ЛЕКЦИЯ 8

МАТЕМАТИКА НАРОДОВ СРЕДНЕЙ АЗИИ И БЛИЖНЕГО ВОСТОКА В IX—XV ВЕКАХ

Создатели анализа бесконечно малых хорошо знали сочинения древних, особенно Архимеда, изучали их методы и отправлялись от них в своих исследованиях. Геометры изучали «Начала» Евклида, «Конические сечения» Аполлония и другие геометрические сочинения античных ученых. Казалось бы, в создании математики переменных величин налицо прямая преемственность математических знаний и традиций. Однако это было не так. Математические науки в Европе стали приобретать заметное развитие только в конце средних веков и в эпоху раннего Возрождения (XII—XV вв.). Наиболее значительным источником знаний для европейских ученых в этой области явилась не математика древних, а так называемая арабская математика. Этим термином обозначалась математическая наука народов Средней Азии, Ближнего Востока и Северной Африки периода IX—XV вв. Математические сочинения всех этих народов, написанные на арабском языке, служили европейским ученым основным источником научной информации и мерилом математической подготовленности. Даже большая часть сведений об античной математике была почерпнута из арабских трактатов и в арабских переводах.

Научная деятельность арабских ученых образует в истории математики важный отдел, имеющий большое самостоятельное значение. Она позволяет, в частности, выяснить, как происходило развитие сложившихся в античную эпоху математических теорий и практических знаний, каковы были предпосылки успехов математики в Европе. Однако в течение нескольких предшествующих нашему веку столетий колониальная буржуазно-капиталистическая эксплуатация этих народов нанесла неисправимый ущерб их науке и культуре. До настоящего времени и в области истории математики сохраняется огромное число пробелов, нерешенных и спорных вопросов; материальные же

свидетельства еще недостаточны количественно и неполностью исследованы.

На обширных территориях, от северо-запада Индийского полуострова до северного побережья Африки и юга Испании, с давних времен существовали многочисленные восточные империи. Созданные нередко путем завоеваний, огромные, но не связанные в единый хозяйственный организм, они не обладали политической устойчивостью и имели сложную, полную превратностей судьбу. Научные и культурные традиции населяющих их народов развивались в таких условиях сравнительно медленно.

Начиная с VII в. по всем этим землям прокатилась волна завоевательных войн, начатых племенами, населявшими Аравийский полуостров, под давлением острого хозяйственного кризиса и принявших форму борьбы за господство новой религии — ислама (или, как ее иначе называют, магометанства). В течение ряда веков образовалась колоссальная область торгового обмена и экономических связей. Возникли большие города как центры торговли, ремесел и административного управления. Господствующее положение заняла магометанская религия, а арабский язык стал практически единым языком официальных документов, религиозных книг, научных трактатов и художественно-поэтических сочинений.

Сложившиеся условия хозяйственной и политической жизни благоприятствовали развитию математики. Знания математики требовали нужды государственного управления, ирригации, строительства, торговли и ремесел. Международные связи, осуществляемые с помощью длительных путешествий по морям, горам и неизведанным местностям, вынуждали развитие математической географии и астрономии.

Поэтому многие восточные правители и целые династии проводили политику государственного покровительства наукам. В аппарате государственного управления появились специально оплачиваемые ученые. Для них строились обсерватории, собирались библиотеки из древних сочинений, которые разыскивались всюду и переводились на арабский язык.

В результате сложилась своеобразная система математических знаний. Преобладающее место в ней заняло создание разнообразных вычислительных методов и измерительных средств для нужд торговли, административного управления, землемерия, картографии, астрономии, календаря и т. д. В эту систему влились в то же время данные античной греческой науки, классические трактаты Евклида, Архимеда, Аполлония и др. В ней вместе с тем получили свое развитие сведения из математики народов Индии и Китая, а также коренного населения стран Ближнего и Среднего Востока. Освоение и переработка многочисленных источников и подготовка квалифицированных математиков пот-

ребовали, разумеется, немалого времени. Поэтому для арабской математики (как мы будем ее иногда называть для краткости, несмотря на необоснованность этого термина) характерна некоторая многоплановость, пестрота в постановке задач, в методах их решения и даже в символике. Складывающаяся под столь многообразными влияниями система математики получила так много оригинальных черт, что сделалась качественно отличной от своих источников. Рассмотрим подробнее вопросы о характерных особенностях математики средневекового Востока и о достигнутом уровне развития математических наук. Вопрос о дифференциации математики по отдельным странам и о взаимных влияниях ввиду его специфичности и неразработанности затрагивать здесь не будем.

В вычислительной практике арабоязычных народов равноправно действовали обе системы счисления: десятичная абсолютная и 60-ричная. Первая была воспринята из Индии не позднее VII в. н. э. и быстро получила широкое распространение. Через посредство арифметического трактата Хорезми (IX в.) «Об индийских числах», переведенного в XII в. на латинский язык, десятичная система стала известной в Европе. Параллельно с десятичной сохранялась и регулярно употреблялась в астрономических обсерваториях унаследованная от вавилонян 60-ричная система счисления. В духе математиков древнего Вавилона составлялись и использовались вспомогательные таблицы, вроде таблицы умножения (от $1 \cdot 1$ до $59 \cdot 59$). Даже в сравнительно позднее время (ок. 1427 г.) в обсерватории узбекского хана астронома Улуг-бека под г. Самаркандом находилась в употреблении как десятичная, так и 60-ричная система. Для удобства вычислений были разработаны правила перевода из одной системы в другую. Регулярные правила существовали для вычислений с дробями: простыми и десятичными. В Западной Европе десятичные дроби были введены только около 1585 г. фламандским математиком и инженером С. Стевином.

В арсенале арабских математиков накопилось много вычислительных приемов и специальных алгоритмов. Приведем некоторые из них, чтобы продемонстрировать уровень вычислительной техники.

а) Получение до 17 верных знаков числа π с помощью вписанных в окружность и описанных правильных многоугольников. Вычисления были проведены в первой половине XV в. Каши и были доведены до определения сторон правильного $3 \cdot 2^{28}$-угольника. Более чем через 150 лет, в 1593 г., в Европе Ф. Виет нашел только 9 правильных десятичных знаков π с помощью $3 \cdot 2^{17}$-угольников. Только на рубеже XVI и XVII вв. (ван Роумен, 1597) результат Каши был повторен, а затем превзойден.

б) Вычисление корней способом, известным ныне под именем метода Руффини — Горнера. Можно предположить, что этот метод воспринят в результате тесных связей с китайскими математиками. В развитии метода было учтено, что последовательное вычисление знаков корня $\sqrt[n]{q}=a,\ bc\ldots$ связано с отысканием последовательных разностей

$$q-a^n, \qquad q-\left(a+\frac{b}{10}\right)^n, \quad q-\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}\right)^n, \ \ldots$$

При этом обнаружен и сформулирован ряд биномиальных разложений вида:

$$(a+1)^n-a^n=C_n^1a^{n-1}+C_n^2a^{n-2}+\ldots+C_n^{n-1}a+1;$$
$$(a+b)^n-a^n=C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n;$$

высказано правило образования биномиальных коэффициентов.

$$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}.$$

В Европе таблица биномиальных коэффициентов (для $n\leqslant 17$) опубликована лишь в 1544 г. (Штифель), а описанный метод переоткрыт Руффини (1804) и Горнером (1819).

в) Приближенное извлечение корней. Известный в древности прием $\sqrt{q}=\sqrt{T^2+r}\approx T+\frac{r}{2T+1}$, где T — целое, был распространен к XV в. (Каши) на случай любого натурального показателя корня. Основой этого приема было линейное интерполирование, т. е. рассуждения типа: положим

$$y=\sqrt[n]{x};\ \text{при}\ \left\{\begin{array}{ll} x_1=T^n; & y_1=T \\ x_2=(T+1)^n; & y_2=T+1 \end{array}\right\}\ x=x_1+r. \qquad \text{Тогда}$$

$$y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)=T+\frac{r}{(T+1)^n-T^n}.$$

По-видимому, от индийцев было воспринято правило $\sqrt[n]{q}=\frac{1}{z}\sqrt[n]{qz^n}$, применявшееся как в десятичной ($z=10^k$), так и в 60-ричной ($z=60^k$) системе.

Распространение подобных приемов приближенного извлечения корней отмечено в Европе лишь с середины XVI в.

г) Суммирование арифметических и геометрических прогрессий, включая нахождение сумм вида $\sum\limits_{a=1}^{n}a^k\ (k=1, 2, 3, 4)$. Например:

$$\sum_{a=1}^{n}a^4=\sum_{a=1}^{n}a^2\left[\sum_{a=1}^{n}a+\frac{\sum\limits_{a=1}^{n}a-1}{5}\right].$$

Преобладающее влияние вычислительной части математики оказало влияние на трактовку многих теоретических вопросов. Особенно интересен вопрос о понимании алгебраических иррациональностей. Стремление к производству операций над ними характерно для всей арабской математики. Например, в сочинениях Хорезми (IX в.) уже встречаются операции над квадратичными иррациональностями. Аль-Кархи (XI в.) ввел многие преобразования иррациональностей, в том числе

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}.$$

Аль-Баки (ок. 1100 г.), как и Аль-Кархи, комментировал десятую книгу «Начал» Евклида, поясняя ее теоремы числовыми примерами.

В силу такого подхода и частого применения вычислений иррациональностей грань между рациональными числами и иррациональностями начинает стираться. К представлению о числе как о собрании единиц прибавились представления об отношениях непрерывных величин. Была установлена адекватность геометрической несоизмеримости с арифметической иррациональностью. Последние вошли в класс чисел на основе разработанных для них правил оперирования. В математике вместо двух обособленных понятий — числа и отношения — возникла новая, более широкая концепция действительного положительного числа. Уже в XIII в. (Насирэддин, 1201—1274) этот факт был констатирован с полной определенностью: «Каждое из отношений может быть названо числом, которое определяется единицей так же, как один из членов этого отношения определяется другим из этих членов».

Идея создания единой концепции действительного числа путем объединения рациональных чисел и отношений, появившаяся у математиков поздней античности, получила на Ближнем Востоке известное завершение.

В Европе подобная идея не появлялась довольно долго. Только с XVI в. бурное развитие вычислительных средств начало приводить ученых к ее осознанию. Однако с равносильной степенью общности она была высказана лишь И. Ньютоном в 70-х годах XVII в., а опубликована еще позднее (1707) в его «Всеобщей арифметике»: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное. Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей».

Влияние алгоритмически-вычислительной направленности арабской математики отразилось и на ее структуре. В ней

сравнительно быстро, впервые в истории, выделилась в качестве самостоятельной математической науки алгебра. В этом факте нашло свое выражение слияние элементов алгебраического характера математики различных народов, например: геометрическая алгебра древних греков, группировка однотипных задач и попытка выработать для каждой группы единый алгоритм в древнем Вавилоне, вычислительные задачи индийцев, приводившие к уравнениям 1-й и 2-й степени, и т. п.

В трудах математиков средневекового Востока эти алгебраические элементы были впервые выделены, собраны в новый специальный отдел математики, сформулирован предмет этого нового отдела науки и построена систематическая теория. В качестве примера такого подхода приведем высказывание среднеазиатского математика Хайяма (ок. 1040 — ок. 1123 гг.):

«Алгебра есть научное искусство. Ее предмет — это абсолютное число и измеримые величины, являющиеся неизвестными, но отнесенные к какой-либо известной вещи так, что их можно определить; эта известная вещь есть количество или индивидуально определенное отношение, и к этой известной вещи приходят, анализируя условия задачи; в этом искусстве ищут соотношения, связывающие данные в задачах величины с неизвестной, которая вышеуказанным образом составляет предмет алгебры. Совершенство этого искусства состоит в знании математических методов, с помощью которых можно осуществить упомянутое определение как числовых, так и геометрических неизвестных... Алгебраические решения, как это хорошо известно, производятся лишь с помощью уравнения, т. е. приравниванием одних из этих степеней другим» (F. Woepcke. L'algebre d' Omar Alkhayame. Paris, 1851, p. 5).

Европейские ученые начали знакомиться с алгеброй в начале XII в. Источником их сведений об алгебре явилось сочинение «Китаб аль-Джебр валь-Мукабала» Мухаммеда бен-Муса аль-Хорезми (далее сокращенно: Хорезми), жившего в первой половине IX в. Название в переводе означает: книга об операциях джебр (восстановления) и кабала (приведения). Первая из операций, имя которой послужило названием для алгебры и служит до сего времени, состоит в переносе членов уравнения из одной стороны в другую. Вторая есть операция приведения подобных членов уравнения. Решение уравнений рассматривается как самостоятельная наука. В книге содержатся систематические решения уравнений 1-й и 2-й степени вида:

$$ax=b; \quad x^2+bx=a;$$
$$ax^2=b; \quad x^2+a=bx;$$
$$ax^2=bx; \quad bx+a=x^2.$$

Хорезми приводит как арифметические, так и геометрические

решения приведенных уравнений. Метод нахождения геометрических решений состоит в приравнивании площадей, специально подобранных для геометрической интерпретации уравнения. Например, дано уравнение $x^2+ax=b$. На рис. 28 площадь

$$S=x^2+4\left(\frac{a}{4}\right)^2+4\cdot\frac{a}{4}x=(x^2+ax)+4\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^2=b+\frac{a^2}{4}.$$

В то же время

$$S=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2;\qquad \left(x+\frac{a}{2}\right)^2=b+\frac{a^2}{4},$$

откуда

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{b+\frac{a^2}{4}}.$$

Книга Хорезми пользовалась большой известностью. Термин «алгебра» укоренился в математике. Осталось в этой науке и имя автора (аль-Хорезми) в латинизированном виде: алгоритм. Вначале это слово обозначало фамилию, затем нумерацию по позиционной системе, а теперь — всякую систему вычислений, производимых по строго определенным правилам и заведомо приводящих к решению поставленной задачи. В ходе развития науки изменялось содержание понятий, вложенных в эти термины, но термины сохранились. Хорезми не высказывал мысли о своем приоритете в алгебре. Видимо, оба приема — джебр и кабала — были уже широко распространены в его время.

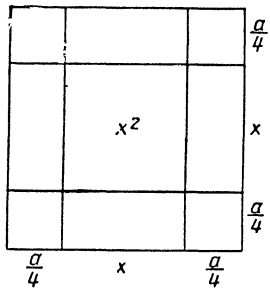

Рис. 28

Алгебраические арабские трактаты IX—XV вв., помимо решения уравнений 1-й и 2-й степени, включали в себя и кубические уравнения. К последним приводили разнообразные задачи: а) рассечение шара плоскостью; б) трисекция угла; в) отыскание стороны правильного 9-угольника; г) отыскание стороны правильного 7-угольника и др. Одна из задач оптики: найти на данной окружности такую точку, чтобы луч, падающий из данной точки A, отразился в другую заданную точку B,— приводила к уравнению 4-й степени.

В методах решения кубических уравнений отразилось многообразие средств, обычно присущее математике арабских ученых. Ряд трактатов содержит попытки численного решения этих уравнений; другие трактаты отражали античное влияние. В них строилась теория решения кубических уравнений с помощью пересечения конических сечений.

Численные решения этих уравнений развивались начиная со способа проб (Бируни, 972—1048) до изящного итерационного,

быстро сходящегося, метода (Каши, ок. 1420 г.). Рассмотрим последний метод подробнее. В самаркандской обсерватории Улугбека, оснащенной совершенными инструментами, составлялись, как мы упоминали выше, таблицы синусов с частотой через 1′ и с точностью до девятого знака. Решающую роль в этой работе играла, как известно, точность вычисления синусов малых дуг, скажем sin 1°. Исходя из sin 72° и sin 60°, Каши нашел sin 3°. Для нахождения отсюда sin 1° он получил ($\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$) кубическое уравнение $x^3 + 0{,}785\,039\,343\,364\,4006 = 45\,x$. Возьмем для удобства пояснения метода уравнение в общем виде:

$$x^3 + Q = Px \text{ или } x = \frac{x^3+Q}{P}.$$

Первое приближение, в силу малости x, а следовательно и x^3, принимается $x_1 \approx \frac{Q}{P} = a$. Результат вычисляется приближенный, с условием, чтобы остаток от деления R был такого же порядка малости, что и a^3.

Второй этап: положим

$$x = a + y; \quad a + y = \frac{(a+y)^3+Q}{P}; \quad y = \frac{(a+y)^3+R}{P}.$$

R имеет порядок a^3; он велик по сравнению с a^2y. Новое приближение получается, если пренебречь в числителе членами, содержащими y.

$$y = \frac{a^3+R}{P} = b + \frac{S}{P}.$$

Третий этап: $y = b + z$, и операции повторяются в том же порядке, как во втором этапе. По этому способу получаются следующие последовательные приближения

$$x_1 = a = \frac{Q}{P};$$

$$x_2 = a + b = \frac{a^3+Q}{P};$$

$$x_3 = a + b + c = \frac{(a+b)^3+Q}{P};$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{x_{n-1}^3+Q}{P}.$$

Процесс сходится при $3x^2 < r < 1$, что в данном случае ввиду малости x имеет место.

Этим способом было найдено 17 верных знаков sin 1° в десятичной системе (результат вначале был получен в 60-ричной системе). Такая степень точности позволила вычислять таблицы

тригонометрических функций с точностью до девятого знака. Такой уровень техники приближенных вычислений в Европе был достигнут лишь к концу XVI в.

Другое направление в решении кубических уравнений основывалось на получении геометрического образа положительного корня путем пересечения подходящим образом подобранных конических сечений. В сочинениях подобного типа авторы отчетливо выделяли алгебру как особую математическую дисциплину, систематизировали все виды уравнений первых трех степеней по расположению членов по обе стороны знака равенства, находили условия существования положительных корней уравнений — словом, создавали элементы общей теории уравнений. Большим недостатком алгебры в это время было отсутствие символики, словесное описание операций. Это задерживало развитие алгебры.

Помимо выделения алгебры, важнейшей характерной чертой арабской математики было формирование тригонометрии. И в этой области происходил синтез разнообразных тригонометрических элементов: исчисление хорд и соответственные таблицы древних, в особенности результаты Птоломея и Менелая, операции с линиями синуса и косинуса у древних индийцев, накопленный опыт астрономических измерений.

Используя этот разнородный материал, математики стран Ближнего Востока и Средней Азии ввели все основные тригонометрические линии. В связи с задачами астрономии они составили таблицы тригонометрических функций с большой частотой и высокой точностью. Данных накопилось при этом так много, что стало возможным изучать свойства плоских и сферических треугольников, способы их решений. Получилась богатая фактами стройная система тригонометрии как плоской, так и сферической. Такую систему представляет, например, сочинение Насирэддина (1201—1274) «Трактат о полном четырехстороннике», где: 1) развита теория отношений; 2) изложена теория фигур, состоящих из четырех попарно пересекающихся прямых; 3) собраны способы решения плоских и сферических треугольников; 4) решена задача об определении сторон сферического треугольника по трем углам.

Вместе с выяснением практического значения тригонометрии последняя изменила свой облик. В ней стал преобладать материал об алгебраических зависимостях тригонометрических функций и о вычислительных средствах и возможностях тригонометрии. Из-за недостатков символики еще задерживалось чисто аналитическое построение тригонометрии.

Итак, тригонометрия в математике средневекового Востока приобрела положение отдельной математической науки. Из совокупности вспомогательных средств астрономии она преоб-

разовалась в науку о тригонометрических функциях в плоских и сферических треугольниках и о способах решения этих треугольников. Алгоритмически-вычислительные средства стали играть в ней преобладающую роль. Оставался один только шаг: введение специфической символики, чтобы тригонометрия приобрела привычный нам аналитический облик. Однако для этого шага понадобилось еще много времени. Дальнейшее развитие тригонометрия начала получать со второй половины XVI в. в Европе, в первую очередь под влиянием запросов мореплавания и астрономии. В конце XVI в. начало входить в употребление и название науки — «тригонометрия».

Мы мало внимания в настоящей лекции уделили геометрии. Это понятно: не геометрические интересы были главными, определяющими в общем потоке математических достижений. Но дошедшие до нас математические сочинения среднеазиатских и ближневосточных математиков неоспоримо свидетельствуют о высоком уровне геометрических знаний. Математическая литература того времени богата переводами сочинений Евклида, Архимеда, Аполлония и других геометров античной Греции и комментариями на эти сочинения. В арабских рукописях сохранились для математики многие достижения древности. Нередко эти рукописи являются единственным источником многих немаловажных сведений о предшествующем развитии математики и научной основой математического творчества европейских ученых эпохи Возрождения.

В ряду геометрических сочинений обращают на себя внимание глубокие исследования по основаниям геометрии. В сочинениях Хайяма (XI в.) и Насирэддина (XIII в.) мы находим попытки доказательства постулата о параллельных, основанные на введении эквивалентных этому постулату допущений. Имена этих математиков с полным правом могут быть помещены историками в длинном ряду предшественников неевклидовой геометрии, подвергавших логическому анализу систему аксиом и постулатов геометрии Евклида.

Примерно в середине XV в. развитие математических наук в описываемых нами здесь районах замедляется и прекращается. Причины этого явления лежат вне математики. Они коренятся в наступившем экономическом разобщении обширных территорий, о которых шла речь выше.

Народы Средней Азии, Ближнего Востока и Северной Африки в силу исторически сложившихся условий оказались задержанными на феодальной стадии развития, жили в обстановке войн и политических неурядиц, подвергались возраставшему колониальному нажиму передовых и сильных капиталистических стран. Прогресс науки, в том числе и математики, оказался приостановленным на несколько столетий.

Победа Великой Октябрьской социалистической революции открыла дорогу экономического, политического, научного и культурного прогресса народам советских республик Средней Азии и Закавказья. Национальные академии наук, университеты и институты сделались важными центрами науки, работают на благо народа. Происходящий в наши дни мощный подъем национально-освободительной борьбы в зарубежных странах Ближнего Востока оказывает благоприятное влияние и на развитие в них науки. В Московском университете учатся представители многих стран этого района. Надо надеяться, что они все будут передовыми борцами за науку, демократию и прогресс в своих странах.