*ЛЕКЦИИ 12 и 13*

## ИНТЕГРАЦИОННЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИКЕ XVII ВЕКА

В математике XVII в. самым большим достижением справедливо считается изобретение дифференциального и интегрального исчисления. Сформировалось оно в ряде сочинений Ньютона и Лейбница и их ближайших сотрудников и учеников. Введение в математику методов анализа бесконечно малых стало началом больших, революционных преобразований, быстро изменивших все лицо математики и поднявших ее роль в системе естественнонаучных знаний человечества.

Однако появление анализа бесконечно малых не было делом рук одного или нескольких ученых, их гениальной догадки. Оно в действительности было завершением длительного процесса, внутриматематическая сущность которого состояла в накоплении и выделении элементов дифференциального и интегрального исчисления и теории рядов.

Побудительными причинами этого процесса были в первую очередь запросы механики, астрономии, физики. Эти науки не только предъявляли к математике требования решения того или иного класса задач. Они обогатили ее представления о непрерывных величинах и непрерывных движениях, о существе и видах функциональных зависимостей. В тесном взаимодействии математики и смежных наук вырабатывались инфинитезимальные методы — основа математики переменных величин.

Для создания исчисления бесконечно малых внутри математики XVII в. сложились достаточные предпосылки. Это были: наличие сложившейся алгебры и вычислительной техники; введение в математику переменной величины и координатного метода; усвоение инфинитезимальных идей древних, особенно Архимеда; накопление методов решения задач на вычисление квадратур, кубатур, определения центров тяжести, нахождение касательных, экстремалей и т. д.

В решении задач такого рода, в поисках общих методов их решения, а следовательно и в создании анализа бесконечно малых, принимали участие многие ученые: Кеплер, Галилей, Кавальери, Торричелли, Паскаль, Валлис, Роберваль, Ферма, Декарт, Барроу и многие другие. Создание элементов математического анализа представляло собой многосторонний творческий труд большого числа ученых.

Для удобства изучения этого сложного процесса разделим методы, содержащие крупицы анализа бесконечно малых, на две группы. Сначала рассмотрим те из них, в которых проявляются элементы позднейшего интегрального исчисления; их мы назовем интеграционными. Затем рассмотрим дифференциальные методы, т. е. методы решения задач на определение касательных и т. п., тех, что решались позднее средствами дифференциального исчисления. Открытие связей интеграционных и дифференциальных методов — решающий этап, после которого сразу началось формирование математического анализа,— составит последнюю часть этих двух лекций.

**Интеграционные методы.** Вначале эти методы вырабатывались, накапливались и выделялись в ходе решения задач на вычисление объемов, площадей, центров тяжестей и т. п. Древние задачи Архимеда пересматривались вновь и вновь, изучались его инфинитезимальные методы, выяснялись их математические возможности. Интеграционные методы слагались в то время как методы определенного интегрирования. Процесс формирования и внедрения в математику этих методов был очень бурным и скоротечным; уже через 50—60 лет со времени появления первой работы он привел к образованию интегрального исчисления.

Самым ранним по времени опубликования методом этого типа был метод непосредственного оперирования с актуальными бесконечно малыми величинами. Появился он в 1615 г. в сочинениях Кеплера.

Иоганн Кеплер (1571—1630), уроженец Вюртемберга — одного из многочисленных в ту пору немецких государств,— выдающийся астроном и математик. Он посвятил практически всю свою жизнь изучению, развитию и пропаганде гелиоцентрической системы Коперника. Анализируя огромный материал астрономических наблюдений, он в 1609—1619 гг. открыл законы движения планет, носящие и поныне его имя: 1) Планеты движутся по эллипсам; Солнце находится в одном из его фокусов; 2) Радиусы-векторы планет «заметают» за равные промежутки времени равные секториальные площади (см. рис. 36); 3) Квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний до Солнца.

Формулировка этих законов показывает, что для математического доказательства их справедливости недостаточно вла-

дения известной в то время вычислительной техникой, знания конических сечений и алгебраических средств. Задача вычисления секториальных площадей требовала умения пользоваться бесконечно малыми величинами. Этого умения требовали и другие задачи практического характера. И вот по поводу одной из таких практических задач Кеплер, воспользовавшись случаем, изложил свой метод использования бесконечно малых величин.

Речь идет об отыскании наиболее целесообразной формы бочек и о способах измерения их вместимости. Сочинение, посвященное этой проблеме, так и называется: «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии» (Линц, 1615). Состоит оно, не считая предварительных замечаний, из трех частей: часть теоретическая, специальная стереометрия австрийской бочки, правила для измерения вместимости бочек. Для нас наибольший интерес представляет теоретическая часть. Начинается она со «Стереометрии правильных кривых тел».

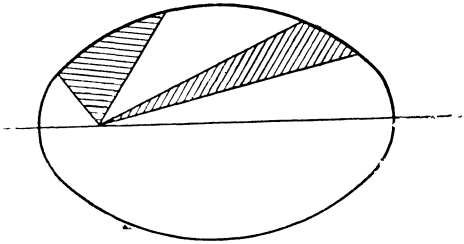

Рис. 36

Это — просто пересказ сочинения Архимеда «О шаре и цилиндре». Кеплер принимает античный метод исчерпывания, которым пользовался Архимед, называет его глубоким, но отбрасывает заключительный этап приведения к противоречию. Он хочет разгадать замысел Архимеда, приведший того к получению столь замечательных результатов, освободить его от наслоений, вызванных формальными требованиями строгости. Этот замысел, по мнению Кеплера, состоит в том, что любая фигура или тело представляется в виде суммы множества бесконечно малых частей. Круг, например, состоит из бесконечно большого числа бесконечно узких секторов, каждый из которых может рассматриваться как равнобедренный треугольник. Все треугольники имеют одинаковую высоту (радиус круга), а сумма их оснований равна длине окружности. Таким же образом шар оказывается составленным из бесконечного множества конусов, вершины которых сходятся в центре шара, а основания образуют поверхность шара.

Метод суммирования актуально бесконечно малых Кеплер распространяет и на другие несложные геометрические фигуры и тела (конусы и цилиндры) и их части, рассмотренные у Архи-

меда. В некоторых случаях он еще дальше отходит от строгости изложения, вводя интуитивные соображения. Например, доказано, что боковая поверхность вписанного конуса относится к площади основания (большому кругу шара) как $\sqrt{2}:1$; эта поверхность вдвое меньше боковой поверхности описанного конуса. И вдруг Кеплер пишет: «Весьма правдоподобно, что поверхность полусферы есть среднее пропорциональное между поверхностями (боковыми.— *К. Р.*) обоих конусов» (изд. 1935, стр. 123). Справедливости ради заметим, что в большинстве высказываний об интуитивной правдоподобности результата или других нестрогих рассуждений Кеплер отсылает к Архимеду, который «это доказывает со всей строгостью».

От правильных кривых тел Архимеда Кеплер переходит к изучению тел, образованных вращением круга около прямой,

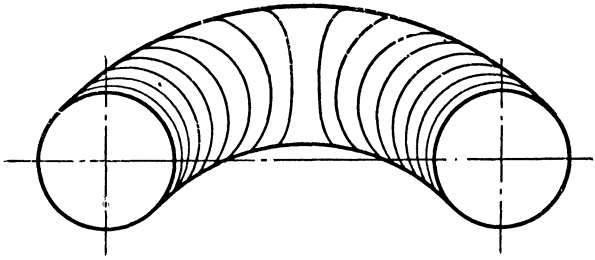

Рис. 37

не проходящей через его центр, а также вращением других конических сечений. Всего он рассмотрел 92 вида тел вращения, называя их по внешнему виду лимонами, яблоками, вишнями, турецкими чалмами и т. п. и даже вообще желваками.

Метод вычисления объемов тел вращения и их частей был у Кеплера единым. Во-первых, изучаемое тело делилось на бесконечное число частиц, «ломтей», занимающих равноправные положения в теле. Эти части тела перегруппировывались, образуя другое тело, объем которого возможно вычислить. Если непосредственное суммирование оказывалось невозможным провести, то они предварительно заменялись другими частицами, эквивалентными данным. Разъясним этот метод на двух примерах.

В теореме 18 Кеплер доказал, что всякое кольцо кругового или эллиптического сечения равновелико цилиндру, высота которого равна длине окружности, описываемой центром сечения, а основание — сечению кольца. Метод доказательства: кольцо (тор) рассекается на доли плоскостями, проходящими через центр тора перпендикулярно поверхности. Каждый разновысокий ломтик заменяется цилиндриком с тем же основанием и

с высотой, равной среднему арифметическому наибольшей и наименьшей высоты. Столбик из этих цилиндриков дает наглядное доказательство теоремы. Далее Кеплер обсуждает возможные обобщения, связанные с формой сечения кольца, приходя к выводу, что теорема верна для всех сечений, симметричных относительно вертикали, проведенной через центр сечения.

Второй пример более сложен. В нем речь идет об определении объема яблока, т. е. тела, образованного вращением вокруг хорды сегмента, большего, нежели полукруг, а также частей яблока.

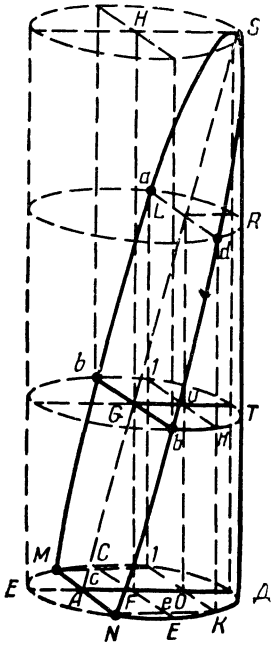

Рис. 38

Кеплер представляет яблоко состоящим из долек, образованных меридиональными сечениями и имеющих общий отрезок $MN$. Развернув экватор яблока в прямую $DS$, Кеплер перераспределяет ломтики, деформируя их без изменения объема. Образуется цилиндрическое тело $MNSD$, которое можно представить себе отсеченным от цилиндра, основанием которого является круг, образующий яблоко, а высота равна длине окружности радиуса $AD$. Объем этого тела равен объему яблока.

Тот же результат получается, если яблоко представляется разделенным не на элементарные меридиональные дольки, а на концентрические цилиндрические слои, имеющие осью $MN$ — своеобразные «стружки». Развернув каждую стружку перпендикулярно плоскости $DMN$, Кеплер получил совокупность бесконечно тонких прямоугольников, составляющих упомянутое цилиндрическое тело (например, прямоугольник $JKad$).

Теперь можно перейти к определению объема пояса яблока — той его части, которая остается после извлечения из него сердцевины, т. е. цилиндрической части, имеющей $MN$ своей осью. Если пояс образован, например, сегментом $JKD$, то он равновелик части $LSDO$ цилиндрического тела. Эта часть в свою очередь состоит из двух частей: цилиндрического сегмента $VTDO$ и тела $VLST$. Последнее Кеплер рассматривает как разность двух тел: $VLST = GLST - GLV$.

Учитывая, что точка $G$ является центром круга, тело $GLST$ оказывается равновеликим шару того же радиуса, что и заданный. Поэтому тело $VLST$ трактуется как шаровой пояс, образованный тем же сегментом $JKD$.

Эти соображения и лежат в основе теоремы XX: «Пояс яблока составляется из пояса сферы и прямой части цилиндра, основанием которой служит сегмент, недостающий (до полного круга) на вращающейся фигуре, образующей яблоко, а высотой — длина окружности, описанной центром большого сегмента».

В конце доказательства Кеплер поместил в качестве добавления правило для вычисления объема яблока и его сферического пояса. Методы Кеплера в определении объемов тел вращения, разумеется, были нестрогими. Это было ясно и ему самому и его современникам. Вокруг кеплеровских суммирований актуальных бесконечно малых разгорались страсти. Как и во все эпохи, не было недостатка в придирчивых критиках. Ученик виеты шотландец А. Андерсон выпустил даже специальное сочинение «В защиту Архимеда» (1616, через год после выхода в свет рассматриваемого сочинения Кеплера), где обвинял Кеплера в оскорблении памяти Архимеда.

Тем не менее плодотворность суммирования элементов, вычитанная у Архимеда Кеплером, была очевидной. Первая же попытка создать регулярный алгоритм оперирования с бесконечно малыми стала весьма популярной. Многие ученые посвятили свои работы усовершенствованию оперативной стороны этого предприятия и рациональному разъяснению возникающих при этом понятий. Наибольшую известность приобрела геометрия неделимых, изобретенная Кавальери.

Кавальери Бонавентура (1598—1647), ученик Г. Галилея, происходил из знатного рода. Монашеская карьера сочеталась в его жизни с научной и преподавательской деятельностью по математике. С 1629 г., по рекомендации Галилея, он занял кафедру математики в Болонье, будучи одновременно настоятелем католического монастыря ордена иеронимитов. Прекрасный знаток античных авторов, он в то же время глубоко изучал высказанные Галилеем и Кеплером идеи создания исчисления неделимых. Кавальери написал ряд сочинений по астрономии, технике вычислений, коническим сечениям, тригонометрии. В 1632 г. он опубликовал 11-значные таблицы логарифмов тригонометрических функций. Но делом его жизни, имевшим наибольшее значение для развития математики, был метод неделимых, задуманный как универсальный метод геометрии.

Идея общего метода неделимых впервые высказана Б. Кавальери в 1621 г. В рукописи, представленной им при занятии профессорской должности в 1629 г., уже имеет место систематическое применение неделимых.

Итогом многолетнего усовершенствования метода неделимых явилась книга «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного» (1635, 2 изд.— 1653). Этому

же предмету была посвящена книга Кавальери «Шесть геометрических опытов» (1647).

Метод неделимых изобретен для определения размеров плоских фигур и тел. Как фигуры, так и тела представляются составленными из элементов, имеющих размерность на единицу меньше. Так, фигуры состоят из отрезков прямых, проведенных параллельно некоей направляющей прямой, называемой регула. Этих воображаемых отрезков бесконечно много. Они заключены между двумя касательными, имеющими название парных. Касательные параллельны регуле; за регулу может быть принята одна из них.

В геометрических телах неделимыми являются плоскости, параллельные некоторой плоскости, избранной в качестве регулы. Их тоже бесконечно много; границами их совокупности служат две парные касательные плоскости, параллельные регуле. Часто одна из них избирается в качестве регулы.

Идею своего метода Кавальери образно выражал, предлагая читателям представить паука, непрерывно ткущего геометрию из неделимых.

Совокупность всех неделимых, вводимая Кавальери, по существу вводит понятие определенного интеграла. Однако логические трудности, связанные с пониманием неделимого, составления площадей из линий, не имеющих ширины, и тел из бесконечно тонких плоскостей и т. п. не дают еще возможности судить о совокупностях всех неделимых. Поэтому Кавальери вынужден рассматривать отношения тел и фигур, ограничиваясь случаями, когда отношения неделимых постоянны. Таким образом, сущность геометрии неделимых Кавальери можно сформулировать так: плоские фигуры и тела относятся друг к другу, как все их неделимые, взятые вместе; если неделимые находятся в одном и том же отношении друг к другу, то отношение площадей соответствующих фигур (или объемов тел) равно этому отношению.

Эти утверждения практически эквивалентны современным умозаключениям типа: даны две фигуры, ограниченные на нашем чертеже (рис. 39) осью $x$, прямыми $x=a$ и $x=b$ и соответственно $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$. Отношение площадей $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_{1k} \int\limits_a^b f_1(x)\,dx}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_{2k} \int\limits_a^b f_2(x)\,dx}$.

Если $\frac{y_{1k}}{y_{2k}}=a=\text{const}$ для любого $k$, то и $\frac{S_1}{S_2}=k$.

Кавальери рассматривал и отношения степеней неделимых. Например, он ввел совокупность квадратов неделимых и доказал

теорему: сумма квадратов неделимых параллелограмма втрое больше суммы квадратов неделимых треугольника, образованного в результате проведения диагонали. Введем для краткости обозначения: $AC=a$, $RT=x$, $TV=y$, $RS=\frac{a}{2}=b$, $ST=z$. Тогда $x=b+z$, $y=b-z$ и

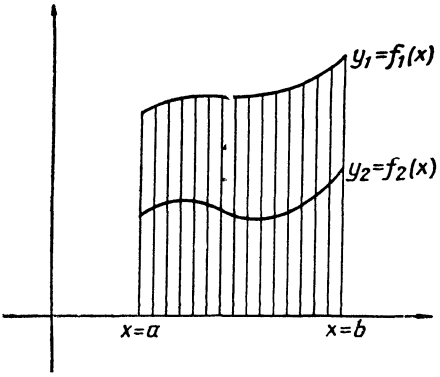


Рис. 39

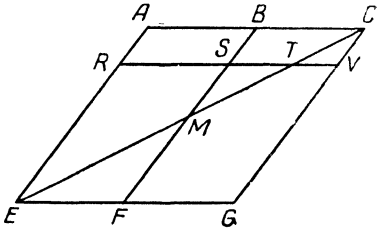


Рис. 40

сумма квадратов частей неделимых $x^2+y^2=2b^2+2z^2$. Суммируем все неделимые, обозначив сумму квадратов неделимых символом [ ]:

$$[AEC]+[CGE]=2[ABFE]+2[BCM]+2[FEM].$$

Заметим, что

$$AEC]=[CGE];\quad [ABFE]=\frac{1}{4}[ACGE];\quad [BCM]=[FEM]=\frac{1}{8}[ACE],$$

что нетрудно понять, вообразив над каждым линейным элементом квадрат и рассматривая их совокупности. Следовательно

$$[ACE]=\frac{1}{4}[ACGE]+\frac{1}{8}[ACE]+\frac{1}{8}[ACE];$$

$$[ACE]=\frac{1}{3}[ACGE].$$

В переводе на язык интегрального исчисления Кавальери доказал, что

$$\int_0^a x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^a a^2dx$$

или иначе:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{n}\right)^2(1^2+2^2+\ldots+n^2)}{na^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2}{n^3}=\frac{1}{3}.$$

Эту теорему Кавальери сумел обобщить на случай суммирования более высоких степеней неделимых, вплоть до 9-й, решив таким образом группу задач, эквивалентных вычислению определен-

ных интегралов вида $\int_0^a x^n dx$, для $n=1, 2,\ldots,9$. То, что у Кавальери рассматриваются не выражения, эквивалентные интегралам, а их отношения, дела принципиально не меняет. Достаточно выбрать в качестве единого знаменателя интеграл, соответствующий сумме неделимых.

Другим обобщением метода являлось введение криволинейных неделимых.

Метод неделимых позволил решить множество трудных задач, ранее не поддававшихся решению. У него появились горячие приверженцы. Один из них, Е. Торричелли, писал, что новая геометрия неделимых переходит из рук одних ученых к другим, как чудо науки; она, по мнению Торричелли, убедила мир, что века Архимеда и Евклида были годами детства ныне взрослой геометрической науки. Торричелли, активно работавший методами Кавальери, первый сумел определить объем тела, образованного вращением ветви гиперболы вокруг одной из своих осей.

Однако у этого метода были свои недостатки. Во-первых, он был непригоден для измерения длин кривых, так как соответствующие неделимые (точки) оказывались безразмерными. Во-вторых, невыясненность понятия неделимого, невозможность его рационального объяснения создавала для всей теории атмосферу необоснованности. В-третьих, развитие метода сильно задерживалось из-за того, что Кавальери в соответствии со сложившимися в его время представлениями о научной строгости избегал применять символику и приемы алгебры.

Тем не менее определенное интегрирование в форме геометрических квадратур в первой половине XVII в. уже зарекомендовало себя. Все усилия отныне были направлены на уточнение его и на достижение возможно более общих результатов.

Паскаль (1623—1662), например, рассматривал квадратуры в форме, близкой той, которая употребляется Кавальери. Попытка уточнения состоит в том, что он сумму всех неделимых понимал как сумму элементарных площадок, образуемых бесконечно близкими одинаково отстоящими друг от друга ординатами, ограниченными отрезком оси абсцисс и кривой (т. е. сумму вида $\Sigma\, ydx$). В ряде задач он вводил сумму всех синусов, определяя ее как сумму произведений ординат на элементы дуги ($\Sigma yds$), которая в случае окружности единичного радиуса оправдывает свое название ($\Sigma \sin\varphi\, d\varphi$). При помощи этого геометрического эквивалента определенного интегрирования Паскаль сумел разрешить много задач на определение площадей, объемов, статических моментов и т. д.

В случае, когда речь идет о сумме синусов, Паскаль высказал мысль, сыгравшую впоследствии большую роль в истории ма-

тематики. Он ввел вспомогательный треугольник $EKE$, подобный $\Delta ADI$, и сохранил его в своих рассуждениях даже тогда, когда расстояние между двумя соседними ординатами бесконечно мало:

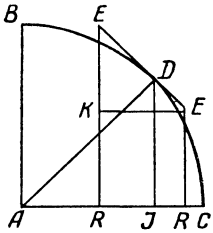

Рис. 41

$$\triangle EKE \sim \triangle ADI; \quad \frac{EE}{KE}=\frac{AD}{ID};$$
$$DI \cdot EE = AD \cdot KE,$$

или в более привычных нам обозначениях: $yds=rdx$. Последующая теорема Паскаля: сумма синусов какой-нибудь дуги четверти круга равна отрезку основания между крайними синусами, умноженному на радиус, легко переводится на язык интегрального исчисления. В самом деле: $\int_0^s yds = r\int_0^x dx$. Так как $y=r\cos\varphi$, $x=r\sin\varphi$, $s=r\varphi$, то

$$\int_0^\varphi r\cos\varphi d(r\varphi)=r\int_0^\varphi d(r\sin\varphi),$$

или

$$\int_0^\varphi \cos\varphi d\varphi=\int_0^\varphi d(\sin\varphi)=\sin\varphi.$$

По собственному признанию Лейбница, треугольник Паскаля послужил ему прообразом дифференциального треугольника, составленного из дифференциалов $dx$, $dy$, $ds$.

Важное усовершенствование геометрических квадратур было проделано Ферма, который ввел деления квадрируемой площади ординатами, отстоящими друг от друга на неравных расстояниях. Это дало ему возможность распространить способы вычисления выражений, эквивалентных $\int_0^a x^n dx$, на случай, когда $n$ — дробное и отрицательное.

Пусть, например, речь идет о вычислении интеграла $\int_0^x x^{\frac{p}{q}} dx$, где $p>0$, $q>0$. В формулировке Ферма речь идет о квадрировании площади, образованной отрезком оси абсцисс $[0, x]$, двумя крайними ординатами и кривой, уравнение которой $x^p=y^q$. Интервал интегрирования делится на отрезки точками с координатами: $x$, $\alpha x, \alpha^2 x, \ldots$, где $\alpha<1$. Последующие операции состоят в вычислении последовательно: $\Delta x$, $y$, $y\Delta x$. $\Sigma y\Delta x$ и переходе к

случаю, когда ширина полосок бесконечно уменьшается. Приведем эти выкладки в виде таблицы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Delta x$ | $(1-\alpha)x,$ | $\alpha(1-\alpha)x,$ | $\alpha^2(1-\alpha)x, \ldots$ |
| $y$ | $x^{\frac{p}{q}},$ | $\alpha^{\frac{p}{q}}x^{\frac{p}{q}},$ | $\alpha^{\frac{2p}{q}}x^{\frac{p}{q}}, \ldots$ |
| $y\Delta x$ | $(1-\alpha)x^{\frac{p+q}{q}},$ | $(1-\alpha)\alpha^{\frac{p+q}{q}}x^{\frac{p+q}{q}},$ | $(1-\alpha)\alpha^{2\frac{p+q}{q}}x^{\frac{p+q}{q}}, \ldots$ |

Суммирование, как видим, свелось к суммированию геометрической прогрессии.

Сумма

$$\sum y\Delta x=\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}}x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Чтобы избежать того, что коэффициент при $x^{\frac{p+q}{q}}$ делается неопределенным, когда полоски уменьшаются, Ферма делает подстановку $\alpha=\beta^q$. Тогда

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}}=\frac{1-\beta^q}{1-\beta^{p+q}}=\frac{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{q-1})}{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{p+q-1})}.$$

В предельном случае $\alpha=1$, следовательно $\beta=1$ и

$$\sum y\Delta x=\frac{q}{p+q}x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Аналогичные вычисления позволяют получить $\int\limits_x^\infty x^{-n}dx$. Ферма делит интервал интеграции точками с абсциссами $x$, $\alpha x$, $\alpha^2 x,\ldots$, где $\alpha>1$. Последовательно вычисляя, по образцу, данному выше, $\Delta x$, $y$, $y\Delta x$, $\Sigma y\Delta x$, и переходя к предельному случаю, когда $\alpha=1$, Ферма получает результат:

$$\sum_{(\alpha=1)} y\Delta x=\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}.$$

По-видимому, Ферма изобрел этот метод под влиянием сочинений Непера, потому что он сам назвал его логарифмическим.

Математики первой половины XVII в. с большим удивлением и энтузиазмом убеждались, какое большое количество, казалось бы, разнородных задач геометрии и механики приводилось к квадратурам. С каждым годом, с каждым новым результатом все более выявлялась общность операций, которые приходилось применять при решении этих задач. Геометрический эквивалент определенного интегрирования, возникший как специфический метод геометрии, частично воспринятый от Архимеда, посте-

пенно приобретал черты общего метода математики. В нем все больший удельный вес приобретали численные методы и элементы грядущего анализа бесконечно малых.

В этом отношении характерным примером являлись работы Дж. Валлиса (1616—1703), английского математика, профессора Оксфордского университета (с 1649 г.), одного из основателей (с 1663 г.) Лондонского королевского общества. В 1655 г. им была издана «Арифметика бесконечного». Отправляясь от метода Кавальери, он перевел на арифметический язык отношения сумм неделимых. Так, отношение степеней неделимых, которые мы интерпретировали как интегрирование степенной функции $\int x^n dx$, он представил как отношение сумм чисел. Так, отношение суммы неделимых треугольника к сумме неделимых параллелограмма с тем же основанием и высотой сводится Валлисом к отношению $\frac{0+1+2+\ldots+n}{n+n+n+\ldots+n}$, которое при безгранично возрастающем $n$ равно $\frac{1}{2}$. Отношение сумм 2, 3, ..., $m$ степеней неделимых истолковано как

$$\frac{0^k+1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}$$

($k=2, 3, \ldots, m$) для $n$ неограниченно возрастающего. Значения этих отношений до $k=9$ получены Кавальери; они равны $\frac{1}{k+1}$.

Валлис, рассуждая с помощью неполной математической индукции, распространяет этот результат на случай любого целого $k$. Так, им получена была формула эквивалентная

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}.$$

Валлис знал из сочинений Архимеда, что площадь параболического сегмента равна $\frac{2}{3}$ от площади описанного параллелограмма. Он и его перевел на язык отношений указанных выше сумм:

$$\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\ldots+\sqrt{n}}$$

при неограниченно возрастающем $n$, равно $\frac{2}{3}$. Та же неполная индукция приводит Валлиса к обобщению этого результата на все дробные показатели степени, а затем и на отрицательные.

Идеи, включающие элементы определенного интегрирования, широко распространились среди математиков западноевропей-

ских стран. Методы интегрирования охватывали к 60-м годам XVII в. обширные классы алгебраических и тригонометрических функций. Было решено огромное число задач, осветить которые в настоящих лекциях невозможно. Нужен был только один толчок — рассмотрение всей совокупности методов с единой точки зрения, чтобы перевернуть всю интеграционную проблематику и создать интегральное исчисление.

**Дифференциальные методы.** В математике XVII в. наряду с интеграционными методами складывались и методы дифференциальные. К дифференциальным методам мы отнесем, по образцу определения интегральных методов, те, в которых содержатся элементы будущего дифференциального исчисления. Вырабатывались эти элементы при решении задач, которые в настоящее время решаются с помощью дифференцирования. Такие задачи были в то время трех видов: определение касательных к кривым, нахождение максимумов и минимумов функций и отыскание условий существования у алгебраических уравнений кратных корней. К этой группе тесно примыкают запросы механики, вытекающие из необходимости в случае неравномерных движений определять скорость в любой точке траектории, не говоря о более сложных задачах.

Научное наследие древних и средневековых авторов в этой области не было столь определенным и значительным, как в случае интегральных методов. Задачи о касательной рассматривались не систематически, единообразных приемов выработано не было. Общим, по-видимому, было стремление понимать касательную как прямую, имеющую с кривой одну общую точку и обладающую свойствами локальной односторонности. В области экстремальных задач, помимо фактов элементарной изопериметрии, существовали лишь диоризмы, т. е. ограничения, накладываемые на условия задачи, чтобы она имела решение в области рациональных и действительных чисел, или геометрических отрезков. Диоризмы часто содержат указания на экстремальные значения. Например, когда алгебраическое уравнение имеет кратные корни, кривые, пересечением которых уравнение решается, не пересекаются, а касаются друг друга. Таким образом, некоторая взаимосвязанность дифференциальных задач к XVII в. уже была отмечена.

В течение XVII в. дифференциальные задачи решались еще самыми различными методами. Как и всегда в науке, наряду с новым существует старое, они находятся во взаимопроникновении. Так происходило и в рассматриваемой нами области. Геометрические построения в духе античных математиков, механические соображения, исследования в духе новой тогда аналитической геометрии Декарта, инфинитезимальные соображения — в их тесном сплетении вызревало дифференциальное

исчисление. Приведем несколько примеров, характеризующих этот процесс.

Уже в школе Галилея для нахождения касательных и нормалей к кривым систематически применялись кинематические методы. При этом касательная появляется как диагональ параллелограмма, сторонами которого являются горизонтальная и вертикальная составляющие скорости. Например, пусть тяжелая материальная точка брошена с некоторой горизонтальной начальной скоростью. Перемещения точки по оси $x$ будут пропорциональны отрезкам времени $x=nt$, по оси $y$ (вертикальной)— квадратам этих отрезков $y=\frac{g}{2}t^2$. Траектория — парабола, параметр которой Галилей определял как учетверенную высоту падения, которая была бы нужна, чтобы сообщить точке скорость, равную начальной горизонтальной скорости: $y=\frac{1}{2}\frac{g}{u^2}x^2$. Обозначив параметр $\frac{2u^2}{g}$ через $2p$, Торричелли нашел, что отношение вертикальной компоненты скорости $gt$ к горизонтальной $u$ равно $\frac{2y}{x}$ или $\frac{x}{p}$. Отсюда Торричелли заключил, что касательная пересекает ось параболы в точке, лежащей на отрезок $2y$ выше данной точки или на $y$ выше вершины параболы.

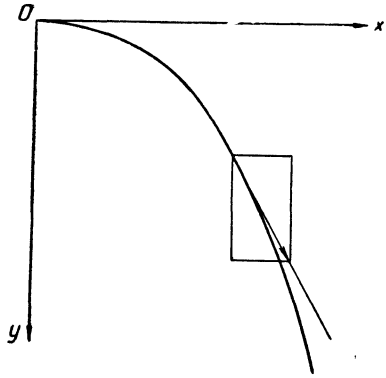

Рис. 42

Этот кинематический метод дал начало рассмотрению различных бросаний и сложных движений и к определению касательных в любой точке траектории. Систематическое изложение метода и его главнейших применений дал в 1640 г. Роберваль. Несмотря на важность кинематического метода, он был очень неудобен, так как исходил из индивидуальных особенностей кривых и поэтому был недостаточно алгоритмичен. Поэтому больше перспектив для определения касательных и нормалей в то время представлял метод нормалей Декарта, содержащийся во второй книге его «Геометрии» (изд. 1938, стр. 50 и далее).

Пусть необходимо провести нормаль к алгебраической кривой в точке $(a, b)$ и пусть это осуществлено. Нормаль пересечет ось абсцисс в точке, координаты которой пусть будут $(c, o)$. Семейство концентрических окружностей с центром в $(c, o)$ содержит одну окружность радиуса $R=\sqrt{(a-c)^2+b^2}$, которая имеет с кривой две общие точки, слившиеся в одну, именно точку $(a, b)$.

Одно из двух неизвестных, например $y$, может быть исключено из уравнений данной кривой и окружности. Так как $x=a$ — двойной корень, то уравнение должно получиться при этом вида $(x-a)^2P(x)=0$. Это дает возможность определить величину $c$ с помощью метода неопределенных коэффициентов. Для этого Декарт приравнивает левую часть полученного уравнения произведению $(x-a)^2$ на многочлен степени на две единицы меньше и с неопределенными коэффициентами. Сравнение коэффициентов при членах одинаковой степени дает уравнения, откуда определяется $c$.

Связанная с методом Декарта проблема отыскания кратных корней алгебраических уравнений получила развитие у голландского математика и инженера И. Гудде (1628—1704). Правило последнего, коротко говоря, состоит в отыскании общего наибольшего делителя уравнений $f(x)=0$ и $f'(x)=0$; последнее уравнение получено умножением коэффициентов данного уравнения $f(x)=0$ на члены произвольной арифметической прогрессии. Применяемый в наши дни способ, связанный с алгебраическим способом образования последовательных производных левой части алгебраического уравнения, появился, по-видимому впервые, у Ролля в конце XVII в. Однако возвратимся к дифференциальным методам.

Накопление элементов дифференциального исчисления наиболее явную форму приняло у Ферма. В 1638 г. он сообщил в письме Декарту, что решил задачу определения экстремальных значений функции $f(x)$. Ферма составлял уравнение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$ и после преобразований в левой части полагал $h=0$. Вопреки мнению позднейших исследователей, которые видели в этом идеи исчисления бесконечно малых, в действительности Ферма нашел это условие и аналогичное $\left.\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|_{y=x}=0$ еще алгебраическими путями.

Рассуждения тут примерно такие: дана $f(x)=0$; найти экстремум.

Пусть для некоторого $x$ функция достигает максимума. Тогда $f(x\pm h)<f(x)$, $f(x)\pm Ph+Qh^2\pm\ldots<f(x)$. Вычитаем из обеих частей по $f(x)$ и делим на $h$: $\pm P\pm Qh\pm\ldots<0$. Так как $h$ можно выбрать любой малости, член $P$ будет больше по модулю суммы всех остальных членов. Неравенство поэтому возможно лишь при условии $P=0$, что и дает условие Ферма. В случае минимума рассуждения аналогичные. Ферма знал также, что знак $Q$ определяет характер экстремума.

Так же близок к дифференциальному исчислению метод Ферма отыскания касательных к алгебраическим кривым.

На малой дуге $MN$ алгебраической кривой $f(x)=0$ путем проведения секущей $SMN$ строится характеристический треугольник $MNP$. $\Delta MNP \sim \Delta MRS$. Отсюда $SR=\frac{MR \cdot MP}{PN}$, или в более привычных нам символах $SR=\frac{f(x) \cdot h}{f(x+h)-f(x)}$. Затем Ферма переходит от секущей к касательной, полагая $h=0$, получая тем самым $S_t=\frac{y}{y'}$.

Позднее он распространил этот метод определения касательных на случай неявной функции $f(x, y)=0$. Полученное им выражение легко переводится в привычное нам

$$\frac{\partial f}{\partial x}+y' \frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

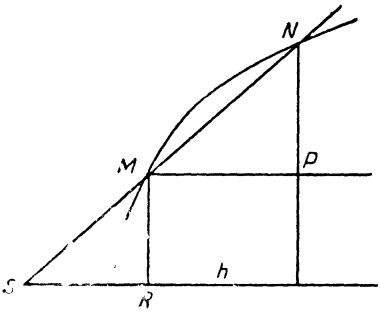

Рис. 43

Все функции Ферма — алгебраические полиномиальные. В случаях, когда в исследуемых функциях попадались иррациональности, он освобождался от них возведением обеих частей уравнения в степень. Впрочем, в этом узком, сравнительно, классе функций метод Ферма определения касательных и экстремальных значений общий, символика — единообразная. К сожалению, Ферма не стремился публиковать свои работы. Ему было достаточно научной переписки. Притом он пользовался трудно доступными для понимания алгебраическими средствами Виеты с его громоздкой символикой. Видимо, поэтому не сделал он последнего, уже небольшого, шага на пути к созданию дифференциального исчисления.

К середине XVII в. накопился достаточно большой запас средств решения задач, ныне решаемых с помощью дифференцирования. Однако не было еще выделено особой операции дифференцирования, понятий, равнозначных понятиям производной и дифференциала. Не была ясна связь дифференциальных и интеграционных методов. Математический анализ формировался в рамках и в терминах алгебры, геометрии, механики — сложившихся уже к тому времени наук. Так всякое новое математическое исчисление всегда проходит период формирования в пределах уже существующей системы математических наук, используя их средства.

**О связи дифференциальных и интеграционных методов.** Последним этапом эмбрионального периода анализа бесконечно

малых явилось установление связи и взаимообратности дифференциальных и интеграционных исследований. Побудительных причин для этого было много. Одними из важнейших были так называемые обратные задачи на касательные. Задачи этого типа состоят в определении кривых, исходя из заданного общего свойства всех касательных к ней. Речь идет не о нахождении огибающих семейства прямых, а о таких свойствах касательных, которые зависят от положения точки касания. В общей постановке задачи этого типа можно формулировать так: найти $y=f(x)$ из условия $f_1(x, y, y')=0$. Таким образом, речь идет о необходимости решить дифференциальное уравнение первого порядка с двумя переменными.

Обратные задачи на касательные имели практическое происхождение. Например, мореплаватели еще в эпоху великих географических открытий обратили внимание на кривую постоянного истинного курса корабля — локсодромию. Это кривая, касательные к которой пересекают меридианы, проведенные в точках касания, под постоянным углом. Различные обратные задачи на касательные были поставлены также в геометрической оптике и в кинематике.

Приближенные графические методы не могли считаться удовлетворительным средством решения этих задач. Попытку дать общий метод первым предпринял Декарт. Он предложил классифицировать все алгебраические кривые (неалгебраических кривых он, как было сказано, не рассматривал), расположить их в ряд, отыскивать их касательные и проверять, обладают ли они заданным свойством. Разумеется, первая же попытка испробовать этот метод проб, предпринятая Декартом при решении задачи де Бона, показала практическую его непригодность.

Задача де Бона заключалась в требовании квадрировать кривую, обладающую свойством $\frac{y}{S_t}=\frac{x-y}{a}$, где $S_t$ — подкасательная. Декарт испробовал кривые вида $y^n=ax^2+bx+c$ ($n=1,2, \ldots, 1000$), но безуспешно. Тогда он избрал другой путь: заменил систему координат на косоугольную, выбрав вместо оси $x$ прямую $y=x-a$. В этой системе подкасательная оказалась постоянной ($=a\sqrt{2}$).

В самом деле, уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{a}$ подстановкой $y_1=y+a-x$ преобразуется в $\frac{dy_1}{dx}=-\frac{y}{a}$ и, положив $x_1=x\sqrt{2}$, получим уравнение $\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{y}{a\sqrt{2}}$. Кривая де Бона оказалась неалгебраической. Декарт доказал этот, для нас почти очевидный, факт кинематически. Именно он показал, что эта кривая образована

двумя независимыми движениями: равномерным движением прямой $x=0$ и движением прямой $y_1=0$ или $y=x-a$ со скоростью, пропорциональной пройденному расстоянию. Кривая представляет геометрическое место точек пересечения этих двух движущихся прямых. Как было сказано, Декарт относил такие кривые к разряду механических и из своей системы математики исключал.

Задача де Бона, как и другие обратные задачи на касательные, указывала на взаимную обратность задач о проведении касательных и других. Сущность этих других задач состояла в решении, говоря в современных нам терминах, дифференциальных уравнений. Особенно хорошо удавались задачи, которые удавалось сводить к интегрированию $\left(\frac{dy}{dx}=f(x)\right)$. Отдельных результатов здесь добились шотландец Д. Грегори (1638—1675) и англичанин Валлис (1616—1703). Не замедлил появиться и общий, хотя и сформулированный в терминах геометрии, результат о взаимно обратной зависимости задач на квадратуры и на проведение касательной. Принадлежит он И. Барроу (1630—1677), профессору Кембриджского университета, ученику Валлиса и другу И. Ньютона. Опубликован этот результат в 1669 г. в «Лекциях по геометрии и оптике». Состоит он в следующем.

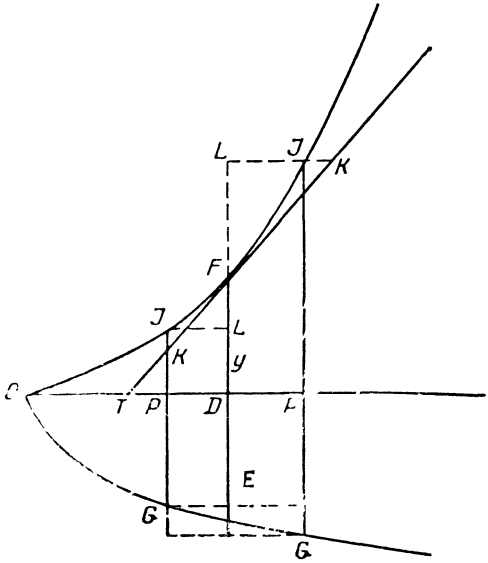

Рис. 44

Заданы две кривые $OF$ и $OE$. Точки $F$ и $E$ имеют общую абсциссу. Кривые связаны условием: $DF.R=S_{ODE}$, или в наших символах: $R.y=\int_0^x v dx$. Тогда подкасательная $DT=R\cdot\frac{DF}{DE}$, или $R\frac{DF}{DT}=DE$; т. е. $R\frac{dy}{dx}=v$. Этой теореме Барроу дал два доказательства:

а) Кинематическое. Кривая $OF$ пусть будет траекторией движущейся точки $F$. Закон движения: проекция $F$ на ось $x$ постоянна, т. е. точка $D$ движется с постоянной скоростью $R$, скорость

возрастания ординаты $DF$ геометрически изображается отрезком $DE$, или $v$. Короче: $\frac{dx}{dt}=R$. $\frac{dy}{dt}=v$; Касательная есть диагональ прямоугольника, составленного из этих скоростей. Тогда подкасательная $\frac{dy}{dx}=\frac{v}{R}$, или $v=R\frac{dy}{dx}$. По Галилею, путь, пройденный точкой $F$ при равномерно ускоренном движении, равен $\int_0^x v dx=R\cdot y$.

б) Более строгое, по методу древних. Проведена прямая $FT$, определяемая условием $DT=R\frac{DF}{DE}$. Нужно доказать, что это — касательная, т. е. опорная прямая, точки которой в локальной области лежат по одну сторону от кривой.

Проведем в точке $I$ кривой прямые $LIK$ и $IKL$, параллельные оси $Ox$. По свойству кривых площадь $S_{PDEG}=R.LF$. Из чертежа. $\frac{LK}{LF}=\frac{DT}{DF}=\frac{R}{DE}$, откуда $LK\cdot DE=R\cdot LF=S_{PDEG}$.

Но в силу монотонности кривой $OE$ ||

$$S_{PDEG}\gtrless IL\cdot DE$$

в зависимости от того, находится точка $I$ правее или левее точки $F$. Отсюда соответственно $LK\gtrless IL$, что и доказывает расположение прямой по одну сторону от кривой, т. е. что она касательная.

Опираясь на этот результат, Барроу решил большое число обратных задач на касательные. С его сочинениями знакомились многие ученые, в том числе Ньютон и Лейбниц. Итак, к середине XVII в. математика находилась на грани открытия дифференциального и интегрального исчисления. Точнее сказать, это открытие завершалось. Глубоко прав был Ф. Энгельс, когда в 1875 г. он так характеризовал рассматриваемый нами период истории математики: «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем» (Ф. Энгельс. Диалектика природы, 1949, стр. 206).

В настоящих лекциях были уже рассмотрены следующие моменты Энгельсовой характеристики о роли декартовой переменной величины; предпосылки, стимулы и формы появления элементов анализа бесконечно малых. В следующей лекции мы попытаемся кратко осветить процесс появления в математике дифференциального и интегрального исчисления, а также некоторые итоги развития математики к концу XVII в.