ЛЕКЦИИ 14 и 15

ПОЯВЛЕНИЕ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Во второй половине XVII в. начала складываться новая область математики — анализ бесконечно малых. Его появление, как мы видели, было предчувствовано многими учеными Оно революционизировало всю математику, превратив ее в математику переменных величин. Первым этапом существования анализа было формирование дифференциального и интегрального исчисления. Последнее возникло как самостоятельный отдел математики почти одновременно в двух разновидностях: в виде теории флюксий в трудах И. Ньютона и его английских последователей и в виде исчисления дифференциалов Г. В. Лейбница, получившего распространение прежде всего на континенте Европы.

Развитие математических исчислений носит отчетливо выраженный диалектический характер. В рамках уже существующих исчислений происходит процесс накопления предпосылок, элементов и составных частей нового исчисления. Наступает затем момент, когда происходит переворот в методе. Этот переворот выражается в появлении математических работ, в которых накопившиеся в данной области факты пересматриваются с новой, единой точки зрения. Центр внимания перемещается с попыток решения отдельных задач на сам метод или группу методов, которые явно формулируются, совершенствуются и применяются. Область применения появившегося таким путем исчисления, как правило, оказывается более широкой, нежели область его возникновения. Работы И. Ньютона и Г. В. Лейбница по анализу бесконечно малых отражают именно такой поворотный пункт в истории математического анализа.

Теория флюксий. Наиболее ранней формой анализа является теория флюксий, открытие которой принадлежит И. Ньютону.

Исаак Ньютон (1642—1727) родился в семье фермера в местечке Вулсторп близ г. Кембриджа (Англия). В 1665 г. он

окончил Кембриджский университет со степенью бакалавра. Учителем его был И. Барроу. В 1668 г. И. Ньютон получил степень магистра, а через год, в 1669 г., Барроу, будучи в расцвете сил, уступил Ньютону свою кафедру в знак уважения к талантам и научным достижениям своего ученика. Профессором в Кембридже Ньютон был до 1701 г. В 1672 г. он был избран членом, а с 1703 г.— президентом Лондонского королевского общества. Наиболее значительные работы по математике Ньютон написал во время пребывания в Кембридже.

Основными направлениями научной деятельности Ньютона были физика, механика, астрономия и математика. Ему принадлежат в этих областях науки первоклассные достижения, в том числе: вывод и формулировка основных законов классической механики, открытие закона всемирного тяготения, законов спектрального разложения света, разработка дифференциального и интегрального исчисления в форме метода флюксий.

Математика в системе научных воззрений Ньютона занимала место части общей науки о природе — натуральной философии — и орудия физических исследований. В качестве математического аппарата механики, который учитывал бы движение и охватывал связанные с ним понятия скорости и ускорения, Ньютон разработал метод, названный им методом, или теорией, флюксий.

В методе флюксий изучаются переменные величины, вводимые как абстракции различных видов непрерывного механического движения. Называются они флюентами, т. е. текущими, от латинского слова fluere — течь. Все флюенты являются зависимыми переменными; они имеют общий аргумент — время. Точнее, речь идет о математическом абстрагированном аналоге времени — некоей воображаемой абстрактной равномерно текущей независимой величины, к которой отнесены все флюенты. Это, разумеется, не осложняет задачи Ньютона, так как не стесняет при соотнесении переменных в задачах.

Далее вводятся скорости течения флюент, т. е. производные по времени. Названы они флюксиями. Так как флюксия представляет собой переменную, то можно находить флюксию от флюксии и т. д. Символы первой, второй и т. д. флюксий, если флюенту обозначить y, будут: $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$ и т. д. Для вычисления мгновенных скоростей — флюксий потребовались бесконечно малые изменения флюент, названные Ньютоном моментами. Символ момента времени 0; момент флюенты y, следовательно, запишется: $0\dot{y}$, т. е. произведение мгновенной скорости на момент времени. По существу момент флюенты — это ее дифференциал. Иногда, когда рассуждения исходят из заданной флюксии, обозначенной, допустим, y, вводятся специальные символы флюент: $'y$, или $\square y$ (символ, указывающий на квадра-

туру). Символы Ньютона не так удобны, как символы дифференциалов, ведущие свое происхождение от Лейбница и распространенные в наше время. Однако они еще сохранились, например, в механике.

В теории флюксий решаются две главные задачи, сформулированные как в механических, так и в математических терминах:

1. Определение скорости движения в данный момент времени по заданному пути. Иначе: определение соотношения между флюксиями из заданного соотношения между флюентами.

2. По заданной скорости движения определить пройденный за данное время путь. В математических терминах: определить соотношение между флюентами по заданному соотношению между флюксиями.

Первая задача, так называемая прямая задача теории флюксий, представляет задачу дифференцирования неявной, в общей постановке, функции и получения дифференциального уравнения, выражающего элементарные закономерности природы. Вторая — обратная задача теории флюксий — есть задача интегрирования дифференциальных уравнений, поставленная в самом общем виде. В частном виде в этой задаче речь идет о нахождении первообразных функций. Таким образом, интегрирование в теории флюксий вводится вначале в виде неопределенного интегрирования.

Для прямой задачи Ньютон ввел единообразное правило — алгоритм дифференцирования функций. Поясним его, вслед за Ньютоном, на примере. Дано соотношение между флюентами: $x^3-ax^2+axy-y^3=0$. Образуем то же соотношение для флюент, испытавших мгновенные изменения, т. е. когда к каждой флюенте добавлен ее момент:

$$(x+\dot{x}0)^3-a(x+\dot{x}0)^2+a(x+\dot{x}0)(y+\dot{y}0)-(y+\dot{y}0)^3=0.$$

В развернутом по формуле бинома виде:

$$\left.\begin{array}{l} x^3+3x^2\cdot\dot{x}0+3x\cdot\dot{x}\dot{x}00+\dot{x}^3 0^3- \\ -ax^2-2ax\cdot\dot{x}0-a\dot{x}^2 00+ \\ +axy+ax\dot{y}0+ay\dot{x}0+a\dot{x}0\cdot\dot{y}0- \\ -y^3-3y^2\dot{y}0-3\dot{y}^2 00y-\dot{y}^3 0^3 \end{array}\right\}=0.$$

Первый столбец равен нулю по условию; остальные члены разделим на 0 и отбросим как бесконечно малые все те члены, в которых после этого сохранится бесконечно малый момент времени — 0. Получим соотношение между флюксиями:

$$3x^2\dot{x}-2ax\cdot\dot{x}+ay\cdot\dot{x}+ax\dot{y}-3y^2\cdot\dot{y}=0.$$

Этот метод Ньютон формулирует в виде правила:

1. Расположи по степеням переменных;
2. Умножь на члены арифметической прогрессии и на $\frac{\dot{x}}{x}$ или $\frac{\dot{y}}{y}$ соответственно:
3. Сумма произведений дает отношение между флюксиями

1.	$x^3 - ax^2 + ayx - y$	$-y + 0 + axy - ax^2 + x^3$
2.	$3\frac{\dot{x}}{x},\ 2\frac{\dot{x}}{x},\ \frac{\dot{x}}{x},\ 0$	$3\frac{\dot{y}}{y},\ 0,\ \frac{\dot{y}}{y},\ 0$
3.	$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + ax\dot{y}$	

Члены арифметической прогрессии можно заменить членами другой прогрессии вида $3+m$, $2+m$, $1+m$ для целочисленных m.

Дальнейшие усовершенствования дифференциального исчисления: дифференцирование неполиномиальных функций, отыскание экстремумов функций, геометрические и механические приложения — принципиальных трудностей для Ньютона не представили. Флюксии от иррациональных функций получаются по правилу дифференцирования сложной функции: например, если

$$z = \sqrt{ax - y^2},\ \text{то}\ z^2 = ax - y^2,\ 2z\dot{z} = a\dot{x} - 2y\dot{y};$$

$$\dot{z} = \frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2z} = \frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2\sqrt{ax - y^2}}.$$

В более сложных случаях он прибегал к представлению функций степенными рядами и к оперированию с этими рядами. Класс функций, которым располагал Ньютон, был еще сравнительно ограниченным; внутри него подобное представление функций не вызывало сомнений. Тем не менее соображения о сходимости ряда и о правомерности представимости той или иной функции рядом постоянно были в поле зрения Ньютона.

Обратная задача теории флюксий: нахождение соотношения между флюентами по известному соотношению между флюксиями — по своей постановке чрезвычайно обща. Она, как мы указывали, эквивалентна общей задаче об интегрировании любых дифференциальных уравнений. Подходы Ньютона к решению столь общей проблемы и приемы решения складывались постепенно.

Прежде всего простое обращение результатов нахождения флюксий дало ему огромное количество квадратур. Со временем он обнаружил необходимость дописывать при этом обращении аддитивную постоянную. Затем оказалось, что операция обращения даже сравнительно простых уравнений вида $M\dot{x} + N\dot{y} = 0$, получающихся при вычислении флюксий, не всегда возможна

и не дает исходную функцию. Ньютон обнаружил это, рассматривая те случаи, где $M=M(x, y)$ и $N=N(x, y)$ целые рациональные.

Когда непосредственное обращение прямого метода не приносит успеха, Ньютон прибегает к разложению функций в степенные ряды как к универсальному средству теории флюксий. Данное уравнение он разрешает, например, относительно $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ или (полагая $\dot{x}=1$) относительно $\dot{y}$ и разлагает функцию, стоящую в правой части, в степенной ряд, а затем этот ряд почленно интегрирует.

Для разложения функций в степенные ряды Ньютон использовал все результаты своих предшественников и накопил большой арсенал приемов. Среди них наиболее часто применялись:

а) Обобщение (индуктивное) теоремы о степени бинома $(a+b)^n$ на случай дробного и отрицательного показателя степени;

б) Деление (непосредственное) числителя дробно-рациональной функции на знаменатель;

в) Метод неопределенных коэффициентов в различных модификациях. Например, в уравнении $\dot{y}=1-3x+y+x^2+xy$ надо отыскать разложение y в ряд по степеням x, подставить этот ряд в правую часть вместо y и затем решать уравнение почленным интегрированием. Члены разложения будем отыскивать последовательно: $y=x+\ldots$ Подставим в правую часть и получим $\dot{y}=1-2x+\ldots$, откуда: $y=x-x^2+\ldots$ Подставим снова уже два члена разложения y в правую часть уравнения:

$$\dot{y}=1-2x+x^2+\ldots,$$

откуда

$$y=x-x^2+\frac{x^3}{3}+\ldots$$

Вычисления по методу неопределенных коэффициентов Ньютон располагал в таблицу вида:

$\dot{y}=$	$1-3x+y+x^2+xy$
	$1-3x+x^2$
y	$x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5+\ldots$
xy	$x^2-x^3+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{6}x^5+\ldots$
Сумма=	$1-2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{4}{30}x^5+\ldots$
$y=$	$x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{45}x^6+\ldots$

г) Замена переменных, в силу чего в ряд раскладывается не функция y, а удачно подобранная функция от y, а также замена системы координат.

д) Обращение рядов, которое лучше, по-видимому, пояснить на примере. Вычисляя длину дуги окружности ($R=1$, центр в начале координат), Ньютон получил элемент дуги, в переводе на привычную нам символику, $ds=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; ($s=\arcsin x$), или, используя биноминальную теорему $\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$, в виде ряда:

$$ds=dx\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\ldots\right).$$

Интегрируем почленно:

$$S=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\ldots$$

Задача состоит в отыскании ряда для обратной функции, т. е. $\sin x$.

Оборачивание Ньютон производит следующими этапами. Обрывает ряд:

$$S=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5}x^5\left[+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7+\ldots\right]. \qquad (1)$$

Полагает $x=s+p$. Отсюда

$$0=p+\frac{1}{6}(s^3+3s^2p+\ldots)+\frac{3}{40}(s^5+\ldots). \qquad (2)$$

Пробует: $p=A$, As, As^2. Очевидно, $A=0$ в этих случаях. Наконец, попытка $p=Bs^3$ дает

$$B+\frac{1}{6}=0. \quad B=-\frac{1}{6}.$$

Значит,

$$x=s-\frac{1}{6}s^3.$$

Следующий шаг: $p=-\frac{1}{6}s^3+q$. Подстановка в (2) дает

$$0=q+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}s^5+\ldots\right)+\frac{3}{40}(s^5+\ldots),$$

откуда

$$q=\left(\frac{1}{12}-\frac{3}{40}\right)s^5=\frac{1}{120}s^5.$$

Значит,

$$x=s-\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{120}s^5$$

и т. д.

Закон образования коэффициентов подмечается легко:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

Из обращенного ряда получается ряд для $\cos x$ ($\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$)

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$$

Аппарат представления функций степенными рядами, в который включаются, кроме упомянутых, много других частных приемов, является оперативной основой ньютоновой теории флюксий. Он позволяет проводить дифференцирование и интегрирование широкого класса аналитических функций, вычислять экстремумы функций, получить много примеров приложения методов теории флюксий к геометрии, механике и другим наукам. Насколько далеко продвинулся Ньютон в труднейших вопросах теории флюксий, показывает одно его письмо 1676 г., в котором он сообщает об условиях интегрируемости биномиального дифференциала. Последний: $y=az^{\vartheta}(e+fz^{\eta})^{\lambda}$ интегрируется, если а) $\frac{\vartheta+1}{\eta}$ или $\frac{\vartheta+1}{\eta}+\lambda$ целое положительное число.

Ньютон получил большинство результатов теории флюксий в течение 60—70-х годов XVII в. Однако он не спешил с публикацией написанных им на эту тему работ. Он неохотно давал согласие на публикацию даже тогда, когда вспыхнул спор о приоритете открытия дифференциального и интегрального исчисления между ним и Лейбницем. Более того, его знаменитые «Математические начала натуральной философии», появившиеся в 1686—1687 гг., оказались написанными без применения методов теории флюксий, хотя многие из приведенных в этой книге результатов первоначально были получены средствами этой теории.

Причиной такого положения дел была, помимо несовершенства методов решения обратных задач, недостаточная логическая обоснованность теории флюксий. Введение в математику переменных величин, оперирование с бесконечно малыми приводит к необходимости рационального объяснения большого числа связанных между собой основных понятий и проблем. Ньютон это хорошо понимал, но справиться с подобными затруднениями не мог.

Взгляды Ньютона на обоснование теории флюксий менялись. Выше мы указывали, что исходные позиции теории флюксий

лежат в механике. Это позволяет сдвинуть в механику противоречия, возникающие при толковании основных понятий этой теории. Однако оперативная сторона дела существенно предполагает отбрасывание бесконечно малых. Доказать законность такой операции, выявить таинственную сущность этих величин, не являющихся ни нулями, ни конечными величинами,— эта задача не решалась имевшимися в распоряжении Ньютона средствами.

В поисках выхода Ньютон создал метод первых и последних отношений — раннюю форму теории пределов. Он изложил его в «Математических началах натуральной философии», первый отдел первой книги которых так и называется: «О методе первых и последних отношений, при помощи которого последующее доказывается».

Метод состоит в рассмотрении предельных отношений едва-едва зарождающихся (первые отношения) или только-только исчезающих (последнее отношение) величин. Несмотря на неудачную терминологию, связанную с понятиями «едва-едва» и «только-только», Ньютон сумел изложить основные теоремы о пределах и бесконечно малых, лежащие и поныне в основании курсов математического анализа. Так, им доказаны теоремы о пределах отношений длины дуги непрерывной гладкой кривой к хорде и к касательной.

Понятие предела, в каком бы оно виде ни появлялось, есть понятие неалгоритмическое. С ним невозможно связать последовательность операций, эффективно приводящих к его нахождению. От условнооценочной трактовки предела (пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда найдем такое $\delta > 0$, что и т. д.) Ньютон тоже был далек; она приобрела права гражданства лишь в самом конце XIX в. Разрыв между оперативно-алгоритмической стороной теории флюксий и ее логическими основами остался неустраненным. Теория флюксий знаменовала тот этап развития анализа бесконечно малых, когда он, по выражению К. Маркса, «существует, а затем разъясняется», а в своих основах является таинственным, «мистическим». Дальнейшая судьба теории флюксий связана с острой борьбой, вспыхнувшей сразу же после появления этой теории именно вокруг ее основ.

Исчисление дифференциалов. Как было выше сказано, анализ бесконечно малых возник почти одновременно в двух разных, независимых друг от друга формах. Первой по времени изобретения была ньютонова теория флюксий. Однако первые публикации по математическому анализу были посвящены другому виду исчисления — исчислению дифференциалов.

Автор нового исчисления Г. В. Лейбниц (1646—1716) родился в Лейпциге в семье профессора местного университета по кафедре философии и морали. Образование получил в университетах

Лейпцига и Йены. Всю жизнь состоял на службе у германских государей: майнцского курфюрста, а затем ганноверского герцога. Выполняя дипломатические поручения, Лейбниц посетил Париж и Лондон, где вступил в научное общение с виднейшими учеными. За научные заслуги он был избран членом Лондонского королевского общества (1673) и Парижской академии наук (1700). Лейбниц основал Берлинскую академию, а также оказал положительное влияние на развитие науки в России: он был знаком с царем Петром I, переписывался и беседовал с ним, обсуждал проекты организации Академии наук в Петербурге и развертывания научных исследований в России.

Деятельность Лейбница весьма многообразна: он был видным дипломатом, политиком и ученым. Так же разнообразны и его научные интересы: естественные науки, физика, философия, право, литература и языкознание, математика были объектами его исследований, нередко весьма замечательных и предвосхищающих многие последующие открытия.

Математические работы Лейбница, которые нас интересуют в первую очередь, находятся в тесной связи с его философскими воззрениями. Мы не имеем возможности подробно описывать философские позиции Лейбница и их эволюцию от сочувствия механическому материализму до своеобразной разновидности метафизического объективного идеализма. Отметим лишь, что во всех различных по содержанию математических занятиях он исходил из одной цели. Цель эта философская: создание универсального метода научного познания, по терминологии Лейбница — всеобщей характеристики.

Всеобщая характеристика должна заменить все логические суждения исчислением, производимым над словами и другими символами, однозначно отражающими понятия. Она, таким образом, мыслится как некоторый общий логико-математический аппарат суждений. Математика при этом приобретает расширенное толкование как наука об отображении всевозможных видов связей и зависимостей простейших элементов. Современная Лейбницу математика должна была, по его замыслу, войти в будущую общую математику. Он видел идеал, по его словам, в «подчинении алгебры комбинаторному искусству, или буквенной алгебры общей буквенной науке, или науке о формулах, выражающих вообще порядок, подобие, отношение и т. п., или общей науки о количестве — общей науке о качестве, так что наша буквенная математика становится только замечательным образчиком комбинаторного искусства или общей буквенной науки».

Установление всеобщей характеристики и открытие закономерностей новой математики решит проблему научного дока-

зательства и устранит разногласия, так как вместо споров понадобится лишь произвести вычисления.

Зерна новой математики хранятся в старой. Последнюю нужно изучить, выбрать из нее и поставить проблемы, относящиеся к разработке бесконечных процессов, с которыми не может справиться алгебра, создать новые алгоритмы. Этим алгоритмам необходимо придать по возможности совершенную символику, отражающую сущность понятий или операций. Выбору символики Лейбниц придавал огромное значение: «Следует заботиться,— писал он,— о том, чтобы обозначения были удобны для открытий. Это большей частью бывает, когда обозначения коротко выражают и как бы отображают интимнейшую сущность вещей. Тогда поразительным образом сокращается работа мысли». Оперативное значение новых алгоритмов возрастет, если они будут механизированы.

Таковы в основном были исходные установки Лейбница. Они определили направление и характер его математических занятий, приведших к открытию дифференциального и интегрального исчисления.

До 1673 г., до поездки в Париж, Лейбниц много занимался комбинаторными задачами, видя в них математическую основу логики. В Париже он встречался с Гюйгенсом и тот ввел его в курс инфинитезимальных проблем математики. Гюйгенс же поставил перед Лейбницем ряд задач, связывающих эти проблемы с комбинаторикой. Решив одну из задач Гюйгенса о нахождении сумм чисел вида $\frac{1}{k(k+1)}$, Лейбниц нашел также суммы некоторых рядов. При этом он широко использовал паскалев арифметический треугольник и конечные разности высших порядков. В этот подготовительный период им были основательно проштудированы сочинения Декарта, Кавальери, Валлиса, Паскаля, Гюйгенса и др.

Примерно с этого времени в бумагах Лейбница все чаще встречается применение характеристического треугольника Паскаля для решения задачи о проведении касательной к кривой. При этом он постепенно приходит к мысли о возможности суммирования разностей (dx и dy), образующих стороны характеристического треугольника. К суммам этих малых разностей приводят и задачи о квадратурах. Лейбниц, усмотрев это обстоятельство, высказал предположение, что решение обратных задач на касательные полностью или в большей части можно свести к квадратурам. Таким путем, не зная работ Барроу и Ньютона, но, как и они, исходя из обратных задач на касательные, Лейбниц открыл взаимообратную связь между методами проведения касательных (в последующем операции дифференцирования) и квадратурами (позднее интегрированием). Тогда

же он высказал мысль, эквивалентную тому, что делал Ньютон, — что сводка результатов дифференцирования путем простого оборачивания может быть полезна при интегрировании функций.

Так, в чисто математическом плане лейбницево исчисление складывалось в общих чертах из следующих посылок:

а) Задачи суммирования рядов (с 1673 г.) и привлечение систем конечных разностей;

б) Решение задач о касательных, характеристический треугольник Паскаля и постепенный перенос соотношений между конечными элементами на произвольно, а затем бесконечно малые;

в) Обратные задачи на касательные, суммирование бесконечно малых разностей, открытие взаимообразности дифференциальных и интеграционных задач (примерно к 1676 г.).

Все эти годы Лейбниц предпринимал многочисленные попытки создать удобную символику. Он приходит к мысли о символе d (сокращение слова differentia — разность) для обозначения бесконечно малой разности. Вслед за Кавальери и Паскалем он представлял интеграл как сумму «всех» ординат, которых бесконечно много, и записывает его символом *omny* или чаще *omnl*. Позднее он заменил *omn* на $\int$, исходя из начальной буквы слова Summa. Взаимообразность задач он тоже старался отражать в символах : если $\int l = ax$, то $l = \frac{ax}{d}$. Вскоре он пришел к мысли, что лучше писать $d(ax)$; ведь «dx» это то же, что $\frac{x}{d}$, т. е. разность между ближайшими x. Но из $d(ax) = l$ получается, что дифференциал $d(ax)$ будто бы равен конечной величине l. Так постепенно выяснилась необходимость усовершенствовать символ интеграла, включив в него символ дифференциала аргумента: $\int y dx$.

Через посредство Ольденбурга (1615—1677), секретаря Лондонского королевского общества, Лейбниц завязал (1676—1677) переписку с Ньютоном. В письмах он сообщал свои результаты и стремился узнать больше о методах и результатах И. Ньютона. В основном речь шла о способах разложения функций в ряды и о решении обратных задач на касательные. Корреспонденты хорошо понимали друг друга, осознали близость своих целей и выводов. Без большого труда они разгадывали сущность методов, применяемых соперником. Переписка прекратилась, к сожалению, вскоре, так как Ньютон перестал отвечать на письма.

Казалось бы, эта переписка ускорит публикацию нового исчисления. Однако Лейбниц, как и Ньютон, не спешил с этим. Он работал над усовершенствованием методов исчисления и над обоснованием, стремясь оправдать его появление или логиче-

ски строгой дедукцией, или достаточно большим количеством новых результатов и практических достижений. Только в 1684 г. в лейпцигском журнале «Acta Eruditorum» Лейбниц опубликовал первый мемуар об анализе бесконечно малых: «Новый метод максимумов, минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины и особый для этого род исчисления».

Мемуар этот невелик, менее 10 страниц. В нем нет доказательств. Но дифференциальное исчисление в нем впервые на страницах научного журнала появляется как объект математического исследования в виде, во многом напоминающем современную его структуру.

Дифференциал аргумента — dx — принят за совершенно произвольную величину. Дифференциал функции — dy — определен равенством $dy=\frac{ydx}{S_t}$, где S_t— подкасательная к кривой в точке (x, y). Введены символы: dx и dy. Сформулированы правила дифференцирования постоянной величины, суммы функций, разности, произведения, частного, степени, корня. Отмечена инвариантность вида первого дифференциала от выбора аргумента. Дифференциалы понимаются вначале как величины, пропорциональные мгновенным приращениям величин. Правда, позднее дифференциалы вновь определяются как бесконечно малые разности.

Мемуар 1684 г. был трактатом о дифференциальном исчислении. Через два года, в 1686 г., вышло в свет другое сочинение Лейбница «О глубокой геометрии» («De geometria recondita»), в котором сосредоточены правила интегрирования многих элементарных функций. Для обозначения операции интегрирования введен символ $\int$, истолковываемый как сумма дифференциалов, а также подчеркнута его взаимообратность с операцией дифференцирования. В том же году Лейбниц разрабатывает основы теории соприкосновения кривых, вводит соприкасающийся круг и применяет его к измерению кривизны. При этом он допустил ошибку, полагая, что в общем случае этот круг и кривая имеют четыре совпадающих точки. Ошибку эту исправил в 1692 г. его последователь Яков Бернулли, показав, что в общем случае таких точек только три.

Анализ бесконечно малых вышел, таким образом, из стадии формирования и заявил о себе как о новой математической науке, сразу же продемонстрировав необычайную плодотворность. Активная пропаганда нового исчисления со стороны Лейбница и его учеников и последователей, среди которых сразу же выделились братья Бернулли: Яков (1654—1705) и Иоганн (1667—1748), способствовала также его бурному распространению. А поток новых открытий Лейбница не иссякал.

В 1693 г. он распространил новое исчисление на трансцендентные функции путем разложения их в ряды с помощью метода неопределенных коэффициентов. Эту группу результатов он изложил в статье с характерным для публикаций XVII и XVIII вв. длинным заголовком: «Дополнение практической геометрии, распространяющееся на трансцендентные проблемы с помощью нового наиболее общего метода бесконечных рядов».

В последующих работах Лейбница охвачены по существу все начальные отделы дифференциального и интегрального исчисления. Так, в 1695 г. он опубликовал правило дифференцирования общей показательной функции и формулу многократного дифференцирования произведения

$$d^m(xy)=d^m x\cdot d^0 y+\frac{m}{1}d^{m-1}x\cdot dy+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}d^{m-2}x\cdot d^2 y+\ldots$$

Тогда же ему удалось обобщить понятие дифференциала на случаи отрицательного и дробного показателя. В течение 1702—1703 гг. были разработаны приемы интегрирования рациональных дробей.

С помощью нового исчисления математикам конца XVII—начала XVIII в. удавалось решать быстро возрастающее число трудных и практически важных задач. Лейбниц и в этом роде деятельности проложил дорогу. В 1691 г., например, он установил форму, которую принимает подвешенная за концы тяжелая гибкая однородная нить, и вывел уравнение цепной линии. С 1696 г. его занимают новые задачи — вариационные. Он решил задачу о брахистохроне — кривой кратчайшего спуска, нашел метод решения задач о геодезических линиях.

Символика и термины Лейбница оказались очень хорошо продуманными; они были несложными и отражали существо дела, помогали пониманию и позволяли оперировать с ними по сравнительно простым правилам. Многие из них дошли до наших дней. От Лейбница ведут свое происхождение термины: дифференциал, дифференциальное исчисление, функция, координаты, дифференциальное уравнение, алгоритм (в смысле, аналогичном современному пониманию) и многие другие, а также большая часть символов. Практические успехи и разработанность исчисления достигли такого уровня, что в конце века (1696) появился первый учебник дифференциального исчисления и его приложений к геометрии: «Анализ бесконечно малых» Лопиталя.

Практическая ценность исчисления Лейбница, оперативная простота привлекали к нему внимание ученых. Оно быстро делалось центром всей математики, основным орудием исследования в руках ученых. Но в нем было слабое место: оставалось неясным, какое рациональное объяснение можно дать основным

понятиям, опирающимся на бесконечную близость, бесконечную малость или бесконечную протяженность процесса. В рукописях и статьях Лейбниц постоянно возвращается к нерешенной проблеме обоснования анализа бесконечно малых. Попыток он предпринял много, с самых разных исходных позиций. У него можно найти:

а) трактовку бесконечно малых как неархимедовых величин;

б) привлечение интуитивно воспринимаемой потенциальной бесконечной малости;

в) ссылки на античный метод исчерпывания и сведение всех трудностей к нему;

г) постулирование возможности замены отношения бесконечно малых отношением конечных величин;

д) неразвитые представления о пределе, стремлении к нему;

е) введение в рассуждения, в качестве опоры, непрерывности, будто бы присущей природе всех вещей.

Однако проблема обоснования анализа бесконечно малых оказалась не под силу Лейбницу, так же как и Ньютону. Основы этой важнейшей части математики, в которой следовали один за другим замечательные достижения, оставались невыясненными, таинственными. В области обоснования новый анализ в течение XVII в. и значительной части XVIII в. переживал «мистический», по меткому выражению К. Маркса, период.

Большое место в сочинениях по истории математики этого времени обычно занимает спор между последователями И. Ньютона и Г. В. Лейбница о приоритете открытия дифференциального и интегрального исчисления. В свое время так оно и было; спор приобретал напряженный характер, разрастался до размеров национального соперничества и ссоры, вовлекал в свою сферу огромное количество ученых и даже политических деятелей. Но не все, даже самые громкие споры, самые модные теории, защищаемые самыми фанатичными адептами, имеют в истории самое длительное существование и непреходящее значение. Законы истории неумолимо отражают именно содержательную сторону науки, ее соответствие экономическому строю человеческого общества, существенные связи. Поэтому мы вправе уделить упомянутому спору о приоритете лишь несколько фраз.

По-видимому, Ньютон и Лейбниц открыли свои формы исчисления независимо друг от друга. Оба опирались на опыт многочисленных предшественников, в котором накопилось достаточно предпосылок для их открытий. Оба отразили, исходя из разных посылок, общую потребность науки в анализе бесконечно малых. Ньютон, видимо, добился успеха раньше, Лейбниц — несколько позже. Однако приоритет в публикации, преимущества в удобстве алгоритмов и символов, заслуги в активной пропаганде нового исчисления принадлежат Лейбницу.

Появление в XVII в. аналитической геометрии, а затем дифференциального и интегрального исчисления создало к концу столетия новое положение в математике. Эти новые области заняли в ней ведущее место. Математика коренным образом изменила свою структуру, сделавшись математикой переменных величин.

Некоторые другие итоги математики в XVII в. В ряде лекций выбрано и показано главное, определяющее в богатом наследии математики этого замечательного столетия. Разумеется, главное не исчерпывает всего содержания; в нем еще много сторон, линий развития, не являвшихся в то время главными, но впоследствии оказавшихся весьма важными. Поэтому представляется необходимым упомянуть и о них, хотя бы кратко.

Алгебра в этом веке все более освобождалась от геометрических элементов. В ней окреп символический буквенный аппарат. Определилась основная научная проблематика; общая теория уравнений. В этой области можно отметить:

а) Постановку и некоторое продвижение проблемы приводимости алгебраических уравнений, т. е. представления целых рациональных функций с рациональными коэффициентами в виде произведения двух или большего числа аналогичных функций (см., например, Ньютон. «Всеобщая арифметика»).

б) Введение Лейбницем в 1693 г. начал теории определителей и правила, известного под именем Крамера. К слову заметим, что термин «детерминант» прослеживается только с 1815 г. (у Коши), а символ детерминанта — с 1841 г. (у Кэли).

в) Непрекращающиеся (но, разумеется, безуспешные) попытки найти решение в радикалах уравнений степени выше четвертой.

г) Попытки доказать основную теорему алгебры о числе корней алгебраического уравнения.

Геометрия существенно расширила свой состав. В нее вошла, как было показано выше, новая аналитическая геометрия, связавшая ее с алгеброй. Геометрические приложения анализа постепенно формируются в будущую самостоятельную математическую дисциплину — дифференциальную геометрию. Наконец, в XVII в. закладываются основы проективной геометрии. В 1636 г. Ж. Дезарг (1593—1662), французский инженер и архитектор, разрабатывая теорию перспективы, развил целую систему проективно-геометрических представлений: бесконечно удаленных элементов, инволюции и т. д. Проективные представления внесли в теорию конических сечений, кроме Дезарга, Б. Паскаль (1640), Ф. Лагир (1685).

Теория чисел обогатилась замечательными исследованиями Ферма, определившими дальнейшее ее развитие. В частности,

ему принадлежат сформулированные им без доказательства две теоремы:

а) Великая теорема Ферма: диофантово уравнение $x^n+y^n=z^n$, $n>2$ и целое, не имеет решений в натуральных числах. До сих пор она доказана только для небольших n ($n\leqslant 2521$); общего доказательства еще нет.

б) Малая теорема Ферма: если p — простое, a — целое, не делящееся на p, то $a^{p-1}\equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, т. е. $a^{p-1}-1$ делится на p. Первый дал доказательство этой теоремы, лежащей в основе теории сравнений, Л. Эйлер.

В 1665 г. Б. Паскаль впервые сформулировал принцип математической индукции. Он же, а также П. Ферма и Г. В. Лейбниц, о чем упоминалось выше, в ряде статей разработали основные понятия комбинаторики.

Теория вероятностей, в связи с задачами которой предпринимались комбинаторные исследования, в середине XVII в. вступила в стадию формирования как науки. Вероятностные соображения, в которых интуитивные представления о степени логической возможности дополнялись подсчетами теоретических частот, начали появляться в XVI в. Но только в сочинениях Паскаля, Ферма и Гюйгенса стало входить в обиход, в связи с задачей разделения ставки, понятие математического ожидания. По-видимому, в самом конце XVII в. Я. Бернулли открыл простейшую форму закона больших чисел (опубликовано в 1713 г.), завершив первый, по классификации А. Н. Колмогорова, этап истории теории вероятностей.

* *
*

Рубеж XVII и XVIII вв.— крайний пункт, где кончаются лекции первого семестра. Математика в своем многовековом развитии дошла к этому времени до такого уровня, когда начали формироваться дисциплины, составляющие ныне классическую основу современного высшего математического образования. История последних 200—250 лет гораздо более трудна, сложна и более близко касается не только подготовки, но и будущей деятельности математиков-специалистов. Этим и объясняется неравномерность распределения материала по семестрам:

а) от глубокой древности до XVII в. включительно (свыше 20 веков) — первый семестр;

б) XVIII—XIX и начало XX в. (200—250 лет) — второй семестр.