ЛЕКЦИЯ 4

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИКИ В ЭПОХУ ЭЛЛИНИЗМА. „НАЧАЛА“ ЕВКЛИДА

Первые математические теории, абстрагированные из конкретных задач или из совокупностей однотипных задач, создали как необходимые, так и достаточные предпосылки для осознания самостоятельности и своеобразия математики. Это осознание в свою очередь возбудило у античных математиков стремление систематизировать факты математики и логически последовательно изложить ее основы. Подобная работа является необходимым, закономерным актом любой науки, служащим отправным пунктом для ее дальнейшего развития. В античной математике процесс систематизации и обобщения дал значительные результаты к IV в. до н. э. Этот процесс по существу являлся частью аналогичного процесса, происходившего во всей системе естественнонаучных знаний и нашедшего яркое выражение в философских взглядах Аристотеля (384—322 гг. до н. э.). Огромное влияние на математику того времени оказали и успехи логики. Сложившиеся основные формы мышления уже были систематизированы и исследованы, выдвинуты принципы построения дедуктивной науки. Последняя стала рассматриваться как логическая усложняющаяся система, покоящаяся на первых началах.

Абстрактность предмета математики и установившиеся приемы математического доказательства были основными причинами того, что математика стала излагаться как дедуктивная наука, представляющая логическую последовательность теорем и задач на построение и использующая минимум исходных положений. Геометрическая форма системы математики в античной Греции, как мы уже указывали, ведет свое происхождение в основном от установления факта большей полноты множества отрезков по сравнению с множеством рациональных чисел. Сочинения, в которых в то время излагались первые системы математики, назывались «Началами».

Первые «Начала», о которых дошли до нас сведения, были написаны Гиппократом Хиосским. Встречаются упоминания и о «Началах», принадлежащих другим авторам. Однако все эти сочинения оказались забытыми и утерянными практически с тех пор, как появились «Начала» Евклида. Последние получили всеобщее признание как система математических знаний, логическая строгость которой оставалась непревзойденной в течение свыше двадцати веков. Все это время люди изучали геометрию по Евклиду. Его «Начала» до сих пор лежат в основе всех систематических школьных курсов геометрии. Научные исследования по математике, в особенности элементарной, в очень большой степени опираются на систему Евклида, иногда подражая даже форме его изложения.

Об авторе «Начал» — Евклиде — сохранилось очень мало сведений. Известно, что он жил около 300 г. до н. э. в Александрии, входившей в то время в состав египетского царства. Последнее образовалось в результате распада мировой державы Александра Македонского. Выгодное положение Александрии как торгового центра и центра технических усовершенствований побудило правителей Египта Птоломеев к организации научно-учебного центра — Музейона, что обозначает прибежище муз. В Музейоне было сосредоточено свыше 500 тысяч рукописей научного характера. Научную работу в Музейоне на условиях государственного обеспечения постоянно или временно вели почти все крупнейшие ученые эллинистической эпохи, в том числе Евклид, Архимед, Аполлоний, Эратосфен и др. Благоприятное влияние Музейона на развитие науки сохранялось около 700 лет; оно стало падать в начале нашей эры в результате завоевательных войн римлян, а затем прекратилось, когда под давлением реакционного христианства «языческие» ученые были изгнаны или убиты, а сам Музейон разорен.

При написании «Начал» Евклид, по-видимому, не руководствовался целью составить энциклопедию математических знаний своего времени. Он стремился, вероятно, изложить только основы математики в виде логически совершенной математической теории, исходящей из минимума исходных положений. В этом смысле «Начала» являются ранним предшественником современного способа аксиоматического построения математических наук.

«Начала» состоят из тринадцати книг, каждая из которых состоит из последовательности теорем. Иногда к этим книгам добавляют книги 14 и 15, принадлежащие другим авторам и близкие по содержанию к последним книгам Евклида. Первой книге предпосланы определения, аксиомы и постулаты. Определения имеются и в некоторых других книгах (2—7, 10, 11). Аксиом и постулатов в других книгах «Начал» нет.

Определения — это предложения, с помощью которых автор вводит математические понятия путем их пояснения. Например, «точка есть то, что не имеет частей», «куб есть телесная фигура, заключающаяся между шестью равными квадратами» и т. п. Эти предложения Евклида в ходе истории много раз подвергались критике с точки зрения их полноты и логической определенности. Однако равноценной или более совершенной системы определений предложено не было. Дело свелось к тому, что в наше время при аксиоматическом построении математической теории единственным способом описания объектов этой теории и их свойств является сама система аксиом, а объекты вводятся как первичные неразъясняемые сущности. Что же касается определений Евклида, то их следует рассматривать как исторически сложившиеся к его времени абстракции реальных вещей, введение которых в математику освящено традицией. Это — не такой уж редкий, если не сказать наиболее часто встречающийся в истории, способ введения математических определений.

Аксиомы, или общие понятия, у Евклида — это предложения, вводящие отношения равенства или неравенства величин. Аксиом в «Началах» пять:

1. Равные одному и тому же, равны и между собой;
2. Если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны;
3. Если от равных отнять равные, то и остатки будут равны;
4. Совмещающиеся друг с другом равны между собой;
5. Целое больше части.

В число исходных положений «Начал» входят постулаты (требования), т. е. утверждения о возможности геометрических построений. С их помощью Евклид обосновывает все геометрические построения и алгоритмические операции. Постулатов тоже пять:

1. Через две точки можно провести прямую;
2. Отрезок прямой можно продолжить неограниченно;
3. Из всякого центра любым расстоянием можно описать окружность;
4. Все прямые углы равны между собой;
5. Если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересечены третьей и если сумма внутренних односторонних углов меньше двух прямых, то прямые пересекутся с той стороны, где это имеет место.

В различных изданиях «Начал», а ранее того переписчиками и комментаторами, система аксиом и постулатов Евклида видоизменялась и дополнялась, причем чаще всего неудачно. Разумеется, критика постепенно вскрывала логические пробелы системы исходных положений Евклида: перегруженность определений,

необеспеченность возможности наложения фигур, отсутствие критериев пересечений окружностей и прямых (теорем существования) и другие более мелкие недостатки.

Однако первые реальные успехи в создании системы аксиом геометрии, более соответствующей возрастающим требованиям математической строгости, были достигнуты только к концу XIX в. в работах Паша (1882), Пеано (1889) и Пиери (1899). Наиболее распространенная в настоящее время и общепризнанная система аксиом Д. Гильберта в первой редакции появилась в 1899 г. в сочинении «Основания геометрии». Позднее Гильберт внес в свою систему немало дополнений и усовершенствований. В наше время она состоит из следующих пяти групп аксиом:

а) восемь аксиом соединения или принадлежности;

б) четыре аксиомы порядка;

в) пять аксиом конгруентности или движения;

г) аксиома параллельности;

д) две аксиомы непрерывности: Архимеда и линейной полноты.

Эти пять групп аксиом вводят основные объекты геометрии: *точку*, *прямую* и *плоскость*, а также отношения между объектами, выражаемыми словами: *принадлежит*, *между* и *конгруентен*. Определений и постулатов система современных основных положений не имеет.

Широко пользуясь идеей изоморфизма, аксиоматическая геометрия отвлекается от качественных особенностей изучаемых объектов и исследует лишь возможные виды логических связей между ними. При этом словами *точка*, *прямая*, *плоскость* могут быть названы объекты, не только непохожие на то, что они обозначали в течение всей истории, но и объекты совсем негеометрической, казалось бы, природы. «Начала» Евклида далеки от такой постановки задачи геометрии. В них рассматриваются более низкие, первые, ступени абстракции пространственных и количественных свойств предметов материального мира.

Перейдем к обзору содержания евклидовых «Начал». Первые шесть книг — планиметрические, из них книги 1—4 содержат ту часть планиметрии, которая не требует применения теории пропорций. Первая книга вводит основные построения, действия над отрезками и углами, свойства треугольников, прямоугольников и параллелограммов, сравнение площадей этих фигур. Завершают первую книгу теорема Пифагора и обратная ей теорема.

На материале первой книги выявляются некоторые характерные особенности метода математического суждения и формы изложения Евклида.

а) Метод рассуждений Евклида всегда синтетический. Для доказательства какой-либо теоремы он исходит из заведомо справедливого утверждения, в конечном счете опирающегося на систему основных положений. Из этого последнего он развивает

последовательность следствий, приводящих к искомому утверждению. Обратный путь рассуждений: приняв искомую теорему за доказанную, вывести из нее последовательность следствий, вплоть до того, как будет получено заведомо верное утверждение — в «Началах» и в качестве доказательств не употребляется. В противоположность синтезу древние называли этот метод анализом.

б) Доказательства строятся по единой схеме, состоящей из следующих частей: формулировка задачи, или теоремы (πρότασις — предложение); введение чертежа для формулировки данных задачи (ἔκθεσις — изложение); формулировка по чертежу искомого (διορισμός — определение); введение вспомогательных линий (κατασκευή — построение); доказательство в собственном смысле (ἀπόδειξις — доказательство); объявление того, что доказано и что доказанное решает задачу или адекватно поставленной теореме (συμπέρασμα — заключение). В несколько упрощенной форме эта схема стала традиционной и дошла до наших дней как классический образец математического рассуждения, в известном смысле обязательный для математиков.

в) Средства геометрического построения — циркуль и линейка — принципиально не употребляются как средство измерения. Линейка не имеет мерных делений. Поэтому и здесь и далее в «Началах» не идет речь об измерении длин отрезков, площадей фигур и объемов тел, а лишь об их отношениях.

Во второй книге рассматриваются соотношения между площадями прямоугольников и квадратов, подобранные таким образом, что они образуют геометрический аппарат для интерпретации алгебраических тождеств и для решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям, т. е. геометрическая алгебра. Третья книга трактует о свойствах круга и окружности, хорд и касательных, центральных и вписанных углов. Четвертая книга посвящена свойствам правильных многоугольников: вписанных и описанных, а также построению правильных 3-, 5-, 6- и 15-угольников.

В пятой книге «Начал» развивается общая теория отношений величин, являющаяся прообразом теории действительного числа в форме, соответствующей дедекиндовым сечениям. Мы уже упоминали об этой теории в предыдущей лекции, как о теории Евдокса, введенной в античную математику в качестве общей теории, равно пригодной как для чисел, так и для отрезков прямой. В настоящей, пятой, книге «Начал» после введения отношений, их равенств и неравенств доказываются другие элементарные свойства, вроде: если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$, а также $\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$ и т. д. В последующих предложениях развивается теория пропорций, в том числе производных (т. е. образованных посредством допустимых перестановок и других преобразований членов пропорций)

и сложных (т. е. образованных из нескольких данных пропорций, например: если $\frac{a}{b}=\frac{d}{e}$ и $\frac{b}{c}=\frac{e}{i}$, то $\frac{a}{c}=\frac{d}{i}$ и т. п.).

Геометрические приложения теории отношений включены в шестую книгу. В ней, например, доказаны теоремы об отношении площадей прямоугольников и параллелограммов, имеющих общую высоту, о пропорциональности отрезков, отсекаемых на сторонах угла парой параллельных прямых, о подобии фигур и отношении площадей подобных фигур и т. п. Здесь же находится группа теорем об эллиптическом и гиперболическом приложении площадей, обобщенном на параллелограммы. Она дает метод геометрического решения задач, приводящихся к уравнениям вида $ax \pm \frac{b}{c}x^2=S$ (где a, b, c — данные отрезки, S — данная площадь, x—неизвестный отрезок), и представляет собой известное обобщение результатов геометрической алгебры.

Следующая группа книг (книги 7—9) содержит некоторый эквивалент теории рациональных чисел. Казалось бы, в этих книгах следовало излагать систему пространственных представлений — стереометрию. Однако непоследовательность оказывается только кажущейся. Дело в том, что в конце «Начал» Евклид исследует правильные многогранники и определяет отношения их ребер к диаметру описанного шара. Эти отношения выражаются, как известно, квадратичными и биквадратичными иррациональностями. Поэтому Евклиду пришлось предварительно рассмотреть построение и классификацию подобных иррациональностей. Чтобы выполнить эту задачу, ему оказалось необходимым в свою очередь опираться на ряд предложений из теории рациональных чисел (соизмеримых отрезков). Рациональные числа в свою очередь представляются у Евклида как отношения целых чисел; последние понимаются как собрание единиц. Поэтому так называемые арифметические книги «Начал» (книги 7—9) содержат учение о целых числах и их отношениях, взятое в основном из пифагорейской математики. Сохранение принципиально различного смысла понятий числа и общей величины послужило причиной повторения в арифметических книгах многих фактов теории чисел, уже полученных в пятой книге «Начал».

Первая из арифметических книг — седьмая — начинается с изложения алгоритма попеременного вычитания. Затем следует ряд предложений теории делимости. Наконец, книга содержит теорию пропорций для рациональных чисел. Последняя продолжается в восьмой книге, где рассматриваются непрерывные числовые пропорции (т. е. пропорции вида $\frac{a_0}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}=\ldots=\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}}{a_n}$), и заканчивается в девятой книге. В этой теории по существу вводятся геометрические целочисленные прогрессии, показывается,

что отношение членов непрерывной пропорции является древней формой степеней чисел, находится среднее пропорциональное, дается способ отыскания суммы геометрической прогрессии.

Значительную часть девятой книги составляет учение о простых числах, причем доказывается, что простых чисел бесконечно много. Доказательство проводится тем же способом, что и сейчас: предположение конечности числа простых чисел опровергается построением еще одного числа, на единицу превышающего произведение всех простых чисел. В ряде теорем рассматриваются свойства четности и нечетности чисел. Книга увенчивается замечательной теоремой, что если число S вида $\sum_{k=0}^{n} 2^k$ является простым, то число $S_1 = S \cdot 2^n$ будет совершенным (совершенным называется число, равное сумме своих делителей, включая единицу и исключая самого себя). Вопрос о том, исчерпывают ли числа данного вида все множество совершенных чисел, остается нерешенным и в наше время.

Десятая книга «Начал» интересна в первую очередь громоздкой и сложной классификацией всех 25 возможных видов биквадратичных иррациональностей (т. е. выражений вида $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, где a и b —соизмеримые отрезки), воспроизводить которую здесь мы не считаем целесообразным. В десятой книге в качестве лемм выведены различные, сами по себе важные, предложения. При этом прежде всего имеется в виду основная лемма метода исчерпывания, гласящая, что если от данной величины отнять часть, бо́льшую ее половины, с остатком повторить то же и т. д., то при достаточно большом числе шагов можно получить величину, меньшую любой заданной. Кроме того, в десятой книге даны: способ нахождения неограниченного числа «пифагоровых троек» целых чисел, критерий соизмеримости двух величин, основанный на алгоритме попеременного вычитания, отыскание общей наибольшей меры двух и трех рациональных чисел (соизмеримых величин) и др.

Последние три книги (11—13) «Начал»—стереометрические. Первая из них открывается большим числом определений, что вполне естественно, так как в предыдущих книгах вопросы стереометрии не рассматривались. Затем следует ряд теорем о взаимных расположениях прямых и плоскостей в пространстве и теоремы о многогранных углах. Последнюю треть книги составляет рассмотрение отношений объемов параллелепипедов и призм.

Исследование объемов других элементарных тел (пирамид, цилиндров, конусов и шаров) требует обязательного выполнения предельного по существу перехода. В двенадцатой книге «Начал» отношения объемов всех этих тел найдены с помощью метода, получившего впоследствии (в XVII в.) название метода исчерпывания.

Идея этого метода, представляющего своеобразную античную форму метода пределов, состоит, например, в следующем: Евклид устанавливает, что подобные правильные многоугольники, вписанные в круги, относятся как квадраты диаметров. Затем круги «исчерпываются» последовательностями правильных вписанных 2^n-угольников ($n=2, 3, 4,\ldots$). Отношения последних при увеличении числа сторон остаются неизменными. После неявного перехода к пределу доказывается методом от противного, что и площади кругов относятся как квадраты их диаметров. Аналогичные суждения предельного характера проводятся во всех случаях отыскания отношений упомянутых выше тел. Более подробно этот метод будет охарактеризован в следующей лекции.

В последней, тринадцатой, книге «Начал» находятся отношения объемов шаров и построения пяти правильных многогранников: тетраэдра (4-гранника), гексаэдра (6-гранника), октаэдра (8-гранника), додекаэдра (12-гранника), икосаэдра (20-гранника). В заключение доказывается, что других правильных многогранников не существует.

Обзор содержания «Начал» показывает, что это сочинение представляет собой систему основ античной математики. В нее входят: элементарная геометрия, основы теории рациональных чисел, общая теория отношений величин и опирающиеся на нее теория пропорций и теория квадратичных и биквадратичных иррациональностей, элементы алгебры в геометрической форме и метод исчерпывания. Самым характерным, определяющим для «Начал» является их система, позволяющая видеть в них античного предшественника современного аксиоматического построения математических теорий. В то же время логическая структура «Начал» отразила исторический путь формирования математических теорий от простейших, типа геометрической алгебры, до более сложных: теории отношений, метода исчерпывания, классификации иррациональностей.

Мы уже упоминали, что «Начала» Евклида оставили неизгладимый след в истории математики и в течение многих веков служили классическим образцом математической строгости и последовательности. Однако некоторые особенности «Начал» отражают ряд неблагоприятных моментов для дальнейшего развития математики, сложившихся ко времени их написания. Изложение — геометрическое, даже числа представлены как отрезки. Средства геометрического построения по существу ограничены только циркулем и линейкой. Поэтому в «Началах» нет теории конических сечений, алгебраических и трансцендентных кривых. Наконец, в «Началах» совершенно отсутствуют вычислительные методы.

Все эти недостатки «Начал» можно было бы, до известной степени, оправдать специфическими целями их составителя. Однако в условиях античности этот первый опыт аксиоматиче-

ского изложения математики мог иметь столь резко выраженные ограничительные тенденции только под влиянием общих ограничительных тенденций идеалистической философии. Поэтому можно сказать, что «Начала» Эвклида отражают как высокий уровень теоретического развития математики, так и неблагоприятную для ее дальнейшего развития общественно-экономическую и идеологическую обстановку конца греческой античности.

В течение всей многовековой истории математики «Начала» являлись фундаментом всех геометрических изысканий. Даже решающее изменение всей системы геометрии, вызванное введением в начале XIX в. в работах Н. И. Лобачевского неевклидовой геометрии, в значительной степени связано с попытками усовершенствования «Начал».

«Начала» Евклида до нашего времени составляют основу школьных учебников геометрии. По числу изданий они занимают одно из первых мест в мире. Неоднократно они были изданы в России и в СССР. Первое издание «Начал» на русском языке вышло в 1739 г. Самое близкое к нам по времени издание появилось в трех томах в течение 1948—1950 гг. Оно обстоятельно комментировано. Знакомство с «Началами» Евклида, обогащая математическую культуру, полезно всякому математику и в наши дни.