ГЛАВА I

УСЛОВИЯ И ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В XVIII в.

В истории математики XVIII век является периодом создания математики переменных величин. Начало этому периоду, как было показано в первом томе настоящей работы, было положено во второй половине XVII в. Развитие экономической и общественной жизни людей, связанное со становлением новой, капиталистической формации, стало приводить к этому времени к перестройке социальных, научных, культурных и других идеологических концепций. В области математики это выразилось в основном в том, что под давлением проблем математического естествознания и техники необычайно развились исследования, связанные с изучением движений, изменений, их скоростей и других аспектов переменных величин. К концу века в математику прочно вошли новые исчисления переменных, в особенности анализ бесконечно малых. Эти исчисления начали быстро занимать главное, основное положение в математике.

Процессы развития математики в ходе истории делаются все более и более сложными. К XVIII в. эта сложность и многосторонность достигли высокой степени. Поэтому в настоящей книге оказалось необходимым предпослать систематическому изложению истории математики в XVIII в. некоторые вводные замечания о том, в каких условиях развивалась математика в этом столетии и каковы были ее главнейшие особенности.

Исходные пункты математики XVIII в. В начале века математики в своих исследованиях могли исходить уже из весьма значительного конкретного материала. Его основу и наиболее актуальную часть составлял анализ бесконечно малых, возникший в Англии в виде ньютоновского исчисления флюксий, а на континенте Европы в виде лейбницевского исчисления дифференциалов. Их общность, а во многих частях и совпадение, были уже осознаны. Совокупность методов решения прямых задач этих исчислений, составляющих ныне основную часть дифференциального исчисления, была в основном создана. Дифференциальное исчисление заняло место одной из частей классической основы математического анализа. Появились первые учебники, систематически излагающие его методы и результаты (1696, Лопиталь. Анализ бесконечно малых).

В области обратных задач, т. е. интегрального исчисления, время подведения итогов еще не наступило, так как было сделано еще не так много. В области неопределенного интегрирования продолжалась разработка приемов интегрирования в элементарных функциях. Так, например, идея интегрирования дробно-рациональных функций при помощи разложения их на простейшие дроби была высказана Лейбницем лишь в начале XVIII в. (1702—1703). О перестройке интегрального исчисления на базе понятия определенного интеграла еще не могло быть и речи.

По мере накопления приемов интегрирования усиливалась потребность в исследовании простейших трансцендентных функций и в обогащении их класса. Геометрические методы исследования, основанные на изучении площадей и абсцисс, зависящих друг от друга определенным образом, оказывались недостаточными, негибкими. Их дополняли методы представления функций степенными рядами и усовершенствования символической формы их выражения.

Наряду с формированием основы математического анализа — дифференциального и интегрального исчисления — к началу века появились результаты и в его высших областях: теории дифференциальных уравнений, вариационном исчислении. Интегрирование первых обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, к которым приводили задачи математического естествознания, пробовали осуществлять с помощью лишь алгебраических и элементарных трансцендентных функций. Отдельные результаты были достигнуты. Однако вскоре математики убедились, что на таком пути решить сколько-нибудь широкий круг уравнений не удается. Задача была трансформирована и решение дифференциальных уравнений стали отыскивать в квадратурах.

Арсенал приемов интегрирования дифференциальных уравнений был еще невелик. В него входили: разделение переменных, отдельные случаи нахождения интегрирующего множителя, решение однородного уравнения первого порядка подстановкой $y=xt$. И. Бернулли в 1697 г. проинтегрировал уравнение, носящее теперь его имя,

$$dy + P(x)\,y\,dx = Q(x)\,y^n\,dx,$$

преобразовав его в линейное дифференциальное уравнение первого порядка с помощью подстановки $y=v^{\frac{1}{1-n}}$. Этот способ был, впрочем, известен также Лейбницу и Я. Бернулли. На рубеже века И. Бернулли сумел дать решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

$$Qx^n \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + Bx^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + Ax \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

понижая его порядок с помощью интегрирующего множителя вида x^p. Сколько-нибудь систематической разработки теории дифференциальных уравнений еще не было, но задача эта стояла как первоочередная.

В области вариационного исчисления математики XVII в. сумели накопить некоторый запас задач особого рода — вариационных, — осознать их своеобразие, найти решения ряда элементарных задач. Задача создания общего метода выдвинулась на первый план и в этой части математического анализа.

В ходе энергичной работы в различных областях математического естествознания быстро росло число задач, решаемых с помощью методов еще нового тогда анализа бесконечно малых. Крепла уверенность, что дифференциальные уравнения отражают если не все, то во всяком случае главнейшие закономерности природы. Решение дифференциальных уравнений представлялось многим ученым универсальным средством познания. Однако этот могучий арсенал приемов нес в своих основах неразрешенное противоречие между растущими практическими успехами и логической несообразностью, необоснованностью приемов оперирования с бесконечно малыми величинами и особенно отбрасывания их. Этому противоречию суждено было в скором будущем проявиться, и притом в резкой форме.

Алгебра, на которую опирался новый анализ, к концу XVII в. приобрела достаточно усовершенствованный буквенно-символический аппарат. Ее практические возможности, кроме решения в радикалах уравнений первых четырех степеней и некоторых приближенных методов, существенно расширились за счет установления многих фактов общей теории алгебраических уравнений и элементов теории определителей. Центральной проблемой алгебры сделалась проблема отыскания общего метода решения алгебраических уравнений любой степени. Понятие решения таких уравнений в значительной степени еще сливалось с задачей представления корней уравнений посредством той или иной комбинации радикалов.

Арифметические вычислительные методы к этому времени обогатились за счет использования логарифмов и соответствующих многочисленных таблиц. Начали появляться вспомогательные вычислительные устройства, среди которых наиболее совершенными были арифмометры Шиккарда, Паскаля, Лейбница и др. и логарифмические шкалы. Пестрота и разнообразие, неравномерность развития, всегда присущие науке в любой момент времени, в арифметике проявились в отставании понятия отрицательного числа и даже в неравноправном положении десятичных дробей сравнительно с обыкновенными.

В составе геометрии помимо элементарных частей и тригонометрии ученые XVIII в. могли использовать аналитическую геометрию, не очень еще совершенную, созданную в 30-е годы XVII в. Декартом и Ферма. К ней примыкала совокупность геометрических приложений дифференциального исчисления, впоследствии выделившаяся в особый вид геометрии — дифференциальную геометрию.

К началу XVIII в. накопился значительный запас сравнительно еще элементарных представлений теоретико-вероятностного характера. Начальные соображения ряда ученых, например Кардано и Тартальи о числе способов получения желаемого количества очков при игре в кости, Луки Пачиоли, относительно задачи разделения ставки, позволяли предвидеть возможность математического изучения случайных явлений. В последующем Паскаль, Ферма, Я. Бернулли и др. нащупали в хаосе случайных событий определенные количественные закономерности, из которых самой существенно важной была простейшая форма закона больших чисел. Вынужденная узость конкретного материала (азартные игры, отдельные таблицы с результатами наблюдений) и элементарность методов (арифметико-комбинаторных) воспринимались как временное и преодолимое препятствие.

Объем математических сведений, которыми должен был располагать квалифицированный математик конца XVII —

начала XVIII в., был, таким образом, довольно велик. Видимо, в силу именно этого обстоятельства, начиная со второй половины XVII в. начали появляться многотомные сочинения, имеющие целью охватить всю математику, изложить ее в целом, систематически. Например, в 1661 г. в Вюрцбурге вышел в свет однотомный «Курс математики или полная энциклопедия всех математических дисциплин» («Cursus mathematicus sive absoluta omnium mathematicarum disciplinarum Encyclopaedia») К. Шотта. Через 13 лет, в 1674 г., «Курс или мир математики» («Cursus seu mundus mathematicus») лионца Дешаля потребовал уже трех томов. Еще через 20 лет, в 1693 г., «Курс математики» («Cours des mathématiques», Paris) Озанама появился в пяти томах.

Тенденция к созданию единой системы математики в последующие века не ослабевала, являясь непременным спутником дальнейшего роста математики. В наши дни выразителем подобных устремлений является, например, многотомное (еще не завершенное) сочинение «Элементы математики», коллективный автор которого (группа математиков, преимущественно французских) выступает под общим псевдонимом Никола Бурбаки.

Об условиях развития математики в XVIII в. В настоящей книге нет возможности полно охарактеризовать условия, в которых развивалась математика в то время, и формы организации деятельности ученых-математиков. Экономическая и политическая история XVIII в. слишком для этого сложна. В экономическом плане она характеризуется решающей победой капиталистического способа производства. Вторая половина XVIII в. в странах Европы в основном уже может быть отнесена к эпохе промышленного капитализма.

Темпы развития науки в это время быстро нарастают. Промышленная революция, образование мирового рынка, связанные с этим нужды мореплавания, кораблестроения, военной техники, теплотехники, гидроэнергетики и т. п., практические нужды общества ставят перед наукой быстро усложняющиеся задачи. Помимо задач механики и астрономии перед физико-математическим комплексом наук встали проблемы создания математического аппарата исследований электромагнитных явлений и теплоты.

Решение научно-технических и даже просто научных задач становится делом государственной важности. Таблицы положений луны, солнца, звезд, проблема изобретения хронометра высокой точности, показания которого не зависели бы от качки корабля, нахождение методов отображения сферы на плоскость как важнейшая часть картографии и др. приобретают необычайную актуальность, срочность. В то же время владение средствами нового анализа создает обстановку *возможности* решения подобных задач, их доступности усилиям ученых.

Для целей научного исследования в крупнейших городах Европы создаются специальные учреждения — академии наук, субсидируемые государством. Постепенно возрастает роль высших учебных заведений, ставшая особенно заметной к концу XVIII в., в эпоху Великой французской буржуазной революции. В обществе появляется заметная прослойка ученых-профессионалов, в том числе профессионалов-математиков, главным делом жизни которых являются научные исследования и преподавание. В связи с этим происходит заметная демократизация состава ученых. В самом деле, например, величайший математик XVIII в. Л. Эйлер был сыном сельского пастора, Ж. Л. Лагранж происходил из семьи офицера, П. С. Лаплас и М. В. Ломоносов — крестьянского происхождения, Ж. Даламбер не имел родной семьи. Число подобных примеров можно значительно увеличить.

Изменение содержания математики. В течение XVIII в. существенно изменилось содержание математики. Характеристике этих изменений мы посвятим несколько следующих глав. Поэтому здесь мы ограничимся лишь несколькими замечаниями вводного характера.

Самые большие, коренные изменения произошли в математическом анализе. Во много раз увеличилось количество входящих в него фактов. По своему содержанию анализ трансформировался. Из метода, придуманного для решения определенного класса задач, он преобразовался в анализ функций, приобрел структуру, близкую к современной. В течение XVIII в. от классического анализа постепенно отпочковался ряд дисциплин, получивших самостоятельное развитие. В первую очередь приобрела самостоятельность теория дифференциальных уравнений, наиболее интенсивно разрабатываемая в силу ее практической ценности. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений получила систематическое развитие, начиная с работ И. Бернулли и особенно Д. Риккати. В то же время ряд практических задач выдвинул проблему решения уравнений с частными производными. Первые успехи были достигнуты в решении задач о колебаниях струны, мембраны, столба воздуха в трубе и т. п. Поэтому наиболее ранние теоретические успехи относятся к методам интегрирования уравнений гиперболического типа.

На базе расширения понятия функции на область комплексного аргумента, широкого применения разложения функций в ряды начала создаваться теория функций комплексного переменного. В ней был открыт ряд фактов, в том числе формулы Муавра и Эйлера. Открытие и применение конформного отображения существенно продвинуло эту область анализа и еще больше подчеркнуло ее своеобразие.

Геометрические приложения анализа также выделились в самостоятельную дисциплину — дифференциальную геометрию. Крупнейшие ученые эпохи — Эйлер, Клеро, Монж, Менье и др. — работали в этой области, стремясь создать общую дифференциально-геометрическую теорию, способную исследовать пространственные объекты: пространственные кривые и поверхности.

Из совокупности методов решения класса вариационных задач сложилось особое исчисление — вариационное. Вначале его составляли только так называемые прямые методы, созданные Эйлером. Во второй половине века было открыто исчисление, основанное на введении нового понятия — вариации.

Кроме этих больших направлений в анализе получили серьезное продвижение: теория рядов, исчисление конечных разностей, теория специальных функций и др.

Структура математики, разумеется, не исчерпывалась в то время анализом бесконечно малых со всеми его, теперь уже многочисленными, ответвлениями. Настойчивые попытки исследования общей теории алгебраических уравнений привели к разработке теории детерминантов, теории делимости многочленов, линейной алгебры и др. В самом конце столетия, в 1799 г., появилась замечательная книга Руффини «Общая теория уравнений, в которой доказывается невозможность алгебраического решения общих уравнений выше четвертой степени». Доказательство было не совсем строгим, но в нем были новые идеи, вводящие в современную нам алгебру. Руффини, в частности, ввел понятие группы операций и фактически связал некоторые свойства группы с проблемой разрешимости уравнений в радикалах.

Весьма существенно пополнилась совокупность геометрических дисциплин. В нее уже входила аналитическая геометрия, принявшая к середине века облик, весьма близкий к современному нам как по символике, так и по объему. Вместе с учением о перспективе сложилась к концу века начертательная геометрия, ставшая тотчас же важнейшей частью высшего технического и математического образования. Привлекали интерес ряда ученых проективно-геометрические идеи Дезарга, что подготовило почву для Понселе, который в начале XIX в. создал стройное здание проективной геометрии. Весьма интересные исследования проводились в области тригонометрии и элементарной, или, точнее говоря, синтетической геометрии.

В настоящем перечне составных частей комплекса математических наук XVIII столетия нельзя обойти молчанием теорию чисел. Несколько обособленное положение этой дисциплины не мешало тому, что она постоянно находилась в центре внимания крупнейших ученых, прилагавших огромные усилия для решения ее трудных, но заманчиво просто сформулированных задач. Как мы покажем далее, XVIII век многое дал теории чисел: найдено общее решение неопределенных уравнений второй степени, сформулирован закон взаимности для квадратичных вычетов, доказана иррациональность π и e и т. д. Наконец, в XVIII в. было положено начало научной разработке теоретико-вероятностных проблем, еще тесно сплетенных с задачами элементарного комбинаторного анализа.

Мы специально предприняли составление этого перечня, чтобы читатель смог уже в первом приближении представить себе тот факт, что математика XVIII в. далеко развила основные идеи математики прошлого века. Период создания математики переменных величин охватывает и этот век, но весь облик математики, уровень ее развития уже таковы, что совсем не походят на математику предыдущих столетий.

В первых шести главах, посвященных истории математики в XVIII в., мы будем касаться только развития математики в странах Европы. Мы вынуждены поступать так потому, что буржуазно-капиталистическая Европа в развитии экономики и науки находилась в то время на первом месте в мире. Успехи математики в Европе несравнимо более значительны в это время, чем на любом другом континенте.

Из европейских государств наибольшую активность в математике мы наблюдаем во Франции, где творили Даламбер, Лагранж, Лаплас, Монж, Лежандр и многие другие выдающиеся математики. Мы будем также часто обращаться к работам английских математиков — Тейлора, Маклорена, Стирлинга, немецких — Ламберта, Гаусса и др. Ведущее место в математике XVIII в. занимала и Россия благодаря деятельности Л. Эйлера, Д. Бернулли и других петербургских академиков.

Об условиях развития математики в России. Начало XVIII в. было для нашей родины временем быстрого преодоления исторически обусловленной многовековой отсталости. Реформы Петра I были направлены на реорганизацию армии и флота, создание промышленности, переделку государственного аппарата, налаживание системы подготовки необходимых специалистов. Эти реформы быстро и энергично проводились в жизнь.

Так, например, в 1701 г. была открыта навигацкая школа (морское училище), в 1711—1712 гг. — артиллерийская школа. С 1714 г. во многих крупных городах России были организованы так называемые цифирные школы, имеющие целью привить учащимся элементарную математическую грамотность. В следующем, 1715 году начала работать Морская академия.

Первое научное учреждение России — Петербургская академия наук — было создано в 1725 г. Как составная часть Академии существовали гимназия и университет, готовившие кадры, в которых остро нуждалась страна. Для ведения научной работы и подготовки отечественных специалистов были приглашены из других стран молодые талантливые профессора. В Петербург приехали и математики: сыновья Я. Бернулли — Даниил и Николай (последний вскоре, в 1726 г., скончался), ученик Я. Бернулли — Я. Герман, бывший ранее профессором в Падуе, а затем во Франкфурте-на-Одере. Немного времени спустя приехал совсем юный уроженец Швейцарии Л. Эйлер, нашедший в России вторую родину.

Молодая Академия быстро завоевала международную известность. В первом же выпуске научного журнала «Комментарии Петербургской академии наук» (за 1726 г.; опубликовано в 1728 г.) содержались важные статьи об интегрировании дифференциальных уравнений. Со второго тома в «Комментариях» начал публиковать свои работы Эйлер. В третьем томе был помещен важный мемуар Д. Бернулли о колебании струны, в котором решение было дано в виде тригонометрического ряда.

В 15 томах этого научного журнала Академии наук, вышедших в период 1728—1802 гг., и в других ее изданиях этого же периода было опубликовано более 700 научных статей и книг по теоретическим и прикладным вопросам математики. Многие из этих работ оказали большое влияние на развитие науки. «Не могу Вам довольно объяснить, с какой жадностью повсюду спрашивают о петербургских мемуарах», — писал Эйлеру в 1734 г. Д. Бернулли, который к тому времени уже возвратился на родину.

Однако своеволие временщиков и цариц, интриги и взаимная вражда царедворцев тяжело сказались на Академии. Внутри нее велась тяжелая борьба за воспитание национальных научных кадров, проводимая М. В. Ломоносовым (1711—1765). Без кадров захирели и были закрыты гимназия и университет при Академии. Большие трудности переживал и Московский университет, основанный в 1755 г. по инициативе Ломоносова.

Славой и гордостью нашей отечественной науки в области математики являлся в то время Л. Эйлер. Он напечатал огромное число книг и статей, воспитал большое число учеников, ставших позднее академиками. Его значение в истории математики было исключительно велико. Приведем краткие биографические сведения о нем.

Леонард Эйлер (1707—1783) — уроженец г. Базеля (Швейцария). Его отец — Пауль Эйлер — был небогатым пастором. В молодые годы он увлекался математикой, изучал ее под руководством Я. Бернулли. Своему сыну он прочил тоже духовную карьеру. Однако в Базельском университете Леонард увлекся математикой, слушал лекции И. Бернулли и регулярно занимался с ним. Он блестяще окончил университет, получил ученую степень магистра, но работы найти не мог.

Его друзья, сыновья И. Бернулли — Даниил и Николай, уехали в 1725 г. в Петербург. По их рекомендации получил приглашение работать в Петербургской академии наук и Л. Эйлер. Вакантным, правда, было место на кафедре физиологии, но это не смущало молодого ученого. Все-таки работа! В мае 1727 г. он приехал в Россию и прожил здесь 14 лет (до 1741 г.).

Физиологией заниматься не пришлось. Эйлеру предоставили возможность вести исследования в области физико-математических наук. Он с огромным рвением принялся за научную и педагогическую работу. За это время он опубликовал свыше 50 и подготовил к печати 80 научных работ по анализу, теории чисел, дифференциальным уравнениям, астрономии. В том числе появилась в 1736 г. двухтомная «Механика», включающая механику точки. Эйлер выполнял многочисленные государственные задания. В 1738 г., во время напряженной работы над составлением географических карт России, он потерял зрение на один глаз. Но научная деятельность его разрасталась и ускорялась. У него появи-

Л. Эйлер
1707—1783

лись талантливые ученики: Котельников, Румовский, Фусс, Головин, Сафронов и др. Авторитет Эйлера быстро рос, рос авторитет и Петербургской академии.

Однако в Петербурге работать было неспокойно. Тревожная политическая обстановка, о которой мы упоминали выше, пугала Эйлера. В 1741 г. он принял предложение переехать в Берлин во вновь организуемую Академию наук. В Берлине он проработал до 1766 г. в должности вице-президента и директора математического отделения. За это время он написал около 300 научных работ, книг и статей. Примерно половину их он отправлял для публикования в Петербург, где по-прежнему числился почетным академиком и откуда получал деньги. Эйлера тянуло обратно в Петербург. Он вел оживленную переписку с Россией, поддерживал Ломоносова, помещал у себя в доме и учил молодых ученых, приезжавших из Петербурга, закупал научные инструменты, давал отзывы.

Наряду с огромным количеством статей Л. Эйлер в берлинский период жизни написал ряд монографий, в которых в систематическом виде излагал современное состояние математических наук. В 1744 г. он написал трактат о вариационном исчислении, новой, открытой им области математики. В 1748 г. вышло в свет «Введение в анализ бесконечно малых», а в 1755 г. — «Дифференциальное исчисление». Так было положено начало громадной работе Эйлера по приведению в систему необычайно разросшегося математического анализа. Как продолжение написанной в Петербурге «Механики» в 1765 г. выходит «Механика», посвященная движению твердого тела.

Наконец, Эйлер преодолел сопротивление прусского короля, преодолел сопротивление Шумахера — всемогущего в то время секретаря Петербургской академии — и стоящей за ним группы и в 1766 г. со всей семьей переехал в Петербург. Здесь он был окружен почетом и мог, казалось бы, спокойно жить, умеренно работая. К тому же, преклонный возраст и почти полная потеря зрения вынуждали знаменитого математика к покою.

Но необычайная научная активность Эйлера продолжалась. Во второй петербургский период он представил в Академию еще 416 книг и статей, диктуя их своим ученикам. Академия не успевала публиковать труды Эйлера. Они печатались в изданиях Академии в течение 80 лет после его смерти (до 1862 г.). Среди работ этого периода особенно много больших монографий, в которых приводятся в систему различные области математики и смежных дисциплин. В течение 1768—1770 гг. вышли в свет три тома «Интегрального исчисления», включающие в себя кроме методов интегрирования функций теорию дифференциальных уравнений обыкновенных и в частных производных, а также вариационное исчисление. В те же годы появились: двухтомный трактат об алгебре, трехтомное сочинение натурфилософского характера, написанное в форме «Писем о разных физических и философических материях, писанных к некоторой немецкой принцессе». Второй петербургский период жизни Эйлера дал науке кроме указанного и другие большие сочинения: диоптрику в трех томах, новую теорию исчисления лунной орбиты (1722), теорию кораблестроения и навигации (1778) и др.

Научное наследие Эйлера огромно. Им написано свыше 850 сочинений, среди которых свыше 40 больших, нередко многотомных, монографий. На родине Эйлера, в Швейцарии, было предпринято в 1909 г. издание полного собрания его сочинений. Рассчитано, что оно должно составить 72 огромных тома большого формата. Однако в течение 50 лет вышло 42 тома, а материал, предназначенный для опубликования, убавился едва на половину. Кроме того, в Ленинграде, Берлине и в других городах хранится свыше трех тысяч писем из научной переписки Эйлера; многие письма по существу являются научными работами. Опубликована же лишь небольшая часть этой переписки.

Научные работы Эйлера охватывают практически всю современную ему математику. Во всех областях математики он сделал выдающиеся открытия, ставившие его на первое место в мире. Ему было доступно понимание математики как единого, хотя и огромного целого. В нем он привел в систему главнейшие отрасли, и прежде всего анализ со всеми его ответвлениями. Лаплас указывал, что Эйлер был общим учителем для всех математиков второй половины XVIII в.

Научная деятельность Эйлера в основном имела алгоритмическую направленность. К построению общей теории он приходил, отправляясь от конкретных, имеющих сплошь и рядом практическое значение задач. В его научном наследии исключительно велик удельный вес практики. Примерно 40% его работ посвящено прикладной математике, физике, механике, в том числе небесной механике, гидромеханике, теории упругости, баллистике, кораблестроению, теории машин, оптике и др. Черты алгоритмичности присущи и его чисто, казалось бы, теоретическим работам. Особенно это заметно в трудах по анализу бесконечно малых, который по существу строился им как математический аппарат классической механики и физики.

Нет возможности перечислить хотя бы главные открытия и научные достижения Эйлера. Их слишком много. Характеризовать их означало бы практически характеризовать всю математику XVIII в. В трудах Эйлера содержится ряд глубоких идей, получивших дальнейшее развитие лишь через несколько десятков лет. Например, он частично предварил исследования К. Ф. Гаусса по внутренней геометрии поверхностей. В 1758 г. он доказал теорему о топологической (эйлеровой) характеристике многогранников, положив начало накоплению фактов топологии. Ему принадлежит первое использование методов анализа в решении теоретико-числовых задач и создание аналитической теории чисел. Теоремы и формулы, методы и символы, носящие имя Эйлера, часто встречаются в математике и в наши дни, занимая в ней важное место.

Многие открытия Эйлера переоткрывались после его смерти другими учеными. Особенно много таких переоткрытий встречается в теории дифференциальных уравнений. Например, задачу о колебаниях круглой мембраны Эйлер свел еще в 1766 г. к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами. Теперь это уравнение носит имя Бесселя, немецкого математика и астронома XIX в. К слову, решение, данное Эйлером этому уравнению, представляет собой бесконечный ряд, выражающий цилиндрические функции первого рода и любого порядка (цилиндрические функции нулевого порядка появились в мемуаре Д. Бернулли о колебаниях гибкой нити, подвешенной за один конец). Примеров подобного рода переоткрытий можно привести очень много.

Научные заслуги Эйлера и его учеников выдвинули Петербургскую академию наук на одно из первых мест в мире. Россия сделалась одним из центров математических исследований. Педагогическая деятельность Эйлера, его учеников, подготовка новых кадров в университетах: Петербургском академическом (существовал до 1783 г.) и особенно в Московском (организован в 1755 г.) — создали условия для широкого развертывания сети высших учебных заведений России и роста математически образованных кадров в следующем XIX столетии.

Перейдем к характеристике развития отдельных математических наук.