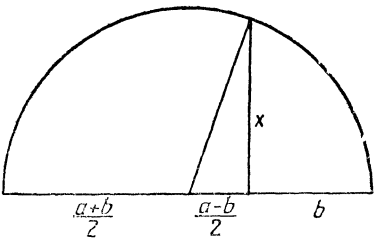

Рис. 5

Построение искомого отрезка x ясно из рис. 5. Это построение также было положено в основу построения среднего геометрического: $a : x = x : b$.

б) Приложить к данному отрезку ($AB = a$) прямоугольник (AG), равный заданной площади ($S = b^2$), так, чтобы часть площади, недостающей до полного прямоугольника (AK), была квадратом ($DK = x^2$) (рис. 6).

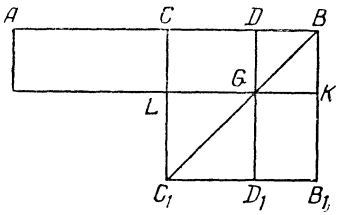

Рис. 6

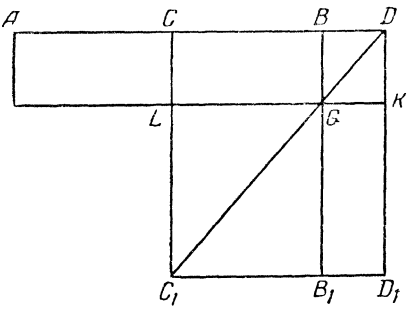

Рис. 7

По условию задачи $b^2 = (a - x) \cdot x$, но

$$(a - x)\,x = \text{гномону } CLGD_1B_1B = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

С помощью теоремы Пифагора отыскивается отрезок $\frac{a}{2} - x$, а затем x. Этот случай приложения площадей называется эллиптическим (от греческого ἔλλειψις — недостаток).

в) Приложить к данному отрезку ($AB = a$) (рис. 7) прямоугольник (AK), равный заданной площади ($S = b^2$), так, чтобы избыток над прямоугольником (AG) был квадратом ($BK = x^2$). $b^2 = (a + x) \cdot x$; но $(a + x) \cdot x =$ гномому $CLGB_1D_1D = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$; следова-

тельно, $b^2=\left(\frac{a}{2}+x\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$, откуда с помощью теоремы Пифагора находится построением отрезок $\frac{a}{2}+x$, а затем и x. Этот тип приложения площадей назывался гиперболическим (от греческого ὑπερβολή — превышение, избыток).

Очевидно, что подобный метод давал только один положительный корень квадратного уравнения. Древние математики понимали необходимость так формулировать условия задач геометрической алгебры, чтобы они заведомо имели положительное решение. Поэтому на условия задачи они в необходимых случаях накладывали ограничения (диоризмы, διορισμός).

Это обстоятельство выявляло ограниченность области применения методов геометрической алгебры. Еще больше возможности геометрической алгебры ограничивались из-за того, что ее объектами были образы размерности не выше второй. Соответствующими средствами построения являлись только циркуль и линейка. Можно было представить себе в рамках геометрической алгебры операции с трехмерными образами. Этого, однако, не делалось, потому что даже такая простая, казалось бы, задача, как построение куба, имеющего объем вдвое больше данного, не поддавалась решению с помощью циркуля и линейки. Задачи же, приводящиеся к уравнениям степени выше третьей, как было указано, оказывались в геометрической алгебре древних просто невозможными.

Недостаточность геометрической алгебры как общей математической теории была особенно подчеркнута выделением класса задач, не поддающихся решению с помощью циркуля и линейки. Среди этих задач наиболее известны: проблема удвоения куба, трисекции угла и квадратуры круга.

Задача об удвоении куба, т. е. о построении куба с неизвестным ребром x, но имеющего объем вдвое больше заданного, сводится к решению кубического уравнения: $x^3=2a^3$. Равносильной задачей является задача построения отрезка $\sqrt[3]{2}$. Задача была чрезвычайно популярной, о чем говорит дошедшая до нас легенда о требовании оракула на острове Делос увеличить вдвое объем стоящего перед ним кубического жертвенника. Многочисленные попытки решить эту задачу с помощью вычислений в поле рациональных чисел или средствами геометрической алгебры оказались, разумеется, неудачными.

Первого успеха в решении этой задачи добился Гиппократ Хиосский (середина V в. до н. э.). Он свел эту задачу (точнее говоря, несколько более общую задачу преобразования параллелепипеда в куб) к задаче о нахождении двух средних пропорциональных. В самом деле, пусть параллелепипед $V=a_1b_1c_1$ преобразован в другой с квадратным основанием $V=a^2b$, что осуществимо

средствами геометрической алгебры. Его нужно преобразовать в куб: $x^3=a^2b$. Ребро искомого куба определяется, по Гиппократу, из пропорций: $a : x = x : y = y : b$. Возможно, что проблема удвоения куба воспринималась как пространственный аналог задачи квадрирования плоских фигур. В таком случае постановка задачи Гиппократом является обобщением соответствующей плоской задачи о вставке одной средней пропорциональной: $a : x = x : b$.

Для решения задачи Гиппократа о вставке двух средних пропорциональных были разработаны новые методы. В большинстве они сводились к исследованию геометрических мест: $x^2= ay$, $xy = ab$, $y^2= bx$. Две средние пропорциональные между a и b определялись как координаты точки пересечения двух из этих геометрических мест. Последние в свою очередь получили стереометрическую интерпретацию как сечения конусов вращения.

История задачи об удвоении куба является одним из примеров того, как происходит обогащение математических методов. Воздействие этой задачи было одной из причин того, что конические сечения вошли в математику, что они стали в античной математике средством решения задач, решение которых не выполняется с помощью циркуля и линейки. Впрочем, для решения задачи удвоения куба применялись и другие способы. Эратосфен, например, построил прибор (мезолабий), удобный для приближенного удвоения куба. Однако ни один из методов не имел столь большого влияния на развитие античной математики, как конические сечения.

Дальнейшая судьба рассматриваемой задачи связана с проблемой: возможно ли принципиально решить ее построениями с помощью циркуля и линейки. Вместе с развитием алгебры постановка задачи приобрела алгебраическую форму: может ли операция извлечения кубического корня из рационального числа быть сведена к конечному числу извлечений квадратного корня? Сомнение в возможности такого решения задачи высказал впервые в 1637 г. Декарт. Но только еще через 200 лет задача удвоения куба получила окончательное разрешение. В 1837 г. Ванцель доказал, что кубические иррациональности не принадлежат ни полю рациональных чисел, ни его расширению посредством присоединения квадратичных иррациональностей.

Второй знаменитой задачей античной древности, не поддававшейся решению средствами геометрической алгебры, была задача о трисекции угла, т. е. о разделении произвольного угла на три равные части. Эта задача, как и предыдущая, сводится к решению кубического уравнения, что очевидно из следующего тригонометрического соотношения: $\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$, или $a = 4x^3 - 3x$. Поэтому для нас полностью понятно, что многочис-

ленные попытки произвести трисекцию угла с помощью только циркуля и линейки не могли быть успешными и приводили в лучшем случае к сознанию необходимости введения новых методов.

Уже в V в. до н. э. Гиппий из Элиды применил для решения задачи о трисекции угла трансцендентную кривую — квадратрису, определенную следующим образом. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ (см. рис. 8) сторона BC равномерно смещается параллельно самой себе до совпадения с AD. За это же время сторона AB вращается вокруг A по часовой стрелке до совпадения с AD. Геометрическое место пересечений этих двух сторон образует кривую — квадратрису, наличие которой позволяет свести задачу деления угла на любое число равных частей к задаче деления отрезка AB (или CD) на равные части. Точка G ($AG=\frac{2r}{\pi}$) пересечения квадратрисы со стороной AD доопределялась по непрерывности умозаключениями, могущими служить одной из первоначальных форм метода пределов. Другим методом решения задачи о трисекции угла явился метод вставок. Под вставкой понимается построение отрезка прямой, концы которого находятся на заданных линиях и который (или его продолжение) проходит через данную точку. Примеры вставок, применявшихся для трисекции угла ($\angle ABC$):

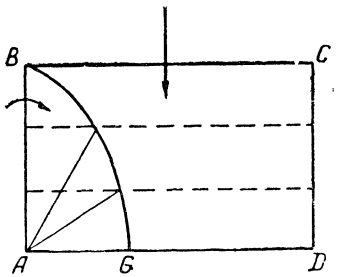

Рис. 8

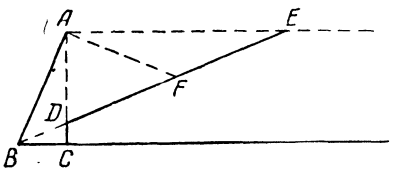

Рис. 9

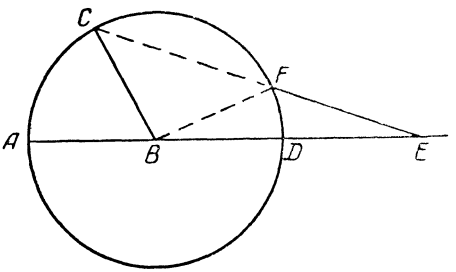

Рис. 10

Вставка: $DE=2AB$ ($DF=FE=AB$; $\angle ABF=\angle AFB=2\angle AEF=2\angle CBD$; $\angle CBD=\frac{1}{3}\angle ABC$).

Вставка: $FE=AB$ $\left(\angle DEF=\frac{1}{2}\angle BFC=\frac{1}{2}\angle FCB=\frac{1}{3}\angle ABC\right)$.

Вставки осуществлялись механически с помощью скользящей линейки, на которой заранее намечен размер вставки. Линейку вращали вокруг неподвижной точки, заботясь, чтобы одна метка двигалась по одной из заданных линий вплоть до того момента, когда другая метка попадала на другую линию.

Трисекция угла имела столь же длинную историю, как и удвоение куба. Сведение ее к кубическому уравнению было осознано только к IX—X вв. н. э. Строгое же доказательство невозможности точной трисекции угла циркулем и линейкой есть простое следствие из упомянутого выше результата Ванцеля.

Третьей из знаменитых задач древности является квадратура круга, т. е. задача об отыскании квадрата, равновеликого данному кругу. Эту задачу в античной Греции рассматривали в обоих аспектах: точном и приближенном. Последний подход к задаче привел к введению приближения площади круга вписанными или описанными многоугольниками и к приближенным вычислениям числа π. Огромное же количество попыток точно квадрировать круг к успеху не могли привести вследствие трансцендентной природы этой задачи.

В самом деле, пусть отрезок r_0 — радиус данного круга; тогда сторона равновеликого квадрата $x=r_0\sqrt{\pi}$. Задача сведена к графическому умножению отрезка r_0 на число $\sqrt{\pi}$. Это умножение можно выполнить лишь, если это число будет корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, разрешимого в квадратных радикалах. Следовательно, строгую и полную трактовку задача квадратуры круга может получить только в результате выяснения арифметической природы числа π. Решение же этой проблемы растянулось на много веков.

Только в конце XVIII в. И. Ламберт и А. Лежандр сумели доказать, что π не является рациональным числом. Трансцендентность же этого числа, т. е. тот факт, что оно не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, была доказана в 1882 г. Линдеманом. Кстати, в геометрии Лобачевского для некоторых значений радиуса параллельности квадратура круга разрешима в квадратичных иррациональностях.

Античные математики, стремившиеся теоретически точно решить задачу о квадратуре круга, этого, разумеется, не знали. Но их усилия принесли развитию математики большую пользу, обогатив ее новыми фактами и методами. Так, был разработан метод исчерпывания, являвшийся предшественником метода пределов (этот метод будет разъяснен позже). Были введены различные трансцендентные кривые, в первую очередь квадратриса. Наконец, впервые в истории математики были найдены квадрируемые фигуры, ограниченные кривыми линиями. Мы имеем здесь в виду луночки (мениски) Гиппократа Хиосского, образованные дугами окружностей.

Исследования Гиппократа опираются на теорему, что в кругах площади подобных сегментов пропорциональны квадратам диаметров.

Первая из квадрируемых луночек вырезана из полукруга дугой радиуса $r\sqrt{2}$, опирающейся на диаметр. Луночка оказывается равной площади равнобедренного прямоугольного треугольника ACB, гипотенузой которого служит диаметр круга. Разновидностью этого результата является теорема о том, что

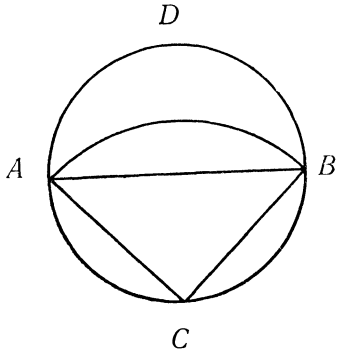

Рис. 11

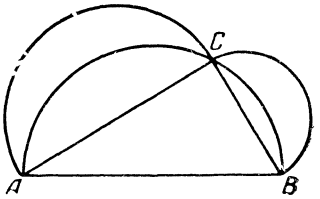

Рис. 12

если на сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построить окружности, то сумма площадей луночек, опирающихся на катеты, будет равна площади треугольника, т. е. квадрируема.

Другой вид луночек получается, когда вокруг трапеции со сторонами 1, 1, $1\sqrt{3}$ описывают окружность, а на хорде $\sqrt{3}$ строят сегмент, подобный сегментам, отсекаемым остальными хордами. Площадь полученной луночки равна площади исходной трапеции. Наконец, внешняя дуга третьей луночки (о ней см. Г. Г. Цейтен. История математики в древности и в средние века, стр. 60—61) меньше полуокружности.

Появление квадрируемых луночек вызвало естественные вопросы: как велик класс квадрируемых луночек? Все ли виды квадрируемых луночек найдены? Существуют ли другие луночки, площади которых тоже выражаются с помощью квадратичных иррациональностей через входящие в их построение линейные элементы? Однако ответ на эти вопросы был получен спустя тоже много веков. Только в 1840 г. немецкий математик Клаузен нашел еще две квадрируемые луночки. Вопрос о луночках был полностью исследован только в XX в., когда советские математики Н. Г. Чеботарев и А. В. Дороднов, пользуясь методами теории Галуа, показали, что если угловые меры внешней и внутренней дуг луночек соизмеримы, то других квадрируемых луночек, кро-

ме найденных, не существует. К слову сказать, отношения угловых мер найденных упомянутых выше луночек: $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{1}, \frac{5}{3}$.

Открытие несоизмеримостей, как мы уже указывали, поставило в тяжелое положение всю метрическую часть геометрии, теорию подобия и те разделы математики, где приходилось пользоваться начальными формами понятий непрерывности, предельного перехода и т. п. Теория рациональных чисел уже не могла служить основой этих разделов математики. Так, появление иррациональностей обусловило необходимость создания общей теории отношений, способной дать определения и ввести операции, применимые как для рациональных, так и для иррациональных величин.

Первоначальной основой теории отношений античной древности являлся алгоритм попеременного вычитания, известный под именем алгоритма Евклида. Пусть даны два отношения: $a : b$ и $c : d$. Поиски общей меры величин, участвующих в отношениях, приводят к следующей цепочке соотношений:

$$\begin{array}{ll} a:b & c:d \\ a-n_0b=b_1 & c-m_0d=d_1 \\ b-n_1b_1=b_2 & d-m_1d_1=d_2 \\ b_1-n_2b_2=b_3 & d_1-m_2d_2=d_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

В случае, если члены отношения соизмеримы, эта цепочка обрывается; несоизмеримость не дает конечного алгоритма.

Алгоритм попеременного вычитания эквивалентен представлениям с помощью непрерывных дробей. Например:

$$\frac{a}{b}=n_0+\frac{b_1}{b}=n_0+\frac{1}{\frac{b}{b_1}}=n_0+\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\dots}}.$$

Сравнение последовательностей $n_0, n_1, n_2, \dots$ и $m_0, m_1, m_2, \dots$ позволяет установить между отношениями понятия равенства и неравенства, а также сравнения их по величине. Пусть k—1 элементов обеих последовательностей совпадают. Тогда, если $n_k > m_k$, то $a : b < c : d$, если k — нечетно, и $a : b > c : d$, если k — четно; если же $n_k < m_k$, то $a : b < c : d$ в случае четности k и $a : b > c : d$ в случае его нечетности.

Однако попытка ввести операции над отношениями, определенными таким образом, сразу встретила серьезные математические трудности. Например, чтобы ввести умножение отношений, надо было найти способ определения неполных частных непрерывной дроби — произведения через неполные частные непрерывных дробей — сомножителей. Для этого и в наше время не существует никакой сколько-нибудь элементарной формулы. Нако-

нец, в то время не существовало еще общего понятия величины. В силу этих обстоятельств алгоритм Евклида не сделался основой теории отношений.

Следующая концепция античной общей теории отношений связывается с именем Евдокса (ок. 408 г.— ок. 355 г. до н. э.). Ему же приписывается создание теории пропорций. В теории отношений Евдокса:

а) произведено обобщение понятия величины посредством подчинения его системе пяти аксиом: 1. Если $a=b$ и $c=b$, то $a=c$; а если $a=c$, то 2. $a+b=c+b$. 3. $a-b=c-b$. 4. Совмещающиеся равны. 5. Целое больше части;

б) введена аксиома однородности: a и b могут иметь отношение, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга, т. е. для любых конечных a и b существуют m и n такие, что $na>b$ и $mb>a$. Эта аксиома была введена с целью исключить так называемые неархимедовые величины, например роговидные углы.

Отношения введены в теорию Евдокса через определение их равенства. Именно равенство двух отношений $a:b=c:d$ считается установленным, если из трех условий $ma \gtreqless nb$ соответственно вытекают три следствия $mc \gtreqless nd$ для любой пары натуральных чисел m и n. Существует предположение, что подобное определение возникло как абстракция процедуры измерения и сравнения отрезков посредством их рациональных приближений. Это находит свое подтверждение в отношениях порядка между отношениями в теории Евдокса. Именно $a:b>c:d$, если существует пара натуральных чисел m и n такая, что $ma>nb$ и $mc \leqslant nd$. Отсюда следует, что $c:d \leqslant \frac{m}{n} < a:b$, т. е. что между двумя неравными отношениями можно вставить рациональное число. Можно предполагать, что современная идея рациональных приближений действительных чисел находит своего далекого предшественника в теории отношений Евдокса.

В этой теории введена только одна операция составления отношений, соответствующая операции умножения действительных чисел. Если существуют два отношения $a:b$ и $b:c$, то из них можно составить отношение $a:c$. Это отношение называется двойным. Возможно составление и более сложных отношений, например тройного. В случае, если надо составить отношения $a:b$ и $c:d$, то необходимо преобразовать одно из них, например второе, предварительно отыскав четвертую пропорциональную: $c:d=b:x$.

Введение только одной операции объясняется тем, что теория Евдокса применялась лишь в учении о подобии, где служила основой теории пропорций, и при определении площадей и объемов.

Мы уже упоминали о некоторых аналогиях между античной теорией отношений и современными теориями действительного числа. Наибольшее основание для подобных аналогий дает теория сечений Дедекинда. В самом деле, каждая пара архимедовых величин a и b, участвующих в отношении $a : b$, по теории Евдокса, производит разбиение пар целых чисел m, n на классы. Те пары, для которых справедливо $ma > nb$, могут быть включены в один класс, те же, для которых справедливо обратное: $ma < nb$,— в другой класс. Пару m, n, осуществляющую $m_0a = n_0b$, можно отнести в один из предыдущих классов. Сам Дедекинд не отрицал возможности подобной аналогии, указывая лишь на то, что в теории Евдокса не учтен фактор непрерывности.

Однако различия между теорией отношений Евдокса и теорией сечений Дедекинда этим замечанием не исчерпываются. Дело в том, что первая из них, хотя и осуществляет разбиение пар целых чисел на классы, но не доказывает обратного. Именно не доказывается, что любому такому разбиению соответствует некоторая пара архимедовых величин, определяющих это разбиение. Кроме того, не определяются условия, которым должны удовлетворять множества пар целых чисел, чтобы быть классами разбиения, т. е. не быть пустыми, не пересекаться и обладать свойством односторонности любого элемента одного множества по отношению к любому элементу другого множества.

Наконец, у Дедекинда предварительно определены все четыре действия арифметики, тогда как у Евдокса введена только одна операция, а множество пар целых чисел осталось неупорядоченным. Иначе говоря, вещественные числа Дедекинда образуют поле, тогда как отношения Евдокса образуют группу.

Дальнейшее развитие античной теории отношений пошло по пути трактования отношений как обобщенных чисел и отождествления их с дробями. Так поступали Архит, Архимед, Герон и многие другие ученые. В этом сказалось влияние практики, требовавшей развития вычислительно-алгоритмических методов и распространения их на все более широкие классы чисел.

Мы остановились на этом примере для того, чтобы показать, что математические теории античности имеют зачастую много общего с современными математическими теориями. Однако надо учиться всегда выделять специфику их исторического развития, чтобы не впадать в одну из двух ошибок: отождествления прошлого с настоящим, или нигилистического отрыва настоящего от прошлого, того отрыва, который делает исследователя слепым перед контурами будущего.