ЛЕКЦИЯ 10

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТЕМАТИКИ В XVII ВЕКЕ. ВОЗНИКНОВЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Начало периода математики переменных величин. В истории математики XVII век занимает особое, весьма значительное место. Он открывает новый период этой истории — период математики переменных величин.

К концу предыдущего, XVI, столетия алгебра, тригонометрия, а также геометрия и приемы вычислений накопили достаточно много фактов и достигли такого состояния, что смогли сделаться существенной частью технического и общенаучного прогресса. В течение XVII в. математические методы продолжали весьма энергично внедряться в естествознание, прежде всего в механику. Так, в 1632 и 1638 гг. Галилей дал математическое выражение законов падения тел, несколько ранее (1609—1619) Кеплер открыл и математически сформулировал свои знаменитые законы движения планет. К 1686 г. И. Ньютон смог сформулировать и убедительно продемонстрировать закон всемирного тяготения: законы движения планет объясняются притяжением их к Солнцу с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния и прямо пропорциональной их массам. Законы притяжения оказались универсальными для любых тел, массу которых можно представить сосредоточенной в центре. Большинство математиков были одновременно механиками и естествоиспытателями; они пытливо изучали природу, отыскивали ее законы и не особенно заботились о разграничении наук.

Успехи в выявлении и математическом оформлении столь многих естественнонаучных закономерностей повели к созданию системы наук о природе—математического естествознания. Последнее мыслилось в виде общей науки, целью которой являлось объяснение хода отдельных явлений действием общих, математически сформулированных законов природы. Философская идея универсальности математического метода, отражающая быстрый рост

техники и математики, довлела над умами крупнейших ученых и философов XVII в. (Декарт, Спиноза, Лейбниц, Ньютон).

Каждый новый успех математического естествознания вызывал резкое повышение спроса на приложения математической теории. Математика во все времена развивалась под определяющим влиянием практики и в конечном счете технического, материального прогресса. Это влияние в XVII в. приняло форму непосредственного воздействия. В атмосфере высокого давления практических обстоятельств протекало математическое творчество ученых XVII в.

В это столетие произошло изменение форм существования математики. На смену энтузиастам-одиночкам, представлявшим счастливые исключения, пришли научные организации и общества. С 1662 г. начало свою деятельность Лондонское королевское общество, играющее и ныне роль национальной Академии наук. В 1666 г. организована Парижская академия. Тем было положено начало эпохе организации научных учреждений и обществ, явившихся плодотворной формой коллективного труда ученых над трудными проблемами науки при государственном покровительстве наукам.

Переписка ученых и появлявшиеся изредка в малом числе экземпляров книги не удовлетворяли требованиям научного общения. XVII век принес решающие изменения и в этом вопросе, положив начало научной периодике. С 1665 г. в Лондоне выходят «Philosophical Transactions»; одновременно в Париже появился «Journal des Sçavans» (существовал до 1792 г.). Тем же целям служил с 1682 г. основанный Лейбницем в Лейпциге журнал «Acta Eruditorum» (существовал до 1731 г.).

Изменение практического положения, идейных основ и организационной структуры и роли математики происходило наряду с глубокими качественными изменениями в ее содержании. Изучение чисел, постоянных величин, фигур дополняется изучением движений и преобразований, функциональных зависимостей. Меняется внутреннее содержание математики, все более приобретающей облик математики переменных величин.

Об этом перевороте в математике Ф. Энгельс говорил: «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление, зачатки которого были вскоре заложены и которое в целом было завершено, а не открыто, Ньютоном и Лейбницем» (Ф. Энгельс. Диалектика природы, 1952, стр. 206).

С XVII в. берут начало все, или почти все, математические дисциплины, входящие ныне в классический фонд современного высшего математического образования. В трудах Декарта и Фер-

ма начала формироваться аналитическая геометрия как метод выражения числовыми соотношениями размеров, форм и свойств геометрических объектов, существенно использующий метод координат. В разнообразных формах стал возникать математический анализ. Вначале это было дифференциальное и интегральное исчисление, принявшее к 1665—1666 гг. в сочинениях И. Ньютона (опубликовано, однако, лишь в XVIII в.) вид теории флюксий, а в сочинениях Лейбница (опубликованных в 1682—1686 гг. и позднее) вид исчисления дифференциалов. Тотчас после возникновения математического анализа механические и физические задачи стали записываться в виде дифференциальных уравнений, задача решения которых стала с тех пор едва ли не самой главной задачей всей математики. Почти в то же самое время в математическом анализе появились первые задачи, вводящие в его высшие области. В частности, речь идет о вариационных задачах, попытки решения которых привели впоследствии к появлению вариационного исчисления — самой ранней по времени части функционального анализа.

В неразрывной связи с анализом формировались в отдельную область математики его геометрические приложения. Еще в начале столетия, в 1604 г., Кеплер вывел формулу радиуса кривизны. Позднее, в 1673 г., Гюйгенс дал математическое выражение эволют и эвольвент. Многие дифференциально-геометрические факты, открытые и доказанные в XVII в., послужили надежной основой для выделения и обоснования новой области математики — дифференциальной геометрии.

В XVII в. было положено начало учению о перспективе и проективной геометрии в сочинениях Ж. Дезарга (1593—1661) и Б. Паскаля (1623—1662). Первую научную форму приобрела теория вероятностей, особенно благодаря открытию Я. Бернулли (1654—1705) простейшей формы закона больших чисел.

Наконец, элементарная математика приобрела завершенную форму благодаря исчезновению риторической алгебры и замене ее символической, а также изобретению логарифмов.

Столетие в жизни науки — большой срок, в течение которого успевает происходить трудно обозримое множество событий. Воссоздание полной фактической картины — дело специалистов. Мы же можем в целях первоначального ознакомления лишь выделить главные линии развития, отметить закономерности этого развития. В XVII в. главным и определяющим является то, что математика преобразуется, превращаясь в математику переменных величин, происходит расширение ее предмета за счет включения в него движения и средств его математического отображения. Характеристике этого главного и определяющего в математике XVII в. мы в основном и посвятим наши следующие лекции, вплоть до конца семестра.

Аналитическая геометрия Декарта. Мы уже имели возможность отметить глубокую мысль Ф. Энгельса о том, что поворотным пунктом в математике XVII в. была декартова переменная величина. Рассмотрим эту мысль подробнее. Рене Декарт (1596—1650), с именем которого связано упомянутое открытие, был выдающимся французским ученым: философом, физиком, математиком, физиологом. Вскоре после рождения он лишился матери. Образование, в силу принадлежности к древнему и знатному дворянскому роду, он получил в иезуитском колледже, славившемся постановкой обучения. Всю жизнь он продолжал совершенствоваться в науках, временами предаваясь им целиком. Целью естественнонаучных занятий Декарта была разработка общего дедуктивно-математического метода изучения всех вопросов естествознания. При этом, по справедливому замечанию К.Маркса, Декарт совершенно отделил этот род своих занятий от метафизических рассуждений идеалистического характера. В границах физики Декарта единственную субстанцию, единственное основание бытия и познания представляет материя.

Рационализм идей Декарта, признающего прежде всего разум, строгую дедукцию, был направлен против церковной схоластики. Напряженные отношения с католической церковью заставили его в 1629 г. переехать в Нидерланды. Враждебное отношение протестантских богословов побудило Декарта в 1649 г. предпринять новый переезд в Швецию, где через год он скончался.

В нашу задачу не входит анализ философских воззрений Декарта. Мы будем их привлекать к рассмотрению лишь в той мере, в какой это может помочь понять его математические идеи и результаты. Речь пойдет прежде всего о месте математики в его естественнонаучных занятиях.

Природой материи, утверждал Декарт, является ее трехмерная объемность; важнейшими свойствами ее — делимость и подвижность. Эти же свойства материи должна отображать математика. Последняя не может быть либо численной, либо геометрической. Она должна быть универсальной наукой, в которую входит все, относящееся к порядку и мере. Все содержание математики должно рассматриваться с единых позиций, изучаться единым методом; само название науки должно отражать эту ее всеобщность. Декарт предложил назвать ее универсальной математикой (Mathesis universalis).

Эти общие идеи получили конкретное преломление к 1637 г., когда вышло в свет знаменитое Декартово «Рассуждение о методе». В этом сочинении, помимо общей характеристики метода естественнонаучных исследований, выделены в отдельные части приложения этого метода к диоптрике, метеорам и к математике. Последняя часть носит название «Геометрия»; она и представляет для нас наибольший интерес.

Связь буквенной алгебры с геометрией кривых, необходимая для универсальной математики Декарта, обнаружилась тотчас, как был установлен изоморфизм поля вещественных чисел и поля отрезков прямых. Потребовалось только определить операции над отрезками так, чтобы отрезки действительно образовали поле. Суммы и разности отрезков, очевидно, отрезки, элементы поля отрезков. Затруднения с умножением и делением отрезков, заставившие Виета ввести видовую алгебру, были преодолены Декартом посредством введения единичного отрезка и построения

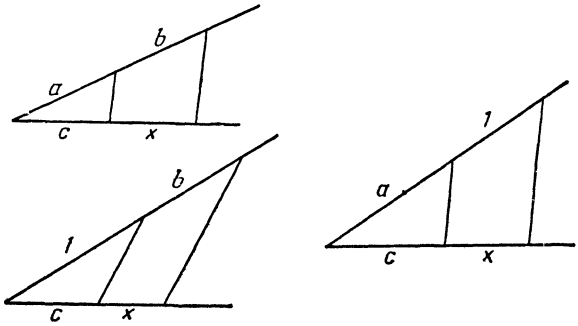

Рис. 29

четвертого пропорционального отрезка. Последнее он осуществлял так же, как это делают ныне в учебниках геометрии: соответствующим откладыванием отрезков на сторонах произвольного угла (см. рис. 29) и проведением параллельных сечений.

Геометрическими образами алгебраических корней являются построения 1, 2... средних пропорциональных. Еще последовательнее, чем в «Геометрии», эта идея проведена в маленьком сочинении «Исчисление господина Декарта».

В основу всей «Геометрии» Декарта положены две идеи: введение переменной величины и использование прямолинейных (декартовых) координат. В согласии с его унифицирующей тенденцией, переменная величина вводится в двоякой форме: в виде текущей координаты точки, движущейся по кривой, и в виде переменного элемента множества чисел, соответствующих точкам данного координатного отрезка.

«Геометрия» состоит из трех книг. Первая книга «О задачах, которые можно построить, пользуясь только кругами и прямыми линиями» начинается с кратких разъяснений только что изложенных общих принципов. Затем следуют правила составления уравнений геометрических кривых.

Чтобы решить какую-либо задачу, нужно сначала считать ее как бы решенной и обозначить буквами все как данные, так и

искомые линии. Затем, не делая никакого различия между данными и искомыми линиями, заметить зависимость между ними так, чтобы получить два выражения для одной и той же величины; это и приводит к уравнению, служащему для решения задачи, ибо можно приравнять одно выражение другому. Доказывается, что все геометрические задачи, решаемые с помощью циркуля и линейки, сводятся к решению уравнений не выше 2-й степени. Общие правила своей аналитической геометрии Декарт не излагает подробно в общем виде, а демонстрирует их при решении трудных задач. В качестве такой задачи он выбрал задачу Паппа:

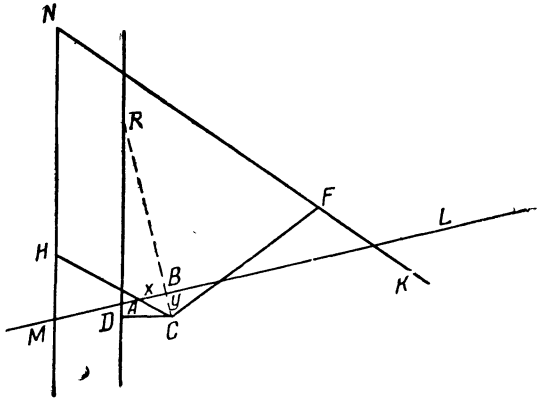

Рис. 30

на плоскости даны несколько (n) прямых, например: MN, NK, ML, QA. Найти геометрическое место точек, для которых произведение отрезков, проведенных из них под одинаковыми углами к $\frac{n}{2}$ прямых, находилось бы в данном отношении к произведению отрезков, проведенных тем же способом к другой половине прямых. Например, $\frac{CB \cdot CD}{CF \cdot CH} = \frac{1}{2}$.

Одна из данных линий (ML) и одна из искомых (BC) принимаются за главные. Обозначим $AB = x$ и $BC = y$. Так как углы ΔABR известны, то известно и отношение сторон: $\frac{BR}{x} = \frac{b}{n}$ и $CR = y + \frac{bx}{n}$. Рассуждая так же относительно ΔDRC и считая $CR:CD = n:c$, получим: $CD = CR \cdot \frac{c}{n} = \frac{cy}{n} + \frac{bcx}{n^2}$. Таким же образом выразим через x и y линии CF, CH, подставим в условие $CF \cdot CH = 2BC \cdot CD$ и получим уравнение искомого геометрического места $F(x, y) = 0$.

Декарт скупо поясняет, что геометрическое место в случае трех и четырех прямых представляет собой коническое сечение. В случае, когда число прямых $n>4$, Декарт устанавливает, что для $2n$ или $2n-1$ прямых уравнение геометрического места имеет степень $= n$, относительно двух переменных x и y. Задача Паппа относительно пяти прямых оказывается разрешимой циркулем и линейкой, или, по терминологии Декарта, плоской задачей. Такой же задача оказывается и для шести прямых, но Декарт этого не отметил *.

Вторая книга «Геометрии» названа: «О природе кривых линий». Она посвящена более подробному рассмотрению кривых различных порядков, их классификации и выявлению их свойств. Все кривые Декарт делит на два класса в зависимости от того, возможно ли провести их исследование средствами, которыми располагал Декарт. В соответствии с этим в математику оказалось возможным допускать лишь такие кривые, которые описываются непрерывным движением (циркулем или линейкой) или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими. Остальные кривые получили название механических (позднее у Лейбница трансцендентных) и исключены из класса допустимых кривых. Их свойства могут быть открыты лишь случайно благодаря специфическим приемам, не носящим систематического характера.

Все допустимые кривые, таким образом, могут быть построены с помощью некоторого шарнирного механизма. Относительно них без доказательства высказано утверждение, что они выразимы алгебраическими уравнениями. Тем самым Декарт предвосхитил одну из главных теорем кинематики механизмов (доказанную в 1876 г. Кемпе), гласящую, что с помощью плоских шарнирных механизмов, в которых движение первых звеньев полностью определяет движение остальных, можно описывать дуги любых алгебраических кривых и нельзя описать ни одной трансцендентной.

Декарт мимоходом бросает замечание, что степень уравнения кривой инвариантна относительно выбора системы прямолинейных координат. Но гипноз принципа построения кривых только с помощью шарнирных механизмов слишком владеет Декартом. Поэтому в основу классификации кривых он кладет не порядок уравнения, а число звеньев шарнирного механизма. В силу этого принципа кривые оказываются разделенными по родам (genre), причем к n-му роду относятся кривые порядка $2n-1$ и $2n$. Этот неудобный принцип был заменен только Ньютоном, введшим классификацию кривых по степеням уравнений.

Декарт еще не в силах построить общую теорию кривых рода

* См. Г. Г. Цейтен. История математики в XVI и XVII веках ГТТИ. 1933, стр. 204.

$n \geqslant 2$. Но он с целью демонстрации силы и универсальности своего метода вновь возвращается к задаче Паппа, исследуя частные ее случаи. Например, пусть задача Паппа поставлена для пяти прямых: четыре — параллельны и эквидистантны (FG, DE, AB, HJ), пятая — перпендикулярна к ним (GA). Найти C такую, что $CF \cdot CD \cdot CH = CB \cdot CM \cdot AJ$.

Положим: $CM = x$; тогда $CF = 2a - y$,
$CB = y$; $CD = a - y$,
$AE = EG = AI = a$; $CH = a + y$.

Уравнение искомого геометрического места

$$(2a - y)(a - y)(a + y) = axy \quad \text{или} \quad y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy.$$

Для фактического построения данной кривой Декарт применяет специальный прием, рассматривая точки пересечения движущихся параболы и прямой (см. Цейтен, стр. 206).

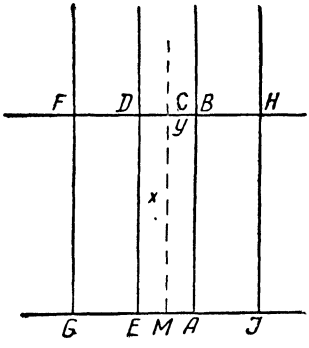

Рис. 31

Значительную часть второй книги составляют теоремы о проведении нормалей и касательных к алгебраическим кривым. Свой метод («метод нормалей») он распространил на конические сечения и на так называемые декартовы овалы. Декарт подчеркивал значение высказанных теорем для оптики. Мы рассмотрим этот «метод нормалей» ниже — в 12-й лекции.

Книгу замыкает предложение о возможности распространения метода Декарта на трехмерный случай. Высказывается при этом идея представления пространственной кривой с помощью проектирования ее на две взаимно-перпендикулярные плоскости, общая прямая которых является одной из осей координат. Однако эта идея оказалась у Декарта одиночной, не развитой; к тому же в его рассуждения вкралась ошибка. Он в этом единственном предложении аналитической геометрии в пространстве утверждает, что проекции нормали к пространственной кривой являются нормалями к проекциям кривой, что неверно даже для плоской кривой, не говоря уже о наличии в общем случае целой нормальной плоскости. Нет у Декарта и речи о трех координатах точки в пространстве и об уравнениях поверхностей.

Задача третьей книги: «О построении телесных, или превосходящих телесные, задач» — построение общей теории решения уравнений и использование для этой цели наряду с алгебраическими средствами геометрических мест. Алгебраическая символика Де-

карта уже несущественно отличается от современной. Всякое уравнение мыслится приведенным к виду $P_n(x)=0$, где $P_n(x)$ — полином с целыми коэффициентами, расположенный по убывающим степеням неизвестного x. Из рассмотрения проблемы делимости $P_n(x)$ на $x-a$, где a — корень уравнения, Декарт делает глубокий вывод, что число корней уравнения равно числу единиц в наивысшем показателе степени x*. Он при этом учитывает корни действительные (положительные), ложные (отрицательные) и те, которые можно вообразить (мнимые и комплексные). Доказательства этого вывода он дать еще не может. Еще много лет не могли дать доказательства и другие позднейшие ученые. Только в 1797 г. смог это сделать Гаусс.

Декарт показал, что уравнение имеет столько положительных корней, сколько знакоперемен в ряду коэффициентов, и столько отрицательных — сколько повторений знака. Он ввел также приемы преобразования коэффициентов уравнения, чтобы добиться необходимого изменения его корней: увеличения, уменьшения или изменения знака.

Замечательной по глубине замысла является постановка проблемы приводимости, т. е. представления целой рациональной функции с рациональными коэффициентами в виде произведения таких же функций. Декарт показал, что уравнение 3-й степени решается в квадратных радикалах (с помощью циркуля и линейки), лишь если оно приводимо. Вопрос о приводимости уравнения 4-й степени он свел к вопросу о приводимости его кубической резольвенты. Если дано уравнение $x^4+px^2+qx+r=0$, то его можно записать в виде

$$\left(x^2-yx+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}\right)\left(x^2+yx+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}\right)=0,$$

где вспомогательное y определяется из уравнения $y^6+2py^4+(p^2-4r)y^2-q^2=0$, кубического относительно y^2.

Как часто он поступает, Декарт не дает этому утверждению доказательства. Из комментариев к «Геометрии», составленных Ф. Скоутеном (1615—1660), профессором математики в Лейдене, горячим приверженцем Декарта, можно сделать вывод, что при этом применялся метод неопределенных коэффициентов. Скоутен рассматривает уравнение $x^4-px^2-qx+r=0$ и записывает его в виде $(x^2+yx+z)(x^2-yx+v)=0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, он, для определения y, z, v, получает уравнения:

$$z-y^2+v=-p;$$
$$-zy+vy=-q;$$

* Аналогичные идеи несколько раньше Декарта высказал А. Жирар в сочинении «Invention nouvelle en l'Algebre». Amsterdam, 1629.

$$vz=r;$$
$$y^3-2py^1+(p^2-4r)y^2-q^2=0.$$

Решение уравнений 3-й и 4-й степени геометрическими средствами у Декарта сводится к задачам о построении (вставке) двух средних пропорциональных и о трисекции угла. Подобно арабским математикам, но, по-видимому, совершенно самостоятельно, Декарт практически решает эти уравнения с помощью пересечения двух конических сечений. Затем он распространил этот метод на уравнения третьего рода (5-й и 6-й степени), подбирая пересечения окружности и движущейся специальным образом подобранной кривой. Замечания Декарта о решении подобным методом уравнений степени $n>6$ не оказались достаточно ясными, чтобы о них говорить определенно.

Таково содержание «Геометрии» Декарта — первого сочинения по аналитической геометрии, игравшего огромную роль в дальнейшем развитии математики XVII в. Аналитическая геометрия Декарта имела еще много недостатков. Прежде всего область этой науки была еще чрезмерно сужена априорными требованиями, проистекающими скорее из философских источников, чем из потребностей метода, ограничена только алгебраическими кривыми. Неудачной оказалась классификация алгебраических кривых по жанрам (родам), а не по степеням уравнений, их выражающих. Декарт не довершил проникновения в геометрию алгебраического аппарата, не распространил свой метод на изучение свойств кривых по свойствам соответствующих уравнений. Координатные оси в «Геометрии» еще неравноправны; проводится только одна ось, а другая координата восстанавливается по мере необходимости. Поведение кривой изучается только в первом квадранте, остальные квадранты не учитываются. Однако «Геометрия» Декарта означала шаг принципиального значения в перестройке математики, и это значение так велико, что делает это сочинение классическим.

Аналитическая геометрия Ферма. Переворот во взаимоотношении алгебры и геометрии и взаимное проникновение их методов с помощью метода координат представляли в математике явление революционное. Подобные перевороты никогда в истории не представляют дело рук одного человека. Так и появление аналитической геометрии не было единоличной заслугой Декарта. При этом речь идет не только о тех современниках, в работах которых в неразвитом виде содержались те или иные идеи, подхваченные и переработанные Декартом. Таких современников было много. Мы имеем в виду также то, что одновременно с Декартом аналогичную систему взглядов развил в специальном сочинении французский математик П. Ферма (1601—1665).

Ферма происходил из торговой семьи, проживавшей на юге Франции. Окончил университет в г. Тулузе по юридическому фа-

культету. С 1631 г. до конца жизни занимался в Тулузе юридической деятельностью, будучи советником местных органов управления. Математикой занимался в свободное время. Был знатоком современной математики и классических сочинений древних. Получил выдающиеся результаты в теории чисел, геометрии, методах оперирования с бесконечно малыми, оптике. Ферма не любил печатать свои сочинения, а сообщал о своих достижениях в научной переписке и при личном общении и дискуссиях со многими выдающимися учеными. Поэтому подавляющее число выдающихся работ Ферма было опубликовано лишь после его смерти, в 1679 г., и позднее.

Идеи аналитической геометрии, т. е. введение прямолинейных координат и приложение к геометрии алгебраических методов, сосредоточены в небольшом сочинении Ферма «Введение в теорию плоских и пространственных мест», ставшем известным с 1636 г., но напечатанном вместе с другими сочинениями в 1679 г. Исходными пунктами этой работы явились сочинения древних, особенно Аполлония, по изучению геометрических мест. Те геометрические места, которые представлялись прямыми или окружностями, назывались плоскими, а представляемые коническими сечениями — пространственными. Задачей Ферма в этом сочинении было показать, что уравнениям 1-й степени соответствуют прямые, а коническим сечениям — уравнения 2-й степени.

Метод координат вводится так же, как у Декарта: задается одна ось — ось абсцисс, на ней откладываются от выбранного начала отрезки, соответствующие значениям одной переменной. Значения другой переменной, также изображаемые отрезками, восстанавливаются из конца первого отрезка под выбранным для данной задачи углом (чаще всего прямым). Затем Ферма выводит уравнения прямой, окружности и всех конических сечений.

Вначале он доказывает, что уравнение прямой, проходящей через начало координат, будет иметь вид $ax=by$. Затем последовательно выводятся: уравнение окружности в прямоугольных координатах с центром в начале координат; гиперболы, отнесенной к асимптотам; параболы, отнесенной к диаметру и касательной в конце его; эллипса (гиперболы) в случае, когда осями будут сопряженные диаметры.

Замечательно, что Ферма рассматривает задачу и с другой стороны. Он исследует общие виды уравнений 1-й и 2-й степени, преобразованием координат (перенос начала и поворот оси) приводит их к каноническим формам, облегчая тем самым их геометрическое толкование. Например, пусть дано уравнение $2x^2+2xy+y^2=a^2$. Перепишем его в виде $(x+y)^2+x^2=a^2$. Выберем новые оси: $x+y=0$, $x=0$. Новые координаты будут: $x_1=x\sqrt{2}$; $y_1=x+y$. Новое уравнение $\frac{2a^2-x_1^2}{y_1^2}=2$. По Аполлонию, замечает

Ферма, эта кривая — эллипс, отнесенный к сопряженным диаметрам.

Распространение аналитической геометрии на изучение пространственных геометрических мест Ферма проводил путем изучения пересечений поверхностей плоскостями. Однако пространственные координаты и у него еще отсутствуют, а аналитическая геометрия в пространстве остается незавершенной.

«Введение» Ферма показывает, что он, по-видимому, последовательнее Декарта внедрял координатный метод, особенно приемы преобразования координат, и не был стеснен априорными соображениями, ограничивающими возможности его методов. Однако это сочинение не оказало на математику столь значительного влияния, как декартова «Геометрия». Причин этому было две. Во-первых, «Введение» было напечатано очень поздно, а до этого времени было известно лишь узкому кругу корреспондентов Ферма. Во-вторых, оно было изложено тяжеловесным, затруднительным для понимания языком алгебры Виета.

Ферма понимал, что он находится только в самом начале исследований новой математической дисциплины. Но он добавлял: «И все же мы не раскаиваемся в написании этого преждевременного и не вполне зрелого сочинения. Действительно, для науки представляет некоторый интерес не утаивать от последующих поколений еще неоформившиеся плоды разума; и благодаря новым открытиям науки первоначально грубые и простые идеи как укрепляются, так и множатся. И в интересах самих изучающих составить себе полное представление как о сокровенных путях разума, так и о самопроизвольно развивающемся искусстве».

Дальнейшее развитие аналитической геометрии показало, что идея Декарта о едином методе, в котором соединятся методы алгебры и геометрии, осуществилась не так, как это ему представлялось. Аналитическая геометрия вошла в систему математических дисциплин, не поглотив алгебру. Последняя продолжала самостоятельное развитие, превращаясь в общую теорию уравнений. Что же касается аналитической геометрии, то в первые 50—70 лет после появления она только переживала период утверждения и признания в обстановке горячих споров о правомерности, удобствах и возможностях ее методов. Факты этой науки накапливались вначале медленно. К 1658 г. был решен вопрос о полукубической параболе, в чем приняли участие В. Нейль (1637—1670), Г. ван Гейрат (род. 1633 г.) и Ферма. В 1679 г. Ф. Лагир (1640—1718) впервые нашел способ писать уравнения поверхностей. Тем не менее только к 1700 г. А. Паран (1666—1716) смог вывести уравнение сферической поверхности и касательной плоскости к ней. В систематической форме использовал и несколько развил аналитическую геометрию И. Ньютон в сочинении «Перечисление кривых 3-го порядка» (1704).

Облик, близкий к современному, придал аналитической геометрии Л. Эйлер, посвятив этому второй том «Введения в анализ» (1748). Ему предшествовал только Клеро (1713—1765), распространивший аналитическую геометрию на 3-мерное пространство, с помощью введения трехосной прямолинейной системы координат. Название — аналитическая геометрия — ведет свое начало от французского математика академика С. Ф. Лакруа (1764—1848), с конца XVIII в.

Появление в математике аналитической геометрии существенно облегчило формирование анализа бесконечно малых. С другой стороны, она стала необходимым средством построения механики у Ньютона, Лагранжа и Эйлера, весьма эффективным при решении многих задач математического естествознания. В математике XVII в. возникновение аналитической геометрии знаменовало появление возможностей для создания анализа переменных величин. Эти возможности вскоре были реализованы, так как наиболее важные задачи были (как мы увидим ниже) таковы, что вызывали острую необходимость срочного перехода к открытию методов и общих теорий математического анализа.