ЛЕКЦИЯ 6

ТЕОРИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ И ДРУГИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДЫ ПОЗДНЕЙ АНТИЧНОСТИ

В сложном и многообразном научном наследии ученых древности мы выделяем, в качестве объекта изучения, преимущественно те его стороны, которые ведут (и приводят) к созданию математических теорий. Последнее (создание математических теорий) является наиболее характерной чертой математического творчества в эпоху греческой античности. В то же время математические теории древних греков составляют классическую основу многих важных проблем, относящихся к основаниям современной математики, что придает им непреходящую математическую ценность.

Со времени Евклида и Архимеда лицо античной математики начинает сильно изменяться как по форме, так и по содержанию. В силу причин, которые мы охарактеризуем ниже, процесс формирования математических теорий начинает замедляться и, наконец, прекращается. Однако этот процесс был длительным и обозначился не сразу. Младшие современники Архимеда и ученые более поздней античности оставили в своих сочинениях примеры теоретических исследований и даже развитых математических теорий. Среди них первое место по уровню теоретического развития и полноте рассматриваемых фактов занимает теория конических сечений.

Ранее мы указывали, что конические сечения вошли в античную математику как средство решения задач, не поддающихся решению средствами геометрической алгебры, т. е. построениями с помощью циркуля и линейки. При помощи этих кривых Менехм (IV в. до н. э.) дал решение задачи об удвоении куба. Для их получения пользовались геометрическими местами точек пересечения поверхности конуса (соответственно, остро-, тупо- или прямоугольного) плоскостью, перпендикулярной одной из образующих конуса.

Не сохранилось сведений о том, как были впервые найдены свойства конических сечений, представляющие геометрический эквивалент их алгебраических уравнений. Однако задача обнаружения этих свойств вполне разрешима элементарными средствами, в чем убеждают имеющиеся исторические реконструкции.

Пусть, например, дан прямоугольный конус с вершиной в T. Сечение его вдоль оси—KTC, след кругового сечения, параллельного основанию—GH, след сечения, перпендикулярного образующей — AP. Перпендикуляр к сечению KTC в точке P до пересечения с поверхностью конуса обозначим y.

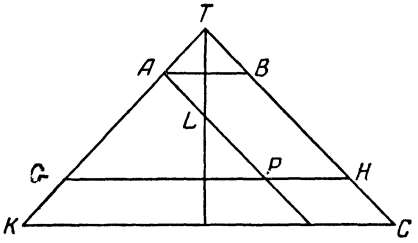

Рис. 20

Тогда $y^2=PG\cdot PH=\sqrt{2}\,AP\cdot AB=2AP\cdot AL$. Если обозначить $AP=x$, $AL=p$, то получим уравнение параболы: $y^2=2px$.

В случае, если конус берется не прямоугольный, то в чертеже добавится только точка A_1 пересечения со второй образующей или с ее продолжением. Обозначая в этом случае $AP=x$, $A_1P=x_1$, отрезок до оси $AL=p$ (полупараметр), $AA_1=2a_1$ получим

$$y^2=\frac{2AL}{AA_1}\cdot AP\cdot A_1P, \quad \text{или} \quad y^2=\frac{p}{a}\,xx_1.$$

Эта реконструкция принадлежит Г. Цейтену (см. его «Историю математики в древности и в средние века», 1932, стр. 133—136). Она убедительно демонстрирует возможность вывода свойств конических сечений элементарно-геометрическим путем. При этом получается уравнение, отнесенное к осям, причем параметр $2p$ получает удобную геометрическую интерпретацию (полупараметр p равен отрезку AL от конической поверхности до оси)

Интерес к коническим сечениям возрастал по мере того, как увеличивалось количество решаемых с их помощью задач. Свойства конических сечений стали предметом специального теоретического исследования. Коническим сечениям был посвящен ряд сочинений. Однако, подобно тому как это имело место с «Началами», все эти сочинения были забыты, когда появился труд Аполлония о конических сечениях. Он не имеет себе равных по полноте, общности и систематичности изложения теории конических сечений.

Аполлоний (около 200 г. до н. э.) — младший современник и научный соперник Архимеда. Продолжительное время он жил и работал в Александрии. Затем возвратился на родину в г. Пергам (в Малой Азии), где был главой математической школы. Из многочисленных математических сочинений Аполлония до нас

дошли в основном только 7 из 8 книг «Конических сечений». Первые четыре книги дошли до нас на греческом языке — на языке оригинала, книги 5—7 сохранились только в переводе на арабский язык; предполагаемое содержание восьмой книги восстановил английский астроном и физик Э. Галлей (1656—1742), исходя из содержания первых семи книг и сведений, сообщенных комментаторами Аполлония.

Теория конических сечений развивается Аполлонием на основе достаточно общих исходных посылок. Сразу вводятся обе полости произвольного конуса с круговым основанием и рассматриваются произвольные плоские его сечения. Каждая из получающихся при этом кривых рассматривается по отношению к некоторому диаметру и семейству сопряженных с ним хорд. Из образующегося класса кривых выделяются канонические формы, в которых диаметры перпендикулярны к сопряженным с ними хордам. Указывается, что эти канонические формы есть сечения конусов вращения.

При таком способе рассмотрения обеспечивается единообразие подхода ко всем видам конических сечений. При этом в рассмотрение включаются сразу обе ветви гиперболы. Отнесение кривых к диаметрам и сопряженным с ними хордам содержит в себе идею метода координат, хотя и в несовершенной форме.

Свойство кривых, являющееся геометрическим эквивалентом их уравнения, формулируется с применением средств геометрической алгебры. Пусть даны конические сечения: эллипс и гипербола (рис. 22 и 23). Диаметр у обоих обозначим AB. Если из конца A оси опустить перпендикуляры $AE = 2p$ и CF, то квадрат, построенный на CD, будет равен прямоугольнику $AF \cdot CD^2 = CF \cdot AC$.

Но $CF = \frac{p}{a} CB$ (из $\frac{CF}{2p} = \frac{CB}{2a}$) и поэтому

$$CD^2 = \frac{p}{a} AC \cdot CB.$$

Положив $AC = x$, $CB = 2a - x$, получим соответственно уравнения:

$$y^2 = \frac{p}{a}(2a - x)x \quad \text{и} \quad y^2 = \frac{p}{a}(2a + x)x.$$

В первом случае прямоугольник CE используется с недостатком, во втором — с избытком. Если нет ни недостатка, ни избытка, то имеет место парабола — простое равенство квадрата прямоугольнику со стороной $2p$.

Геометрическая алгебра, в терминах которой выражен геометрический эквивалент уравнений конических сечений, играет здесь примерно такую же роль, какую играет алгебра в аналитической геометрии. Разумеется, при таких заключениях общего

характера об использовании алгебры и координатного метода в теории конических сечений Аполлония не следует забывать, что:

а) системы координат Аполлония неотделимы от своих индивидуальных кривых;

б) не введены еще координаты для всех точек плоскости, как принадлежащих, так и не принадлежащих данной кривой;

в) здесь нет еще и речи о сведении задачи соотнесения точек осям координат к вычислениям, так как нет вообще стремления сводить геометрические задачи к алгебраическим.

В качестве примера стиля рассуждений Аполлония приведем его определение параболы $y^2=2px$: «Если конус пересечен плоскостью по оси

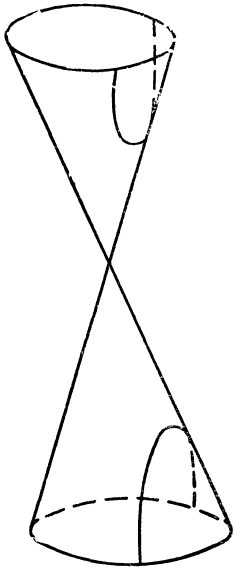

Рис. 21

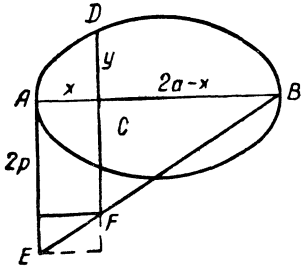

Рис. 22

и пересечен также другой плоскостью, которая пересекает основание конуса по прямой, перпендикулярной к основанию треугольника по оси, и если, кроме того, диаметр сечения параллелен той или другой из двух сторон треугольника, по оси, то всякая прямая, которая проводится от сечения конуса параллельно общему сечению секущей плоскости и основанию конуса до диаметра, взятая в квадрате, будет равна прямоугольнику, заключенному прямо из диаметра, отрезанного от нее до вершины сечения и некоторой другой прямой, которая имеет к прямой, взятой между углом конуса и вершиной сечения, такое отношение, какое квадрат основания треугольника по оси к прямоугольнику, заключенному остальными двумя сторонами треугольника. Такое сечение называется «параболой» («Конические сечения», кн. 1, предл. 11; см. «Изв. Сев.-Кавк. гос. ун-та», 1928, т. 3(15), стр. 141).

Первая книга «Конических сечений», помимо указанных выше основ теории, включает в себя теоремы о проведении касатель-

ных. Речь идет о проведении опорной прямой, т. е. прямой через точку $(x_0 y_0)$ конического сечения $y^2=2px\pm x^2$ таким образом, чтобы для всех других точек (xy) прямой удовлетворялось неравенство

$$\frac{y^2}{2px\mp\frac{p}{a}x^2}>\frac{y_0^2}{2px_0\mp\frac{p}{a}x_0^2}.$$

Во второй книге содержится теория главных осей, асимптот и сопряженных диаметров. Доказывается, в частности, что у эл-

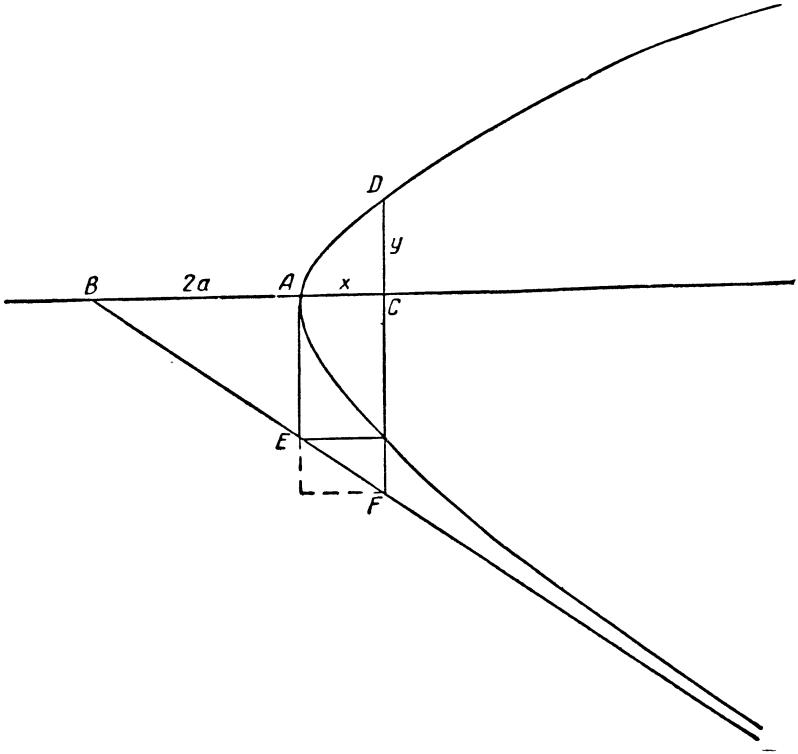

Рис. 23

липса, гиперболы или параболы имеется только одна пара взаимно-перпендикулярных осей, что если соединить прямой точку пересечения двух касательных с серединой хорды, соединяющей точки касания, то эта прямая будет диаметром и т. п. Наконец, сообщаются способы построения центров и осей данного конического сечения и др.

Третья книга начинается группой теорем о площадях фигур, образуемых секущими, асимптотами и касательными. Среди них

находятся такие, например, широко известные теоремы: Если из точки проведем две касательные к коническому сечению и проведем параллельно им две секущие до их пересечения, то отношение квадратов, построенных на касательных, будет равно отношению прямоугольников, построенных на секущих и их внешних отрезках. В этой же книге находятся теоремы о полюсах и полярах и о получении конических сечений с помощью двух проективных или гомографических пучков. Наконец, через посредство свойств соответствующих площадей рассматриваются простейшие случаи проведения касательных, не пользуясь точками касания, а также теория фокусов эллипса и гиперболы.

Первая группа предложений четвертой книги относится к гармоническому делению прямых. Затем подробно разбирается вопрос о наибольшем числе точек пересечения и соприкосновения двух конических сечений.

Книги 1—4 часто характеризуют как содержащие изложение основных свойств конических сечений. Следующие же книги считают относящимися к специальным вопросам теории конических сечений.

В пятой книге впервые решаются экстремальные задачи вроде задачи о кратчайшем расстоянии от данной точки до конического сечения. В ней же появляются элементы теории разверток в виде определения геометрического места центров кривизны.

Шестая книга содержит разбор проблемы подобия конических сечений и обобщения задачи о построении семейства конусов, проходящих через данное коническое сечение. В последней из известных седьмой книге исследуются вопросы, связанные с функциями длин сопряженных диаметров, параметров и т. п. Например, доказывается, что для эллипса (соответственно гиперболы) сумма (соответственно разность) квадратов сопряженных диаметров равна сумме (соответственно разности) квадратов осей. Или другой пример: площадь треугольника, образованного двумя сопряженными диаметрами и хордой, соединяющей их концы,— постоянна. Разработка диоризмов (ограничений, налагаемых на условия задач) в конце седьмой книги указывает, что восьмая книга, возможно, содержит задачи, примыкающие к теоретическому материалу седьмой книги. Так и трактовал восьмую книгу Э. Галлей, работая над воссозданием ее утерянного текста.

Мы уделили сравнительно много места этой аннотации отдельных книг «Конических сечений» Аполлония, чтобы показать, сколь высокие достижения имела теория конических сечений античной древности. Результатами этой теории позднее существенно воспользовались математики при создании аналитической геометрии.

Из изложенного здесь и в предыдущих лекциях видно, что большинство математических теорий до сих пор имело своим предметом геометрические объекты. Геометричность формы математической теории сделалась с течением времени ее непременным атрибутом. При этом геометричность идентифицировалась с общезначимостью математической теории, ибо геометрические величины представлялись имеющими преимущество наибольшей общности в классе математических величин.

Нет, разумеется, оснований утверждать, что геометрические формы исчерпывали всю совокупность форм математической деятельности. Древние греки в практической области применяли большой комплекс арифметико-вычислительных методов. Этот комплекс проникал и в теоретические работы, дополняя теорию арифметико-алгебраическими и теоретико-числовыми элементами.

Неудобства алфавитной системы счисления и неразработанность символов являлись серьезным препятствием для вычислительных операций. В течение некоторого времени и требования практики в этом отношении не были достаточными, чтобы стимулировать операции с весьма большими числами. Вслед за сравнительно ограниченным набором чисел, имеющих названия, довольно быстро наступал порог, после которого число элементов практически представлялось неисчислимым.

Чтобы устранить подобное несовершенство и показать неограниченную продолжаемость натурального ряда чисел, Архимед написал специальное сочинение под названием «Псаммит» (исчисление песка). В нем строится система чисел, показывается, что она может быть продолжена сколь угодно далеко и служить для пересчета любого конечного множества предметов.

Система чисел Архимеда построена по десятичному принципу: единицы (монады), десятки (декады), сотни (гекады), тысячи (хилиады), десятки тысяч (мириады) и т. д. Мириада затем рассматривается как основа счета до числа мириады мириад (10^8). Числа от 1 до 10^8 образуют первую октаду (от слова *окто* — восемь), а числа, в нее входящие, называются первыми. Далее следуют вторая октада (10^8—$10^{8.2}$), третья ($10^{8.2}$—$10^{8.3}$) и т. д. до октады чисел октадных ($10^{8.10}$), замыкающей первый период. Она является исходной единицей второго периода. Октада единиц этого периода ($10^{8.10^8+8}$) будет единицей вторых чисел второго периода и т. д. Далее следуют единицы чисел третьего периода ($10^{2.8.10^8}$), четвертого ($10^{3.8.10}$) и т. д. до октады чисел октадных октадного периода ($10^{10.8.10^8}$).

Получающиеся огромные числа воспринимались как своеобразные трансфиниты древности, шкала роста которых могла быть неограниченно продолжаема. Их с избытком хватало даже для такой задачи, как определение порядка числа песчинок, могущих полностью заполнить всю вселенную.

Чтобы сделать задачу возможно более определенной, Архимед, исходя из гелиоцентрических воззрений Аристарха Самосского, представляет вселенную как шар, в центре которого находится Солнце. Радиус шара считается от Солнца до неподвижных звезд. Для дальнейшего уточнения задачи принимается, что диаметр вселенной во столько же раз больше диаметра солнечной системы, во сколько раз этот последний больше диаметра Земли. Архимед использует экспериментальные данные астрономов, округляя их в сторону увеличения.

Единица измерения вселенной — песчинка, принята за 0,0001 зернышка мака, которых требуется 40 штук, чтобы сравняться с шириной человеческого пальца. Подсчеты, произведенные Архимедом, показали, что искомое число песчинок будет не больше чем 10^{63}, или тысячи (10^3) мириад (10^4) чисел восьмых (10^{7^8}) первого периода.

Архимеду приписывают и другую задачу, в которой требуется оперировать с чрезвычайно большими числами,— так называемую задачу о быках Гелиоса (бога Солнца). Для сокращения обозначим буквами *б*, *ч*, *р*, *п* — число быков соответственно белой, черной, рыжей и пестрой масти, а буквами *б'*, *ч'*, *р'*, *п'* — число коров тех же соответственно мастей. В стихотворной форме ставится задача определения численности стада, исходя из следующих условий:

1. $б=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)ч+р$;
2. $ч=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)п+р$;
3. $п=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)б+р$;
4. $б'=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot(ч+ч')$;
5. $ч'=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\cdot(п+п')$;
6. $п'=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\cdot(р+р')$;
7. $р'=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\cdot(б+б')$;
8. $б+ч$ — есть точный квадрат;
9. $п+р$ — есть треугольное число;
10. $б+ч+п+р$ — есть тоже треугольное число.

Первые 7 условий составляют систему семи уравнений с восемью неизвестными. Наименьшие численные решения дают общую численность стада 50 389 073 головы Условия же 8, 9, 10 приводят, по позднейшим вычислениям, к нахождению наименьшего целочисленного решения неопределенного уравнения $x^2-4\,729494y'=1$, которое выражается только 206545-значным числом.

Вычисление значений чисел, иррациональных или трансцендентных, породило идею приближения их рациональными числами. Например, в работе Архимеда «Измерение круга»

вычисление числа π производится с помощью вписанных и описанных многоугольников и дает приближения $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Оценки сверху и снизу вводились также и для вычисления $\sqrt{3}$: $\frac{1351}{780} < \sqrt{3} < \frac{265}{133}$ и других квадратичных иррациональностей. О способах нахождения этих оценок существуют в большинстве лишь исторические реконструкции; в античных источниках сведения об этом совершенно недостаточны.

Однако уровень вычислительно-практических приложений многих развитых математических теорий оставался все же сравнительно низким. Это объясняется преимущественно характером содержания и формы этих теорий: оторванностью от практики, принудительностью геометрической формы, ограничением совокупности применяемых методов, отсутствием тригонометрии. Требования астрономии к математике с достаточной силой сказались позже.

Вслед за временем жизни и деятельности Евклида, Архимеда и Аполлония наступило время быстрого и коренного изменения античной математики как по содержанию, так и по форме. Эти изменения в основном были обусловлены происходящими в то время грандиозными переменами в экономической, общественно-политической и культурной жизни народов.

Главным процессом экономического характера был распад рабовладельческого способа производства, приведший к громадным революционным преобразованиям и к становлению феодального строя. Ф. Энгельс так характеризовал этот процесс в применении к Римской империи:

«Античное рабство пережило себя. Ни в крупном сельском хозяйстве, ни в городских мануфактурах оно уже не приносило дохода, оправдывавшего затраченный труд,— рынок для его продуктов исчез. А в мелком земледелии и в мелком ремесле, к которым свелось производство колоссальных рабовладельческих хозяйств времени расцвета империи, не было места для большого числа рабов. Только для рабов, обслуживающих домашнее хозяйство и роскошную жизнь богачей, оставалось еще место в обществе. Но отмирающее рабство все еще было в силах заставить признавать всякий производительный труд рабским делом, недостойным свободных римлян, а такими теперь были все. В результате получилось, с одной стороны,— увеличение числа вольноотпущенных рабов, излишних и ставших обузой, а с другой стороны,— увеличение числа колонов и обнищавших свободных... Рабство перестало окупать себя и потому отмерло. Но отмирающее рабство оставило свое ядовитое жало в презрении свободных к производительному труду. То был безвыходный тупик, в который попал римский мир: рабство сделалось экономически невы-

годным, труд свободных морально презирался. Первое уже не могло, второй еще не мог сделаться основной формой общественного производства. Вывести из этого положения могла только коренная революция» (Ф. Энгельс. Происхождение семьи, частной собственности и государства. К. Маркс и Ф. Энгельс. Избранные произведения в двух томах, т. 2, 1949, стр. 284—285).

Коренные изменения экономической структуры общества сопровождались большими политическими событиями. Эти события, как правило, происходили в обстановке разрушительных войн, имеющих губительное влияние на науку и культуру. Мировая империя римлян в ходе завоевательных войн разрушила все научные центры и не создала условий для их восстановления и развития. Последующее крушение Рима под напором других народов и революций рабов тоже протекало в обстановке войн и разрушений. Феодальные государства Европы, появившиеся в результате всех этих событий, были вначале, как правило, мелкими, хозяйство их — натуральным, образование и просвещение, а также научный и культурный обмен — ничтожными.

Значение Александрии как основного научного центра в это время падает. Некоторое время там еще ведутся научные исследования. Однако ряд неблагоприятных событий сводит эту работу на нет. Пожары Музейона нанесли непоправимый ущерб библиотеке. В начале нашей эры ученые были лишены государственной материальной поддержки. Под давлением реакционного духовенства закрывались нехристианские храмы и находящиеся при них школы. В 412 г. последняя группа александрийских ученых была разогнана, их руководитель, первая известная в истории женщина-математик Гипатия, растерзана по наущению христианских попов, библиотека уничтожена. Оставшиеся в живых ученые собрались в Афинах, где работали до 529 г., когда их деятельность была запрещена официальным указом.

О тех изменениях, которые произошли в математике за этот период времени, мы можем судить по дошедшим до нас математическим сочинениям. Последние прежде всего показывают, что резко замедлился, а затем и совсем прекратился процесс образования математических теорий. Результаты, подчас очень важные по существу и красивые по выполнению, делаются все более частными, специальными. Приведем пару примеров. Так, Никомед (II в. до н. э.) исследовал частный вид конхоиды — плоской кривой, получающейся при увеличении или уменьшении радиус-векторов данной прямой (общий случай — данной кривой) на одну и ту же величину. Кривую эту Никомед получил, исследуя проблему образования вставок для решения задач о трисекции угла и удвоения куба. К исследованиям подобного рода относится изучение циссоиды Диоклесом как геометрического места точек

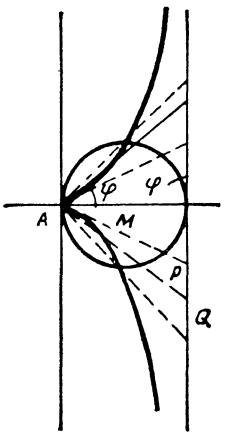

Рис. 25

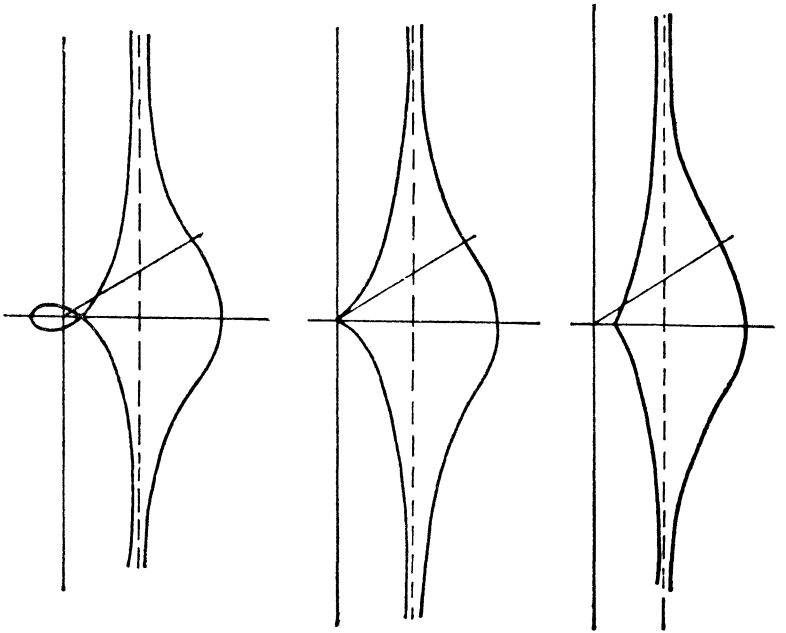

Рис. 24

пучка прямых с центром в A, таких, что $AM=PQ$ (см. рис. 25). Эти и другие исследования, отдельные результаты (вроде изопериметрических проблем Зенодора) надолго вошли в математику последующих времен. Однако они представляли собой только отдельные, размельченные результаты, уже не ведущие к созданию новых классических направлений, новых классических теорий.

В математике поздней античности и эпохи владычества Рима все бо́льшее место занимают практические вычислительные методы и задачи. Образцом работ подобного направления являются математические работы Герона из Александрии (I—II вв. н. э.), в особенности его «Метрика». Стиль последней— рецептурный: для определенных классов задач формулируются правила, справедливость которых подкрепляется примерами. В «Метрике» содержатся: правила для точного и приближенного определения площадей геометрических фигур и объемов тел, правила численного решения квадратных уравнений и извлечения (преимущественно приближенного) квадратных и кубических корней. В частности, в ней приводится известная формула Герона для вычисления площади треугольника по трем его сторонам $S_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (a, b, c — стороны, $p=\frac{a+b+c}{2}$). Наконец значительную часть содержания «Метрики» составляет описание приемов землемерия и геодезических инструментов.

В других сочинениях Герона: «Механика», «Пневматика», «Диоптрика» — систематически излагаются основные достижения античных ученых в области прикладной механики. «Метрика» в этом ряду сочинений играет вспомогательную роль математической (в прикладном смысле) энциклопедии.

Значение прикладной вычислительной стороны математики еще более подчеркивается той большой и все возрастающей работой, которую математики вынуждены были вести в связи с составлением астрономических таблиц. Среди последних особо значительное место занимают таблицы хорд (что эквивалентно таблице синусов) Птолемея (II в. н. э.), где данные приведены через каждые 30′ от 0 до 180°.

На основе преимущественного роста вычислительной стороны математики, а возможно и под другими дополнительными влияниями, в математике поздней античности зародились элементы алгебры и начальные формы алгебраической символики. На это обстоятельство указывают методы и результаты Диофанта.

Из математических сочинений Диофанта, жившего и работавшего в Александрии (вероятно, в III в. н.э.), сохранились 6 книг «Арифметики» и отрывки книги о многоугольных числах. Понятие многоугольных чисел возникло в пифагорейской математике как следствие геометрической интерпретации теоретико-

числовых соотношений. Если обозначать числа точками и располагать их в виде каких-либо фигур, то частные суммы арифметических прогрессий (вида $a_1=1$, $d=n-2$) могут быть изображены в виде семейства подобных многоугольников (см. рис. 26 для $n=3$, 4, 5), а соответствующие числовые значения могут называться (и называются) многоугольными. Ко времени Диофанта эту идею распространяли также на пространство. При этом получались пространственные числа, изображаемые семейством

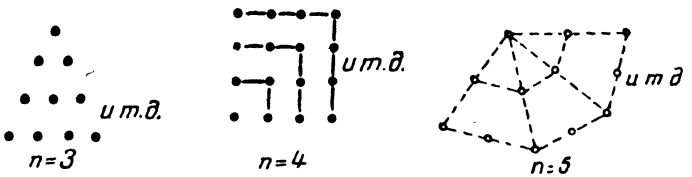

Рис. 26

подобных параллелепипедов (в частном случае — кубов), пирамидальные числа (частные суммы последовательностей многоугольных чисел) и т. д.

Операции с числами, точнее говоря с рациональными числами, являются предметом исследования в «Арифметике» Диофанта. В первой книге он вводит основные арифметические понятия, правило знаков при умножении, правила оперирования с многочленами, решает линейные уравнения. В последующих книгах содержатся многочисленные задачи, приводящиеся к уравнениям с рациональными коэффициентами и имеющим рациональные корни.

Диофант во всех задачах пользуется специальными числовыми значениями и производит только операции с числами, нигде не высказывая общих теорем. Тем не менее для обозначения неизвестного количества в уравнении и для записи функций от него он был вынужден разработать систему символов.

Символика Диофанта основана на сокращении слов. В истории развития алгебраической символики она знаменует переход от словесных выражений алгебраических зависимостей («риторическая» алгебра) к сокращениям этих выражений («синкопическая» алгебра). Следующей ступенью развития уже будет являться чисто символическая алгебра.

Неизвестная величина x в уравнениях Диофанта представлена специальным символом. Переписчики, впрочем, пользовались разными символами, что не изменяет принципиально существа дела. Если неизвестное, которое мы обозначим ξ, входит в уравнение с коэффициентом, то оно обозначается $\dot{\xi}\dot{\xi}$, что соответствует множественному числу. Для степеней x применяются

символы: x^2—$\overline{\delta^{\upsilon}}$ (от слова δύναμις — степень), x^3—$\overline{\kappa^{\upsilon}}$ (от κύβος), x^4—$\overline{\delta\delta^{\upsilon}}$, x^5—$\overline{\delta\kappa^{\upsilon}}$ и т. д. Знак сложения не употребляется, для вычитания введен специальный знак — ⋔. Равенство записывается словом ἴσος (равный), реже — буквой $\overline{\iota}$. Свободные члены уравнения имеют специальное обозначение $\overline{\mu^{o}}$ (от μονάς — единица). Система счисления — алфавитная. Символика, впрочем, не строго единообразная, имеет модификации. Об употреблении символики Диофанта лучше всего могут дать представление примеры:

а) $\overline{\kappa^{\upsilon}}\overline{\alpha}\overline{\xi}\overline{\xi}\overline{\eta}\,\text{⋔}\,\overline{\delta^{\upsilon}}$ $\overline{\varepsilon}\overline{\mu^{o}}\overline{\alpha}\overline{\iota}\overline{\xi}\overline{\alpha}$ означает $x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x$;

б) $\overline{\xi}\overline{\xi}\overline{\alpha}\overline{\rho}\overline{\alpha}\overline{\iota}\overline{\mu^{o}}\,\overline{\lambda}\,\overline{\iota}\overline{\sigma o}\,\overline{\iota}\overline{\sigma}\overline{\iota}\overline{\nu}\overline{\xi}\overline{\xi}^{o\overline{\iota}\overline{\varsigma}}\,\overline{\iota}\overline{\alpha}$ $\overline{\mu o\nu\alpha\sigma\iota}\,\overline{\iota}\overline{\varepsilon}$ означает $10x + 30 = 11x + 15$

С помощью подобной символики в книгах 2—6 «Арифметики» Диофант решает (т. е. находит одно из их рациональных решений) многочисленные задачи, приводящиеся в большинстве к неопределенным уравнениям второй степени. Им найдены рациональные решения около 130 неопределенных уравнений, принадлежащих более чем к 50 различным классам. В каждом случае Диофант ограничивается нахождением одного корня. Общих методов решения неопределенных уравнений или классификации последних у Диофанта нет. Нет также доказательств; справедливость полученного результата подтверждается только тем, что он при подстановке удовлетворяет условиям задачи.

Общая теория диофантовых уравнений первой степени: $ax+by=1$, где a и b — взаимно простые целые числа, была построена в XVII в. французским математиком Баше де Мезириаком (1587—1638). Он также издал в 1621 г. сочинения Диофанта на греческом и латинском языках со своими комментариями. Над созданием общей теории диофантовых уравнений 2-й степени трудились многие выдающиеся ученые: П. Ферма, Дж. Валлис, Л. Эйлер, Ж. Лагранж и К. Гаусс. В результате их усилий к началу XIX в. было в основном исследовано общее неоднородное уравнение 2-й степени с двумя неизвестными и с целыми коэффициентами:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

Диофантовы уравнения являются предметом исследования и в современной математике. Так называются неопределенные алгебраические уравнения, или их системы, с целыми коэффициентами, у которых разыскиваются целые или рациональные решения. Более широкая точка зрения на диофантовы уравнения состоит в том, что решения этих уравнений разыскиваются в алгебраических числах. Фундаментальные исследования по теории диофантовых уравнений проведены советскими учеными А. О. Гельфондом, Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеевым и В. А. Тартаковским.

Имя Диофанта прочно закрепилось и в той части теории чисел, которая изучает приближения действительных чисел рациональными числами. Эти приближения называются диофантовыми. К теории диофантовых приближений относят также вопросы, относящиеся к решению в целых числах неравенств (или их систем) с действительными коэффициентами и вопросы теории трансцендентных чисел. Центральное место в теории диофантовых приближений занимают методы и результаты академика И. М. Виноградова.

Таким образом, сочинения Диофанта послужили по существу отправной точкой многих теоретико-числовых и алгебраических исследований. По отношению же к античной математике они характеризовали усиление алгебраических тенденций, расцвету которых помешали (как и развитию всех отраслей математики) упомянутые выше неблагоприятные общественно-экономические условия.

К основным характерным чертам математики поздней античности относится также большое распространение сочинений, являющихся комментариями классических сочинений. Преобладание комментариев является, несомненно, признаком упадка математического творчества. Однако сочинения комментаторов принесли большую пользу истории математики, сохранив в отрывках или в пересказе многие классические и важные сочинения. Иногда комментарии являются единственным источником сведений об утерянных сочинениях или забытых достижениях античных математиков.

Одним из ранних комментаторов является Гемин Родосский (около 100 г. до н. э.). По свидетельству Прокла (V в. н. э.), Гемин излагал историю высших кривых: спирали, конхоиды, циссоиды и др. Ему принадлежит также одно из первых делений наук на теоретические (геометрия и арифметика) и на практические (астрономия, механика, оптика, геодезия, правила счета).

Другой из крупных комментаторов — Теон из Александрии (IV в.) оставил комментарии к «Началам» Евклида и к астрономическому трактату «Альмагест» Птоломея. Его дочь, Гипатия, комментировала произведения Архимеда, Аполлония и Диофанта.

Особое место в ряду комментаторов занимает Папп из Александрии (IV в. н. э.). Кроме комментариев к сочинениям Евклида и Птоломея, он оставил большое сочинение «Математические коллекции», в котором подробно и со знанием дела изложил, со своими замечаниями, многие замечательные открытия своих предшественников. Из восьми книг «Математической коллекции» до нас дошли только шесть (книги 3—8). Пропавшие книги, по-видимому, содержали обзор греческой арифметики, на что указывают сохранившиеся отрывки.

Третья книга посвящена истории решения задач удвоения куба и трисекции угла. Папп дает и свое решение первой из них, сводящееся к построению двух средних пропорциональных. Задачи, относящиеся к построению кривых двоякой кривизны и поверхностей, составили четвертую книгу. Описание учения Зенодора об изопериметрических свойствах плоских фигур и поверхностей занимает первую половину пятой книги; учение о правильных телах вошло во вторую ее половину. Астрономии Папп посвятил шестую книгу. В ней содержатся комментарии к «Оптике» и «Феноменам» Евклида, к «О величинах и расстояниях» Аристарха, к «Сферике» Феодосия и др.

Седьмая книга — самая большая и разнохарактерная. Вначале в ней разъясняются методы анализа и синтеза древних и приводятся примеры. Затем следует знаменитая задача Паппа: найти геометрическое место точек, чтобы отрезки, проведенные к заданным прямым под равными углами, удовлетворяли условию, что произведение части их друг на друга находилось бы в постоянном отношении к произведению остальных отрезков. Для значительного класса случаев Папп доказал, что искомым геометрическим местом являются конические сечения. Декарт в XVII в. решил задачу Паппа средствами создаваемой им аналитической геометрии.

Вслед за задачей Паппа в седьмой книге разбирается теорема, известная ныне под именем теоремы Гюльдена: объемы тел, образованных вращением линии или поверхности, относятся как произведения образующих фигур на длину окружности, описываемой их центрами тяжести. Остальное место в седьмой книге занимают комментарии к трудам Аполлония о трансверсалях и ангармоническом отношении.

Последняя, восьмая, книга посвящена практической механике и связанным с ней геометрическим задачам и теоремам. Среди последних имеется, например, следующая характерная теорема: если три материальные точки, находящиеся в вершинах треугольника, будут двигаться одновременно в одном направлении по периметру со скоростями, пропорциональными длинам сторон, то положение центра тяжести не изменится.

Последние из наиболее значительных комментаторов — Прокл (V в.) и Евтокий (VI в.) — принадлежат к афинской школе, существовавшей некоторое время после разгрома научного центра в Александрии. Прокл интересен тем, что в сочинениях нематематического (комментарии к сочинениям Платона) и математического (комментарии к «Началам» Евклида) характера воспроизвел много фактов из истории античной математики. Евтокий написал обстоятельные комментарии к сочинениям Архимеда и Аполлония. Он в большем объеме, нежели Прокл, приводил отрывки из сочинений предшественников. Особенно много

отрывков подобрано им к знаменитым задачам древности. В частности, он воспроизвел 11 решений задачи об удвоении куба, принадлежащих разным ученым от Архимеда до Паппа.

Деятельность комментаторов прекратилась в VI в., после закрытия афинской школы. В бассейне Средиземноморья в развитии математики как науки наступил длительный перерыв.

Обзор античной математики, данный нами в 3—6 лекциях, является, естественно, весьма неполным. Трудно в данном курсе уделить ему больше места и времени. Однако, по нашему мнению, приведенных материалов достаточно для некоторых выводов о характере развития математики в рассматриваемый период.

Математика древней Греции представляет собой один из самых ранних примеров становления математики как науки и образования в ней всех составных частей науки *. Одной из главных особенностей античной математики являются возникновение, бурный рост и приостановка развития ряда математических теорий.

В рамках математических теорий античной древности возникли и развивались элементы более поздних математических наук: алгебры, анализа бесконечно малых, аналитической геометрии, теоретической механики, аксиоматического метода в математике. Однако оторванность результатов математических теорий от практики, узость их геометрической формы предопределили ограниченность области и времени их развития. Ограничительные тенденции в выборе объектов и методов математического исследования, привнесенные в математику под давлением господствующей идеалистической философии, только усугубляли эти трудности развития теории.

Внутренние противоречия развития математики в период их усиления совпали с неблагоприятными общественно-политическими условиями эпохи распада рабовладельческого строя, сложившимися в силу изменения способа производства. Так экономические факторы конца рабовладельческой экономической формации оказались, в конечном счете, определяющей причиной временной приостановки теоретического и практического развития математики.

Для нового подъема математической науки, в том числе и ее теоретической части, был нужен новый подъем производительных сил человеческого общества. В Европе и в районе Средиземноморского бассейна этот принципиально новый подъем наступил только спустя много веков — начиная с эпохи так называемого Возрождения, эпохи конца феодализма и начала развития капиталистического способа производства. При этом одним из главных источников новых математических идей было освоение классического наследия математиков античной Греции — Евклида, Архимеда и др.

* О составных частях науки см. лекцию 1.