ЛЕКЦИЯ 5

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В АНТИЧНОЙ ГРЕЦИИ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ТВОРЧЕСТВО АРХИМЕДА

При построении математических теорий в античной Греции рано выделился специфический класс проблем, для решения которых оказалось необходимым исследовать предельные переходы, бесконечные процессы, непрерывность и т. п. Уже одно из первых открытий теоретического характера — обнаружение несоизмеримости величин — поставило задачу рационального объяснения подобных проблем. В данном случае они связаны: а) с неограниченной продолжимостью процесса нахождения общей меры; б) с бесконечной малостью последней и в) с тем, что она должна содержаться бесконечное множество раз в сравниваемых величинах. С этой группой проблем вскоре были сближены геометрические, решение которых приводило к аналогичным затруднениям (определение большинства длин, площадей и объемов).

Некоторые группы античных ученых искали выход из этих затруднений в применении к математике атомистических философских воззрений. Примером наиболее яркого выражения подобных идей является натурфилософская школа Демокрита (ок. 460—370 гг. до н. э.). Демокрит считал, что все тела состоят из бесконечно малых атомов — первовеличин. Тела различаются между собой по форме, положению и способу соединения составляющих их атомов. Атомистические взгляды Демокрита распространились и на математику и явились источником некоторых его высказываний о математических бесконечно малых и о применении их к определению некоторых геометрических величин.

Однако о математической стороне подобных высказываний и исследований известно слишком мало. Гораздо больше известно о возражениях их научных противников. Мы имеем здесь в виду апории Зенона (род. ок. 500 г. до н. э.), т. е. логические парадоксы, к которым приводят попытки получать непрерывные величины из бесконечного множества бесконечно малых частиц.

Среди апорий наиболее известны: а) *дихотомия*, т. е. невозможность осуществить движение, так как путь может быть делим до бесконечности (пополам, еще раз пополам и т. д.) и поэтому надо последовательно преодолевать бесконечное множество участков пути (математически это сводится к отрицанию факта, что $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$); б) *Ахиллес*, который не может догнать черепаху, так как ему надо последовательно достигать тех мест, где только что находилась черепаха, т. е. исчерпывать бесконечную последовательность отрезков пути (математически это оказалось возражением против уже известного тогда факта, что $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{n}{n-1}$); в) *полет стрелы* делается невозможным, если время считать суммой дискретных мгновений, а пространство — суммой дискретных точек.

Апории Зенона убедительно показали, что, если искать точные доказательства и логически исчерпывающие решения задач, нельзя пользоваться бесконечностью, опираясь на наивные атомистические соображения. Для подобных целей необходимо разрабатывать и привлекать методы, содержащие наряду с разновидностями суждений о бесконечно малых элементы предельного перехода.

Одним из самых ранних методов такого рода является метод исчерпывания. Изобретение его обычно приписывают Евдоксу. Примеры его употребления находятся в двенадцатой книге «Начал» Евклида и в ряде сочинений Архимеда. Метод исчерпывания применялся при вычислении площадей фигур, объемов тел, длин кривых линий, нахождении подкасательных к кривым и т. п. Математическая сущность метода (разумеется, в форме, несколько отличной от формы изложения древних греков) состоит в последовательности следующих операций:

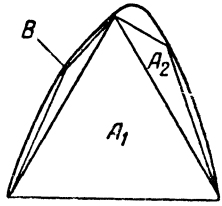

Рис. 13

а) Если необходимо, например, квадрировать фигуру B, то в качестве первого шага в эту фигуру вписывается последовательность других фигур A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ..., площади которых монотонно возрастают и для каждой фигуры из этой последовательности они могут быть определены.

б) Фигуры A_k ($k=1, 2, 3, \ldots$) выбираются таким образом, чтобы положительная разность $B-A_k$ могла быть сделана сколь угодно малой.

в) Из факта существования и построения описанных фигур делается вывод об ограниченности сверху последовательности «исчерпывающих» вписанных фигур.

г) Неявно, обычно с помощью других теоретических и практических соображений, отыскивается A—предел последовательности вписанных фигур.

д) Доказывается, для всякой задачи отдельно, что $A=B$, т. е. что предел последовательности вписанных фигур равен площади B. Доказательство ведется, как правило, от противного. Пусть $A \neq B$. Тогда $B > A$ или $B < A$. Если допустим $B > A$, то выберем такой элемент последовательности A_n, чтобы $B - A_n < B - A$. Это возможно для любой фиксированной разности $B - A$. Но тогда должно быть $A_n > A$, что невозможно ввиду того, что в действительности $A > A_n$ для любого конечного n. Противоположное допущение ($B < A$) тоже приводит к противоречию, потому что можно подобрать такое A_n, чтобы $A - A_n < A - B$. Но тогда должно получиться, что $A_n > B$, что невозможно.

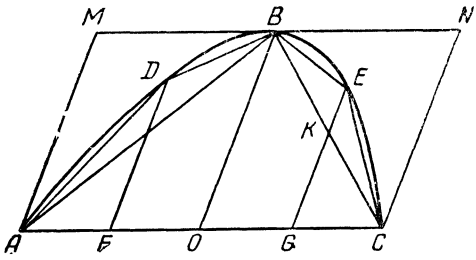

Рис. 14

Методом исчерпывания доказывается, таким образом, единственность предела. В сочетании с другими методами он полезен для нахождения предела. Однако решения вопроса о существовании предела этот метод не может дать.

В качестве примера метода исчерпывания приведем нахождение квадратуры параболы у Архимеда. Требуется найти площадь косого параболического сегмента ABC, отсекаемого хордой AC. Касательная к точке B диаметра BO, сопряженного с данной хордой, параллельна последней: $MBN \parallel AC$.

Первой фигурой последовательности «исчерпывающих» фигур A_1 является ΔABC. Вторая фигура A_2 получается добавлением к ΔABC двух треугольников: ΔADB и ΔBCE. Для построения последних делят AC на 4 равные части и проводят $FD \parallel OB$ и $GE \parallel OB$. Аналогично строятся фигуры $A_3, A_4, \ldots, A_n$. Из свойств параболы получается: $\Delta ABC = 4(\Delta ADB + \Delta BEC)$. В самом деле, примем OB и MN соответственно за оси x и y косоугольной системы координат. Координаты точки $E\left(\xi, \frac{y}{2}\right)$ удовлетворяют условию: $\left(\frac{y}{2}\right)^2 = m\xi$, откуда $\xi = \frac{y^2}{4m}$.

$$GE = x - \xi = \frac{y^2}{m} - \frac{y^2}{4m} = \frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{m} = \frac{3}{4} x = \frac{3}{4} OB.$$

Так как $GK=\frac{1}{2}OB$, то $KE=\frac{1}{4}OB$ и $GK=2KE$. Теперь уже можно сравнивать площади треугольников:

$$\triangle CKG=2\triangle KCE=\triangle BCE;\quad \triangle OBC=4\triangle GKC=4\triangle BCE.$$

Аналогичные рассуждения приводят к соотношению: $\Delta AOB=4\Delta ABD$, и упомянутое свойство параболы доказано.

Итак, если $A_1=\Delta$, то $A_2=\Delta+\frac{\Delta}{4}$; $A_3=\Delta+\frac{\Delta}{4}+\frac{\Delta}{4^2}$; ...; $A_n=\Delta+\frac{\Delta}{4}+\ldots+\frac{\Delta}{4^{n-1}}$. Теперь требуется доказать, что указанная последовательность фигур действительно «исчерпывает» параболический сегмент, т. е. что $S-A_n<\varepsilon$, где $n=n(\varepsilon)$.

Для этого описывается параллелограмм $AMNC$, у которого $AM\|NC\|BO$. $A_1=\frac{1}{2}S_{AMNC}$, но $S<S_{AMNC}$; значит, $A_1>\frac{1}{2}S$ и $S-A_1<\frac{1}{2}S$. Фигура A_1 «исчерпала» больше половины площади S, а последующие фигуры будут исчерпывать больше половины соответствующих остатков площади S. Удовлетворяется основная лемма метода исчерпывания: если от данной величины отнять часть, бóльшую ее половины, затем отнимать снова и снова, то остаток может быть сделан сколь угодно малым.

Следующим шагом должно быть нахождение предела последовательности вписываемых фигур. Обычно этот шаг остается в сочинениях древних авторов неразъясненным. Однако данный случай составляет исключение. Архимед доказывает, что $A_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Delta}{4k}=\frac{4}{3}\Delta-\frac{1}{3}\cdot\frac{\Delta}{4^{n-1}}$; а коль скоро вычитаемое может быть сделано сколько угодно малым, то утверждает, что $S=\frac{4}{3}\Delta$. При этом он опирается на следующую любопытную теорему: Пусть $S=A+B+C+D+E$, причем $A:B=B:C=C:D=D:E=4:1$. Тогда $S=\frac{4}{3}A-\frac{1}{3}E$. В самом деле образуем:

$$\frac{4}{3}S=\frac{4}{3}(A+B+C+D+E)=\frac{4}{3}A+\frac{1}{3}(A+B+C+D+E)-\frac{1}{3}E;$$

$$\frac{4}{3}S=\frac{4}{3}A+\frac{1}{3}S-\frac{1}{3}E,$$

или $S=\frac{4}{3}A-\frac{1}{3}E$. Теорему можно распространить на любое число слагаемых.

Решение задачи завершается доказательством от противного единственности результата $S=\frac{4}{3}\Delta$.

Метод исчерпывания был одним из распространенных методов античной математики. Им широко пользовался Архимед. Ранее этот метод включил в систему «Начал» Евклид, сделав его основой двенадцатой книги. Предельные переходы, достигавшиеся ранее часто в силу интуитивных или эмпирических соображений, получили в методе исчерпывания первое теоретическое оформление, исторически первую форму метода пределов.

Логическая строгость метода исчерпывания оставалась непревзойденной в течение многих веков. По существу только в XIX в. были поставлены и начали получать разрешение проблемы, непосредственно вытекающие из логической сущности античного метода исчерпывания. Однако форма последнего была еще весьма несовершенной. Метод развивался только в связи с конкретными задачами; он не приобрел вида абстрактного метода, имеющего развитую систему исходных понятий и единообразные алгоритмы. Единственность предела доказывалась для всякой задачи наново. Этот недостаток не был частным, случайным. Дело в том, что всякая попытка ввести это доказательство раз навсегда для определенного достаточно широкого класса задач неизбежно влекла за собой необходимость объяснить ряд понятий инфинитезимальной природы. Потребовалось бы дать рациональное объяснение понятия бесконечно близкого приближения, бесконечно малой величины и т. п. Трудностей, связанных с этим, древние математики не могли преодолеть.

Тем не менее метод исчерпывания лежал в основе многих инфинитезимальных методов и выдающихся конкретных достижений античных математиков, в первую очередь Архимеда (ок. 287—212 гг. до н. э.), которому принадлежит приведенный выше пример квадрирования параболического сегмента. Этот замечательный ученый был уроженцем Сиракуз (южная часть Сицилии), сыном астронома и математика Фидия. Для усовершенствования своих знаний он совершил поездку в Александрию, где некоторое время работал в сотрудничестве с другими крупнейшими математиками. Возвратившись в Сиракузы, Архимед продолжал усиленные научные занятия. В последний период жизни он принял деятельное участие в обороне родного города от римских завоевателей, руководя постройкой сложных технических сооружений и изобретая орудия военного характера. Во время штурма и взятия Сиракуз Архимед был убит, а его библиотека и инструменты разграблены.

Сочинения Архимеда написаны преимущественно в виде писем. До нас дошли десять сравнительно крупных и несколько более мелких сочинений математического характера. Основной особенностью математических сочинений Архимеда является применение строгих математических методов в разработке экспериментально-теоретического материала из области механики и физики

Такая особенность делает труды Архимеда едва ли не наиболее ярким образцом развития прикладных математических знаний, техники вычислений и новых математических методов, в особенности инфинитезимальных, в эпоху поздней античности.

Мы не ставим задачи дать полную характеристику сочинений Архимеда. В соответствии с основной целью лекции мы здесь рассмотрим вопросы: о взаимопроникновении методов математики и механики в трудах Архимеда, о разработке им метода интегральных сумм и об его так называемых дифференциальных методах.

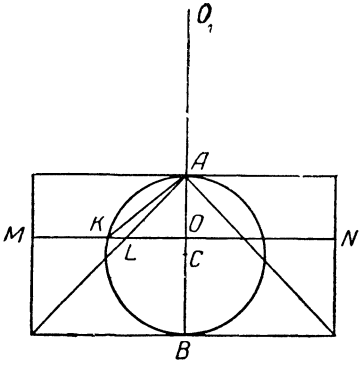

Рис. 15

Многочисленные механические изобретения и открытия Архимеда широко известны. Ему принадлежат: архимедов винт, системы рычагов, блоков и винтов для поднятия и передвижения больших тяжестей, определение состава сплавов взвешиванием их в воде, планетарий, метательные машины и т. д. Известны и теоретические работы Архимеда по механике: «О равновесии плоских фигур», где изложен закон рычага, «О плавающих телах», «Книга опор» и т. д.

В творчестве Архимеда работы по механике занимали настолько большое место, что механические приемы и аналогии проникли даже в математические методы. До недавнего времени о таком проникновении нельзя было судить достоверно. Вопрос окончательно прояснился после того, как в 1906 г. было найдено сочинение Архимеда «Послание к Эратосфену (Эфод)» о механическом методе решения геометрических задач. Метод состоял в следующем.

Пусть необходимо, например, вычислить объем шара. Одновременно с шаром строятся конус и цилиндр, радиус основания и высота которых равны диаметру шара. Затем через все эти тела проводится сечение, параллельное основаниям, на некотором произвольном фиксированном расстоянии от них.

$AK^2=OK^2+OA^2=OK^2+OL^2$; в то же время $AK^2=AB\cdot OA$. Следовательно, $OK^2+OL^2=AB\cdot OA$. Такое же соотношение между величинами, пропорциональными слагаемым: $(\pi AB^2)\cdot OA = (\pi OK^2)AB+(\pi\cdot OL^2)\cdot AB$, представляет собой соотношение между горизонтальными сечениями шара, цилиндра и конуса.

Архимед дает этому соотношению механическую интерпретацию, основанную на правиле рычага, или, что то же самое, двуплечных весов. Именно, если принять точку A за точку опоры рычага, то элемент цилиндра, закрепленный в O, уравновесит элементы

шара и конуса, закрепленные в O_1 ($AO_1=AB$). Переходя к объемам тел, как к суммам всех произвольных сечений, параллельных друг другу, получим:

$$V_{\text{цил}}\cdot AC=(V_{\text{шар}}+V_{\text{кон}})\cdot AO_1=(V_{\text{шар}}+V_{\text{кон}})\cdot 2AC;$$

отсюда

$$V_{\text{шар}}=\frac{1}{2}V_{\text{цил}}-V_{\text{кон}}.$$

Но так как $V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}V_{\text{цил}}$, то $V_{\text{шар}}=\frac{1}{6}V_{\text{цил}}$, или

$$V_{\text{шар}}=\frac{1}{6}\pi(2r)^2\cdot 2r=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Тот же способ механической аналогии применен Архимедом в сочинении «О квадратуре параболы». Параболическая пластинка представляется подвешенной к одному плечу неравноплечного рычага и разделенной на элементы, каждый из которых представляется уравновешенным соответственной нагрузкой на другом плече.

В соответствии с научной традицией своего времени Архимед переводил доказательства, полученные методом механической аналогии, на общепринятый язык метода исчерпывания с обязательным завершением последнего, в каждом отдельном случае, доказательством от противного.

Механические и физические аналогии и в последующие века часто применялись с успехом для решения трудных математических задач. Например, в середине XVIII в. петербургский академик Д. Бернулли из физических соображений нашел общее решение уравнения колебания струны $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ в виде $y=\sum_1^\infty \alpha_k \sin\frac{k\pi x}{l}$. Д. Бернулли исходил из того, что звук, издаваемый колеблющейся струной длины l с закрепленными концами, равен сумме основного тона и обертонов. Отклонение (ордината) струны в каждой точке в любой момент будет равно алгебраической сумме ординат, соответствующих основному тону и обертонам для данного момента времени. Можно также указать, в качестве примера, на Б. Римана, который в середине XIX в. доказал, исходя из представления о данной поверхности как об однородном заряженном проводнике электричества и рассматривая потенциальное поле, что на каждой замкнутой римановой поверхности существует алгебраическая функция, отличная от постоянной.

Следующей разновидностью инфинитезимальных методов античной древности является метод, могущий быть охарактеризованным как метод интегральных сумм. Наиболее яркие примеры

применения этого метода находятся в сочинениях Архимеда: «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сфероидах». Существо этого метода в применении, например, к вычислению объемов тел вращения, состоит в следующем: тело вращения разбивается на части и каждая часть аппроксимируется описанным и вписанным телами, объемы которых можно вычислить. Сумма объемов описанных тел будет больше, а сумма вписанных тел — меньше объема тела вращения. Теперь остается выбрать аппроксимирующие сверху и снизу тела таким образом, чтобы разность их объемов могла быть сделана сколь угодно малой. Это достигается выбором в качестве указанных тел соответствующих цилиндриков.

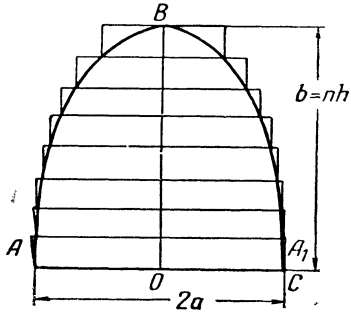

Рис. 16

В виде примера метода интегральных сумм приведем решение Архимедом задачи вычисления объема эллипсоида вращения в сочинении «О коноидах и сфероидах». Этими именами обозначаются тела, образованные вращением конических сечений вокруг большой оси: коноиды — это параболоиды и гиперболоиды вращения, сфероиды — эллипсоиды вращения. Конкретному решению задачи предпослана лемма: если дан сегмент коноида, отсеченный плоскостью, перпендикулярной оси, или сегмент сфероида, отсеченный тем же способом, то можно вписать в него и описать около него фигуры, состоящие из цилиндров равной высоты таким образом, чтобы описанная фигура превосходила вписанную меньше, чем на любую телесную (объемную) величину.

Итак, дано тело вращения ABC и телесная (объемная) величина $\varepsilon > 0$. Делим BO на n равных частей и строим описанные и вписанные цилиндры, суммы объемов которых соответственно обозначим $V_{оп}$ и $V_{вп}$. Их разность равна объему цилиндрика AA_1, т. е. $\pi a^2 \cdot \frac{b}{n}$, который подбором достаточно большого n может быть сделан сколь угодно малым.

Теперь предположим, что на данном чертеже изображен сегмент эллипсоида вращения и поставлена задача вычислить его объем В таком случае

$$V_{оп} = \pi h a^2 + \pi h x_1^2 + \pi h x_2^2 + \ldots + \pi h x_{n-1}^2 = \pi h \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2, \quad (x_0 = a).$$

Задача сведена к суммированию квадратов чисел. Далее Архимед производит геометрические преобразования, эквивалентные следующим аналитическим преобразованиям:

Так как $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то $x^2=\frac{a^2}{b^2}\left(b^2-y^2\right)$ и для каждого сечения:

$$x_1^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-h^2),$$

$$x_2^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-(2h)^2),$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$x_{n-1}^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-[(n-1)h]^2),$$

откуда

$$V_{\text{оп}}=\sum_{k=0}^{n-1}\pi h x_k^2=\frac{\pi a^2 h}{b^2}\left[nb^2-h^2\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^2\right],$$

где ν — последовательные натуральные числа. Для нахождения сумм квадратов последних Архимед применил геометрические оценки вида $\frac{n^3h^2}{3}<\sum_{\nu=1}^{n-1}(\nu h)^2<\frac{(n+1)^3h^2}{3}$, данные им в сочинении «О спиралях». Фактически он производит геометрическую оценку вида

$$\frac{n^3h^3}{3}<\sum_{\nu=1}^{n}(\nu h)^2h<\frac{(n+1)^3h^3}{3},$$

откуда

(так как $nh=b$) $\frac{b^3}{3}<\sum_{\nu=1}^{n}(\nu h)^2h<\frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{n}+\frac{b^3}{n^2}+\frac{b^3}{3n^3}$,

что до известной степени эквивалентно оценке для $\int_a^b x^2dx$.

Из этих оценок получается $V_{\text{оп}}>\pi\frac{a^2}{b^2}h\left[nb^2-\frac{n^3}{3}h^2\right]=$ $=\pi a^2b\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi a^2b$. Аналогично $V_{\text{вп}}<\frac{2}{3}\pi a^2b$. Но так как, согласно лемме, $V_{\text{оп}}-V_{\text{вп}}<\varepsilon$, то искомый объем сегмента $V=\frac{2}{3}\pi a^2b$, т. е. равен удвоенному объему конуса с тем же основанием и высотой, что и сегмент. Единственность предела доказывается, как и во всех других случаях, приведением к противоречию.

Приведенный пример показывает, что в античной математике сложился ряд элементов определенного интегрирования, в первую очередь построение верхних и нижних интегральных сумм, аналогичных до известной степени суммам Дарбу.

Другим примером метода интегральных сумм может служить определение площади первого витка архимедовой спирали: $\rho=\varphi$. Спираль вводится кинематически как сумма двух равномерных движений: вращения луча вокруг точки и движения точки по лучу от центра. Для определения площади первого витка окружность ($r=a$) делится на n частей. Вслед за тем строятся две

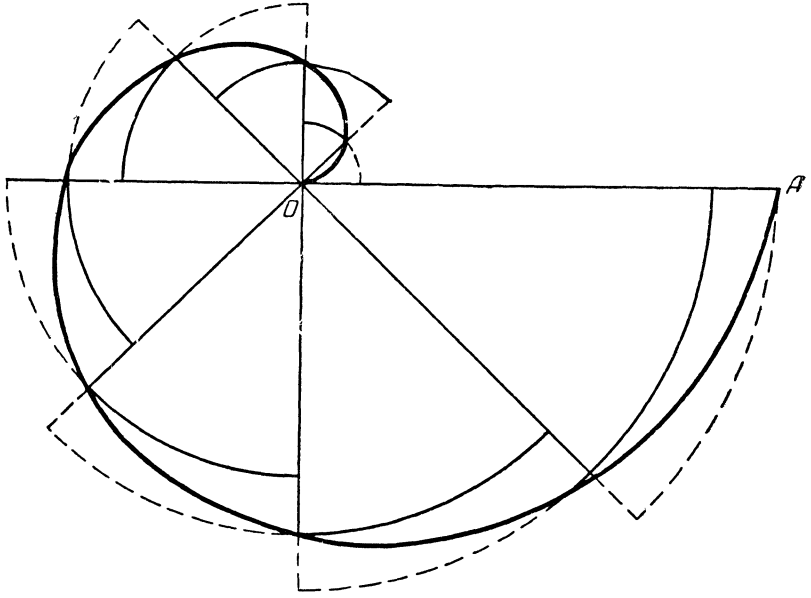

Рис. 17

последовательности вписанных и описанных круговых секторов радиусы которых $\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \ldots, \frac{na}{n}=a$. Их площади:

$S_k=\frac{\pi r_k^2}{n}$, $k=1,2,\ldots,n$. Последовательности эти образуют вписанную и описанную фигуры, площадь которых соответственно больше и меньше площади витка спирали:

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{ka}{n}\right)^2<S<\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ka}{n}\right)^2,$$

или

$$\frac{\pi a^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2<S<\frac{\pi a^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2.$$

На основании оценок, приведенных в предыдущем примере,

$$V_{\text{вп}}<\frac{\pi a^2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{3}=\frac{\pi a^2}{3}, \text{ а также } V_{\text{оп}}>\frac{\pi a^2}{3}.$$

Но разность между аппроксимирующими суммами может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно, $S=\frac{\pi a^2}{3}$.

Казалось бы, сходство метода интегральных сумм древних и определенного интегрирования полное. Такое впечатление может только усилиться от того, что мы модернизировали форму изложения. Поэтому необходимо отметить и их различие. Дело в том, что метод интегральных сумм древних опирается на интуитивное, строго не определенное, понятие площади и не использует

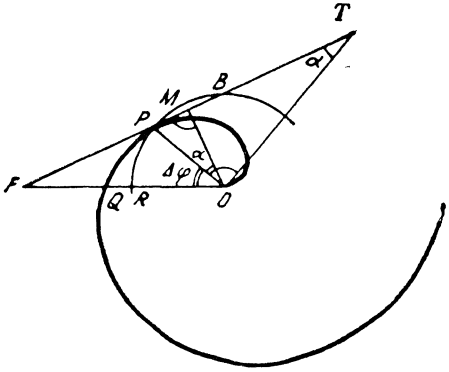

Рис. 18

арифметико-алгебраического аппарата. В нем не введены и не определены необходимые общие понятия: предела, интеграла, бесконечной суммы и т. д., и не изучены условия применимости высказываемых теорем. Словом, метод применяется индивидуально для каждой конкретной задачи без выделения и оформления его общетеоретических основ.

Наряду с методом интегральных сумм в античной математике были разработаны методы, которые ретроспективно могут быть оценены как дифференциальные. Примером подобных методов может служить метод нахождения касательной к спирали в сочинении Архимеда «О спиралях».

Задача найти касательную к любой точке P спирали решается обычным способом определения величины, соответствующей подкасательной OT (рис. 18). Предварительно доказывается лемма, что $\angle OPT<\frac{\pi}{2}$ ($\angle POT=\frac{\pi}{2}$, по построению). Затем рассматривается дифференциальный треугольник ΔFPR, по существу образованный радиусом-вектором, близким к данному, дугой PR окружности радиуса OP и продолжением касательной FP. Этот треугольник прямоугольный $\left(\angle PRF=\frac{\pi}{2}\right)$ и приблизительно подобен треугольнику OPT, ибо $\angle PTO\doteq\angle FPR$.

Отсюда $\frac{FR}{PR}=\frac{PO}{OT}$, или, если перевести на более удобную для нас символику, ($OP=\rho$, $PR=\rho\Delta\varphi$, $FR=\Delta\rho$) $\frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi}=\frac{\rho}{OT}$, откуда $OT=\rho^2\frac{\Delta\varphi}{\Delta\rho}$. Это общее соотношение в случае архимедовой спирали $\rho=\varphi$ примет вид: $OT=\rho^2$, или $OT=\rho\varphi$.

Таким образом, метод Архимеда заключается во введении практически достаточно малого треугольника, образованного приращением полярного радиуса-вектора касательной, соответствующей малой дугой окружности и отрезком касательной. Он играет роль дифференциального треугольника, что дает основания причислить метод к разряду инфинитезимальных.

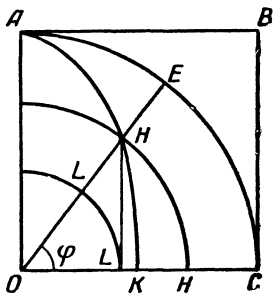

Рис. 19

Наряду с другими задачами и методами древности дифференциальный треугольник Архимеда явился предметом настойчивого исследования ряда выдающихся математиков XVI—XVII вв. Паскаль и Барроу явно ввели его в математику: первый — в составе своих интеграционных методов, второй — при проведении касательных и при доказательстве взаимно-обратной зависимости между квадратурами и касательными. Лейбниц использовал этот треугольник как один из отправных пунктов при создании своего исчисления дифференциалов.

К инфинитезимальным методам можно отнести и ряд других приемов и методов древних. Прежде всего отметим прием Динострата (IV в. до н. э.), который, отыскивая точку пересечения квадратрисы с осью абсцисс, нашел по существу оба замечательных предела: $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi}=1$, $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi}=1$.

Ординаты точек квадратрисы, как известно, пропорциональны соответствующим углам. Отсюда, обозначив $OA=r$, получим для некоторой произвольной точки $H(HL=y)$: $\frac{r}{y}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\varphi}$, откуда $\frac{2r}{\pi}=\frac{y}{\varphi}$. Учитывая, что y является линией синуса для круга радиуса OH и линией тангенса для круга радиуса OL, получим

$$\frac{2r}{\pi}=OH\cdot\frac{\sin\varphi}{\varphi}=OL\cdot\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi}.$$

При

$$\varphi\to 0 \quad OH\to OK \quad \text{и} \quad OL\to OK.$$

Следовательно, $OK = \lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin\varphi} = \lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}$.

Тот факт, что $OK = \frac{2r}{\pi}$, Динострат доказывает от противного, опираясь на непрерывность квадратрисы и неравенство $\sin\varphi < \varphi < \operatorname{tg}\varphi$, доказывая тем самым оба замечательных предела.

Пусть $OK < \frac{2r}{\pi}$. Тогда найдется на квадратрисе точка H, для которой $OH = \frac{2r}{\pi}$, для соответствующего угла φ. Тогда ордината этой точки $y = \frac{2r}{\pi}\sin\varphi$ и одновременно $y = \frac{r\varphi}{\pi/2}$ из свойства квадратрисы. Из этого должно вытекать, что $\sin\varphi = \varphi$, что невозможно.

Предположение, что $OK > \frac{2r}{\pi}$ таким же образом приводит к невозможному заключению: $\varphi = \operatorname{tg}\varphi$.

Инфинитезимальные методы разрабатывались и для решения класса экстремальных задач. В сочинении Архимеда «О шаре и цилиндре» (кн. 2, пр. 4) поставлена задача разбиения шара (радиуса a) на два сегмента, объемы которых находились бы в заданном отношении $m : n$. Показано, что высота большего сегмента x удовлетворяет пропорции $4a^2 : x^2 = (3a - x) : \frac{m}{m+n}a$. Показано также, что эта задача может быть обобщена: разделить отрезок a на две части x и $a-x$ так, чтобы $S : x^2 = (a-x) : c$, где S — заданная площадь, а c — заданный отрезок. Чтобы эта последняя задача имела неотрицательные решения, надо наложить ограничения на область значений S и c.

Из более поздней рукописи известно, что Архимед, отыскивая геометрическое решение уравнения $x^2(a-x) = Sc$, правильно находил, что максимум его левой части в области $o < x < a$ достигается при $x = \frac{2}{3}a$, тем самым решая экстремальную задачу.

Наконец, в античной математике рассматривались и так называемые вариационные задачи. У Архимеда подобная задача встречается только один раз — в заключительном предложении сочинения «О шаре и цилиндре». Здесь рассматриваются изоповерхностные сегменты различных шаров и доказывается, что сегмент, имеющий форму полушара, имеет наибольший объем. Немного позднее вышло сочинение Зенодора, в котором теория изопериметрических фигур была строго и полно развита для многоугольников, кругов и, в некоторой степени, для многогранников, простейших тел вращения и для сферы. Предложения экстремального характера были широко распространены в то время, подчас нося не чисто математический, а механический или даже натурфилософский характер.

Инфинитезимальные методы древней Греции послужили исходным пунктом многих исследований ученых-математиков XVI и XVII вв. Особенно часто подвергались изучению методы Архимеда. Лейбниц, один из основателей математического анализа, по этому поводу писал: «Изучая труды Архимеда, перестаешь удивляться успехам современных математиков».

Инфинитезимальные методы образуют ту часть античной математики, которая формировалась под непосредственным давлением научно-практических запросов. Эта часть выходила за рамки образуемых в то время замкнутых математических систем, построенных на основе минимального числа основных положений. В инфинитезимальных методах получили первое выражение элементы новых математических средств, приведших к созданию анализа бесконечно малых. Отношения противоречия между совокупностью подобных методов и замкнутыми логико-математическими системами в древней Греции представляют один из исторических примеров противоречий, являющихся движущей силой развития математических наук.