*ГЛАВА II*

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОСНОВ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ В XVIII в.

Еще при жизни И. Ньютона и Г. В. Лейбница сделалось очевидным, что недавно открытые исчисления флюксий и дифференциалов явились лишь преддверием новой области математики, ее элементарной частью. Содержание анализа бесконечно малых (как стали называть эту область математики) фантастически быстро пополнялось новыми фактами. Операции дифференцирования и интегрирования оказывались применимыми ко все более широкому классу функций. Соответственно расширились возможности приложения анализа бесконечно малых. В свою очередь практические потребности вынуждали распространять операции анализа на быстро возрастающий класс функций. В сущности самой главной трудностью в развитии анализа бесконечно малых оказывалась необходимость такого представления функциональных зависимостей, которое позволяло бы применять к ним операции нового исчисления. Поэтому оказывалось все более необходимым исследовать смысл понятия функции, дать классификацию всех известных функций и найти способы оперирования с ними. Задача создания теории функций сделалась первой, предварительной задачей анализа бесконечно малых. Эйлер писал, что весь анализ бесконечно малых вращается вокруг переменных величин и их функций.

Монографии XVIII в., посвященные систематическому изложению анализа, ярко отразили эту особенность его развития. В них, как правило, дифференциальному и интегральному исчислению были предпосланы специальные введения или даже книги, содержащие анализ функций. Типичным и наиболее совершенным образцом, которому следовали математики XVIII в., является серия книг Л. Эйлера.

Старая идея систематического изложения всей современной математики, позволяющего осмыслить ее как единую науку, нашла в Л. Эйлере своего последователя. Он понимал, что гигантский рост математики уже не позволит осуществить эту идею в одном сочинении. Поэтому Л. Эйлер предпринял написание серии монографий, освещающих современное состояние отдельных частей математики. Анализу бесконечно малых он посвятил следующие книги:

а) Введение в анализ бесконечно малых — 2 тома, изд. 1748 г. б) Дифференциальное исчисление—2 тома, изд. 1755 г. в) Интегральное исчисление — 3 тома, изд. 1767—1770 гг. (4-й том, вышедший в 1794 г., после смерти Л. Эйлера, был составлен из ряда его работ).

Эти классические, без всякого преувеличения, сочинения отразили состояние анализа в XVIII в. и послужили образцом для последующих аналогичных трудов на несколько десятилетий, практически до начала следующего, XIX, столетия. Первый том «Введения в анализ...» Эйлера был посвящен учению о функциях, об их классификации, свойствах, способах разложения функций в бесконечные ряды и произведения, в непрерывные дроби и в суммы простых дробей.

**Анализ функций.** Понятие функции имеет два аспекта: функции как соответствия и как аналитического выражения. Интуитивное восприятие функциональной зависимости как проявления причинной связи явлений в различных модификациях свойственно человечеству с давних времен. Большую историю имеют также попытки выражения этих зависимостей средствами математики. Одними из первых попыток являлись: учение античных математиков о геометрических местах и составление многочисленных таблиц. В дальнейшем совокупность средств математического выражения функций обогащалась. В нее входили: символический аппарат диофантова анализа, алгебраические и тригонометрические функции, логарифмы и другие конкретные данные о тех или других функциях или классах функций.

Общая идея функции как соответствия сравнительно общей природы была с большой силой подчеркнута Декартом. Однако возможность оперирования с функциями неизбежно связывалась с их конкретными выражениями: средствами геометрии или аналитическими символическими выражениями. И. Ньютон к этому добавил механическую трактовку функции, в своей теории флюксий. Оперативная часть этой теории основывалась, как известно, на разложениях функций в степенные ряды. В свою очередь Лейбниц выразил общую идею функциональной зависимости, введя термин «функция» и соответствующий символ для всех отрезков, связанных с кривой, и таких, что длина их зависит от положения точки на кривой (ординаты, отрезки касательных, подкасательных, нормалей, поднормалей).

Практические успехи анализа бесконечно малых побуждали ученых обращать бóльшее внимание на такую трактовку понятия функции, которая способствовала бы оперированию с конкретными функциями. Эту тенденцию весьма отчетливо выразил в 1718 г. И. Бернулли, предложивший считать, что функция есть просто аналитическое выражение. На ту же господствующую в то время позицию встал и Эйлер, дав следующее определение функции: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел, или постоянных количеств» [1].

Чтобы придать этому определению наибольшую возможную общность, Эйлер допускал как действительные, так и мнимые значения аргумента. Функция, понимаемая просто как аналитическое выражение, образуется у Эйлера с помощью класса допустимых операций, в который входят: арифметические действия, степени, корни, решения алгебраических уравнений. К ним Л. Эйлер присоединил элементарные трансцендентные функции: $e^z$, $\ln z$ и тригонометрические функции. Наконец, в класс допустимых операций было включено интегрирование.

Классификация функций производится, в соответствии с определением этого понятия, в основном, по виду их символических выражений (см. рис. 1). Эйлер дополнил этот принцип классификацией функций по их свойствам. Так, он вводит однозначные и многозначные, четные и нечетные функции, показывает, каковы символические признаки наличия или отсутствия того или иного свойства, учит читателя определять, какие из свойств функции сохраняются при производстве той или иной операции, а какие — не сохраняются. Классификация функций Эйлера означала новый этап восприятия этого понятия, отличающийся сравнительно большой общностью. Однако отодвигание на второй план общего понятия функции как соответствия, опора только на

[1] Л. Эйлер. Введение в анализ бесконечно малых, т. I. Физматгиз, М., 1961, стр. 5.

аналитико-оперативную практику, определили ограниченность понимания функции даже Эйлером.

Все функции мыслятся у него представимыми степенным рядом

$$f(z) \sim a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

(где $z$, вообще говоря, комплексное). Следовательно, представление о всех функциях было по существу еще ограничено классом аналитических функций. Такое заблуждение вполне

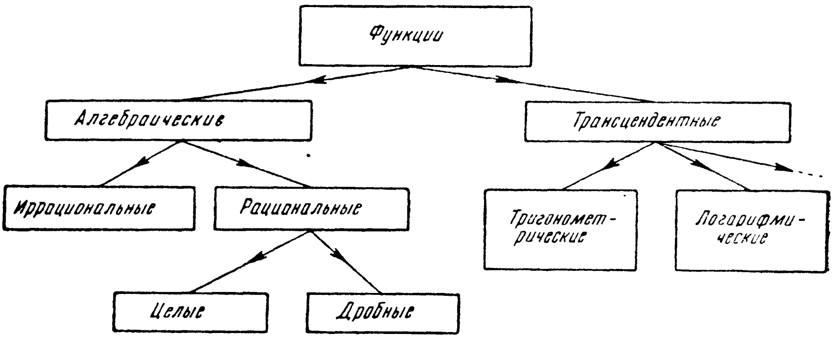



Рис. 1

объяснимо. Значительно позднее выяснилось, что поскольку к аргументу применяются только операции указанного выше класса, то и в результате будут получаться только функции аналитические всюду, кроме, может быть, изолированных особых точек, причем аналитичность сохранится и в сколь угодно малой окрестности этих точек, где функция допускает разложения в обобщенный степенной ряд. Поведение функции в малом участке определяет, по Эйлеру, поведение ее в целом, что свидетельствует о существовании у него в то время идеи аналитического продолжения.

Из того же определения функции как аналитического выражения выросло своеобразное определение непрерывности. Функция считалась непрерывной, если она задана на всей области существования единым аналитическим выражением. Так, непрерывными оказывались функции: $y = \frac{1}{x}$, $y = \operatorname{tg} x$ и т. п. Свойство непрерывности функции в смысле, привычном для нас, называлось связностью функции.

Разумеется, наряду с описанной концепцией понятия функции как аналитического выражения в работах Л. Эйлера, Ж. Даламбера и других математиков XVIII в. можно найти и другие определения. Возможны и другие трактовки этого понятия, отражающие ту мысль, что соответствие является его основным признаком. Однако представление функции как аналитического выражения было доминирующим.

Основным средством, позволяющим приводить функции к виду, удобному для оперирования с ними, было разложение их в степенные ряды. Опыт подсказывал математикам, что в ряды разложимы все известные им функции. Исключения из этого общего правила появились в основном позднее; в то время они были слишком немногочисленны, чтобы изменить сложившиеся представления и существенно повлиять на структуру теории функций. Поэтому после классификации функций и введения основных понятий в теории функций XVIII в. непосредственно следуют разделы оперативного характера, куда входят методы разложения функций в ряды и свойства последних.

В своем «Введении в анализ» Эйлер разработал многообразный аппарат изучения функций с помощью степенных рядов. Он изучил последовательно классы функций: рациональных, дробнорациональных, иррациональных, где особенно интересна система остроумных подстановок, устраняющих иррациональность. Затем следуют методы разложения в ряд показательных и логарифмических функций. Здесь впервые вводится и полностью разъясняется определение логарифма положительного числа как показателя степени, при возведении в которую выбранное основание дает заданное число: если $a^x = N$, то $x = \log_a N$. Затем выведена формула:

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i,$$

которая в более поздней символике записывается так:

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

(здесь у Эйлера $i$ — бесконечно большое число. Символ $i$ — начальная буква слова infinite).

Тригонометрические функции также вводятся аналитически. Их определения уже не связываются столь тесно с геометрическим образом круга. В результате исследования их свойств выводится формула Эйлера

$$e^{\pm vi} = \cos v \pm i \sin v,$$

где $i$ — мнимая единица. Формула выведена в характерной для того времени манере: вначале приводится формула Муавра:

$$(\cos z \pm i \sin z)^n = \cos n z \pm i \sin nz,$$

а отсюда

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2},$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin nz)^n}{2i}.$$

Принимая $z$ за бесконечно малое, $n$ за бесконечно большое, причем отношения между $z$ и $n$ таковы, что их произведение конечно: $nz \to v$, а также, что при этом

$$\cos z \to 1, \quad \sin z \to z = \frac{v}{n},$$

Эйлер находит

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2},$$

$$\sin v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}.$$

Откуда уже следует искомая формула:

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v.$$

Кроме разложения функций в ряды Эйлер разработал метод представления функций бесконечными произведениями, как, например:

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{25\,\pi^2}\right)\ldots$$

Эти разложения были применены для упрощения вычисления логарифмов тригонометрических функций.

Для нужд интегрального исчисления в теории функций были собраны методы представления функций в виде суммы элементарных дробей. Наконец, для изучения свойств функций Эйлер применил аппарат непрерывных дробей. Было открыто также много фактов, полезных для будущей теории функций комплексного переменного. Например, Даламбер и Эйлер в работах по гидродинамике показали, что эти функции имеют вид: $w = u + iv$ и что действительная и мнимая часть таких функций удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Даламбер в 1752 г., а Эйлер в 1755 г. показали, что эти условия достаточны для аналитичности функции $w$. Позднее (в 1777 г.) Эйлер доказал и необходимость этих условий, ныне ошибочно (в некоторых книгах) носящих название условий Коши—Римана.

В течение 30—40-х годов XVIII в. главным образом благодаря Эйлеру была разработана и систематизирована теория элементарных аналитических функций. Она тотчас же повлекла поток открытий, сопровождавшихся большими и страстными спорами. Особенно много споров вызывала трактовка функций комплексного аргумента.

Большое значение имел в этом плане спор о природе логарифмов комплексных чисел, начатый еще Лейбницем и И. Бернулли. Первый утверждал, что эти числа — мнимые, тогда как И. Бернулли отстаивал утверждение, что эти числа действительные. В 1749 г. Эйлер правильно решил этот вопрос. Он заметил, что значение $y = \ln x$ определяется из равенства

$$x = e^y = \left(1 + \frac{y}{i}\right)^i, \quad i = \infty.$$

Отсюда

$$x^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{y}{i}; \quad y = i\left(x^{\frac{1}{i}} - 1\right),$$

что соответствует в современных обозначениях:

$$y = \ln x = \lim_{n \to \infty} n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Так как $x^{\frac{1}{i}}$, т. е. «корень с бесконечно большим показателем $i$», продолжает Эйлер, имеет бесконечно много разных значений, вообще говоря мнимых, то и логарифм имеет бесконечно много значений, вообще говоря мнимых. Однако споры не утихали, так как не была выяснена их основа: сущность понятия комплексного числа. Мы вернемся к этому вопросу еще раз в главе X.

Неясность существовала и в вопросе о соотношении объемов классов аналитических и аналитически выразимых функций. Эйлер, как было сказано выше, считал их равносильными; всякое аналитическое выражение представимо рядом. Это убеждение разделяло подавляющее большинство математиков XVIII в. Даже в 1797 г., на рубеже XIX в., Лагранж пытался построить теорию аналитических функций, опирающуюся на утверждение, что всякая функция всюду, за исключением, быть может, отдельных значений аргумента, представима рядом Тейлора.

Накопившийся запас представлений о способах выражения функциональных зависимостей начал приходить, однако, в противоречие с этой концепцией. Тому же Эйлеру пришлось рассматривать и более общие классы функций, как было указано выше. Так, ему принадлежит идея рассмотрения функций, геометрически выраженных линиями, начерченными свободным движением руки. При этом неизбежно встала задача о соотношении объема данного класса и класса непрерывных (в смысле Эйлера) функций. Эйлер считал, что последний класс, по-видимому, беднее, потому что существование аналитической формулы определило бы однозначное аналитическое продолжение. Функции же, образованные свободным движением руки, не имеют такого ограничивающего условия.

Толчком к рассмотрению указанных проблем послужили задачи математической физики, в особенности задача о колебании струны. Этой принципиально важной задаче уделяли большое внимание еще в XVII в. многие ученые: Галилей, Мерсенн, Декарт, Гюйгенс и др.

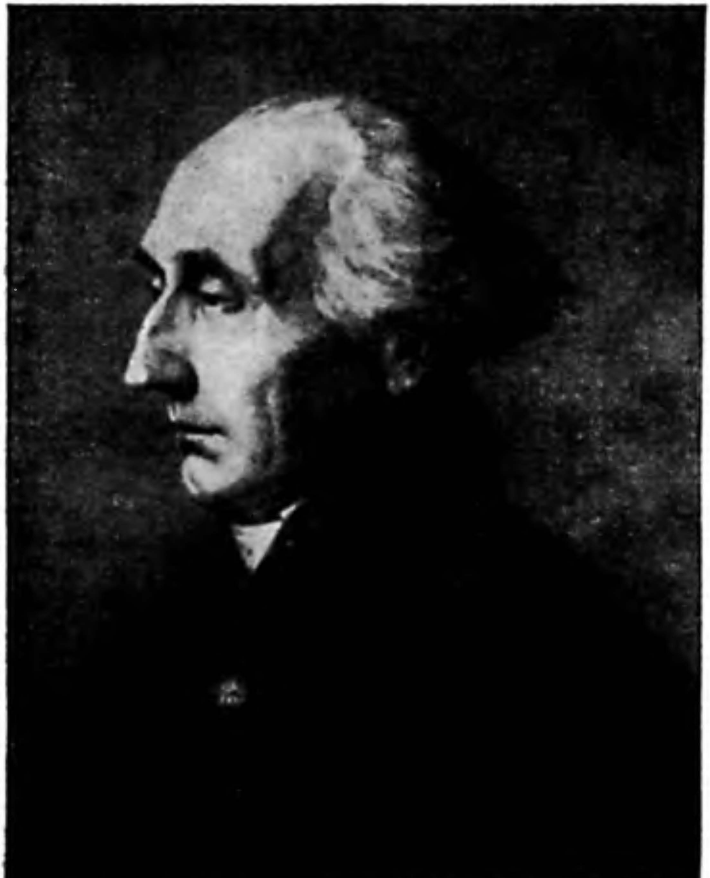
В 1715 г. Тейлор вывел уравнения колебания струны из условия, что ускорение точки струны, т. е. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ обратно пропорционально радиусу кривизны

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}.$$

Для малых колебаний это дает

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Тейлор наложил на задачу еще одно условие, что все точки колеблющейся струны одновременно возвращаются на ось



Ж. Л. Лагранж
1736—1813

абсцисс. Это дало ему возможность утверждать, что $\rho = \frac{b^2}{\rho}$.
Тогда

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -b^2 y; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(ab)^2 y.$$

Принимая далее ось абсцисс за начальное положение струны, концы которой закреплены, Тейлор нашел решение уравнения в виде

$$y = A \sin bx \cdot \sin abt.$$

В 1747 г. Даламбер нашел общий интеграл этого уравнения. Пусть дано уравнение:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

После замены $at = \tau$ оно примет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 y}{d x^2},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

т. е.

$$\frac{\partial y}{\partial x} d\tau + \frac{\partial y}{\partial \tau} dx = du$$

является полным дифференциалом.
Обозначим

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = p, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = q.$$

Тогда

$$du = q\,d\tau + p\,dx,$$

$$dy = p\,d\tau + q\,dx,$$

откуда

$$d(y+u) = (p+q)\,d(\tau + x),$$

$$d(y-u) = (p-q)\,d(\tau - x).$$

И следовательно,

$$y + u = 2\varphi(at + x),$$

$$y - u = 2\psi(at - x),$$

$$y = \varphi(at + x) + \psi(at - x).$$

Здесь $\varphi$ и $\psi$ — произвольные функции, определяемые только начальными условиями.

Из условий закрепленности концов $y\Big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0$ Даламбер вывел:

$$y = \varphi(at + x) - \varphi(at - x);$$

$$\varphi(z + 2l) = \varphi(z).$$

При этом он считал само собой разумеющимся, что функция непрерывна в смысле XVIII в., т. е. аналитическая и, следовательно, дифференцируемая.

Через год после работы Даламбера (опубликовано в 1750 г.) Эйлер ввел в рассмотрение этой же задачи соображение о том, что положение конечной колеблющейся струны в любой момент времени $t_0$ определено, если задано ее начальное положение $y\,|_{t=0} = f(x)$ и начальное распределение скоростей $\left.\dfrac{\partial x}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$. Тогда функция $\varphi(x)$, введенная в решение, данное Даламбером, выражается через функции $f(x)$ и $g(x)$. Именно

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = f(x),$$

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = \frac{1}{a}\int g(x)\,dx$$

(чтобы получить это выражение, в условии

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a\varphi'(at + x) - a\varphi'(at - x) = g(x)$$

положим $t = 0$ и проинтегрируем обе части равенства).

Но, как замечает Эйлер, функции $f(x)$ и $g(x)$ вообще не непрерывные, а связные. Это обусловлено требованием сплошности струны. Следовательно, произвольная функция $y = \varphi(x)$, введенная Даламбером, не является, вообще говоря, непрерывной.

Вокруг проблемы определения природы функции $\varphi(x)$ разгорелся спор, длившийся около 50 лет. В него были вовлечены многие крупные ученые XVIII в. Спор, как это часто бывает, перерос свои границы. Он превратился в спор о природе функций, входящих в состав интегралов уравнений с частными производными, а затем — вообще о соотношении между внутренними свойствами функций и характером выражающего их аналитического аппарата. Среди множества возникших в связи с этим проблем оставалась долгое время нерешенной старая проблема: являются ли связные линии, вычерченные свободным движением руки, непрерывными, точнее, аналитически выразимыми.

Решение этой проблемы оказалось возможным на путях обогащения средств аналитической выразимости функций. Эти пути в XVIII в. уже наметились в результате введения в математику аппарата тригонометрических рядов. В одной из своих 15 статей, посвященных задаче о колебании струны, Эйлер дал решение одного из частных случаев в виде тригонометрического ряда. Через пять лет, в 1753 г., петербургский академик Д. Бернулли предложил общее решение в аналогичной форме, исходя из физического соображения, что звук, издаваемый колеблющейся струной, слагается из основного тона и бесконечного множества обертонов. Именно:

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{l} + \ldots$$

($l$ — длина струны, $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, ...).

Однако Эйлер выступил против такой трактовки общего решения, так как, по его мнению, функция, предложенная Д. Бернулли, являлась недостаточно общей. В самом деле, она непрерывная, нечетная, периодическая. Поэтому, по Эйлеру, она могла выражать лишь частное решение, в крайнем случае — класс частных решений. Возникший спор привел к задаче: выяснить объем класса функций, представимых тригонометрическими рядами.

Дальнейшее развитие понятия функции, состава теории функций и ее места в системе математического анализа выходит за рамки XVIII в. Однако, чтобы не возвращаться далее к этому вопросу, изложим в основных чертах его дальнейшую историю.

В 1807 г. (опубликовано в 1822 г.) Фурье в работах по аналитической теории тепла доказал, что связные линии, заданные на конечных участках различными уравнениями, представимы на любом таком участке рядом

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Ж. Фурье
1768—1830

где коэффициентами будут выражения, получившие впоследствии название коэффициентов Фурье.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Все эйлеровские связные кривые, начерченные свободным движением руки, оказались охваченными аналитическим аппаратом тригонометрических рядов. Несоответствие общих представлений о функциональной зависимости и ограниченных аналитических средств их выражения оказалось сглаженным. Создались условия для трактовки функций как соответствий весьма общего вида. Вскоре такие трактовки стали преобладающими. Так, в 1810 г. французский академик Лакруа писал: «Всякое количество, значение которого зависит от одного или нескольких других количеств, называется функцией этих последних, независимо от того, знаем мы или не знаем, через какие операции нужно пройти, чтобы перейти от этих последних к первой» [1]. Аналогичное определение дано в «Аналитической теории тепла» Фурье: «Функция $fx$ обозначает функцию совершенно произвольную, т. е. последовательность данных значений, подчиненных общему закону или нет, и соответствующих всем значениям $x$, содержащимся между нулем и какой-либо величиной $x$» [2]. Лобачевский в 1834 г. утверждал: «Общее понятие требует, чтобы функцией от $x$ назвать число, которое дается для каждого $x$ и вместе с $x$ постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них, или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной... Обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа одни с другими в связи понимать как бы данными вместе» [3]. Аналогичную трактовку понятия функции дали в 1837 г. Дирихле (1837) и другие ученые, и она сделалась общепринятой.

---

[1] Lacroix. Traité du calcul differentielle et du calcul integral, t. I. Paris, 1810, p. 1.

[2] J. B. J. Fourier. Theorie analytique de chauleur. Paris, 1835, p. 5.

[3] Н. И. Лобачевский. Об исчезании тригонометрических строк. Собр. соч. Гостехиздат, М. — Л., 1951, стр. 43.

Однако вскоре обнаружилось, что и ряды Фурье не являются универсальным аппаратом представления функций. Во всех случаях сходимости рядов Фурье, относящихся к непрерывным функциям, кроме непрерывности требовалось выполнение дополнительных условий: конечность производной, ограниченность изменения функции, кусочная монотонность, существование некоторого интеграла, выполнение неравенства и т. п. П. Дюбуа-Реймон в 1876 г. показал, что нельзя освободиться от дополнительных условий и ограничиться только свойством непрерывности функции. Он построил пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в некоторых точках [1].

При построении этого примера Дюбуа-Реймон использовал прием накопления особенностей при построении функции — прием, идущий от Больцано. Регулярное применение этого приема показало, что удается построить непрерывную функцию $\Phi(x)$, периодическую на сегменте $[0, 2\pi]$ с накоплением особенностей в любой точке. Соответственно ряд Фурье будет расходиться в любой точке указанного сегмента. Вновь образовался разрыв между арсеналом средств аналитической выразимости функций и общей трактовкой понятия функции [2]. Грубо говоря, кривых снова оказалось больше, чем формул.

Еще более осложнилось дело к концу XIX в., когда понятие кривой приобрело бо́льшую абстрактность и общность, чем ранее. В 70-х годах XIX в. Г. Кантор построил общее понятие кривой средствами теории множеств [3]. Плоская кривая была определена у Кантора как множество точек на плоскости, связное, т. е. без изолированных точек, совершенное, т. е. замкнутое (содержащее все свои предельные точки), и всюду плотное на себе (любая его точка — предельная). Однако это было такое множество, которое нигде не плотно на плоскости (не имеет внутренних точек). Построение Кантора, естественно, было воспринято некоторыми математика-

[1] См., например, Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. Гостехиздат, М., 1949, стр. 598—605.

[2] Теория рядов Фурье и вообще тригонометрических рядов в свою очередь получила мощные стимулы развития, приведшие ее к современному состоянию. В нее вошли общие признаки сходимости (начиная с работ Дирихле, 1837), понятия теоретико-множественного характера (Г. Кантор), меры и интеграла (Риман и в особенности Лебег, 1902—1906). В первой четверти XX в. в нее вошли крупные результаты Данжуа, Лузина, Меньшова, Бари и др. История этой математической дисциплины весьма богата фактами, но содержит еще много нерешенных проблем.

[3] К построению теории множеств Кантор пришел, исходя именно из исследований относительно изображения функций, тригонометрическими рядами.

ми критически, как уводящее в сторону от возможности использовать сложившийся аналитический аппарат.

Этот недостаток будто бы устранялся в определении кривой К. Жордана, данном им в 1882 г.: плоская кривая есть совокупность точек плоскости, координаты которых заданы уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, правые части которых — непрерывные функции от параметра $t$ на некотором отрезке $[t_0, T]$. Кривые Жордана оказались весьма разнородными и зачастую весьма сложными. Применение вычислительных алгоритмов к кривым этого класса еще более затруднилось, когда в 1890 г. Пеано открыл, что существуют кривые Жордана, могущие заполнять целиком все внутренние точки некоторого квадрата. Только частные классы этих кривых имеют сравнительно простую структуру. Например, когда существуют непрерывные производные $x'(t)$ и $y'(t)$, тогда кривая есть линия, имеющая длину

$$l=\int_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

Тем не менее возможности для алгоритмического оперирования с функциями даже столь общей природы, как оказалось, сохранились. Только теперь они опирались на общую идею аппроксимирования функций, приближенного их воспроизведения. Способы аппроксимации, как известно, различны. Решающую роль в осуществлении этой идеи сыграли результаты Вейерштрасса. Он доказал в 1885 г., что любая функция $f(x)$, непрерывная в $[a, b]$, аналитически выразима на нем как сумма равномерно сходящегося ряда целых алгебраических полиномов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n(x)$.

Математический анализ XVIII в., в особенности та его часть, которую мы назвали анализом функций, послужил истоком многих идей современной теории функций. В нем были созданы начала теории функций комплексного переменного. Как мы увидим далее, класс вариационных задач привел к созданию вариационного исчисления и возникновению ряда элементов современного функционального анализа. Выяснение широкого смысла понятия функции как причинного соответствия общей природы развилось впоследствии в теоретико-множественную концепцию этого понятия. Анализ всех возможных классов функций и их свойств оказался необходимым условием для появления современной конструктивной теории функций.

Изложенная выше история развития понятия функций в XVIII в. и позднее была бы неполна, если бы мы не отметили, что в этот период вместе с обогащением анализа функций изменилась его служебная роль. Из введения в анализ он превратился в одну из его высших областей — теорию функций. Свойства же элементарных функций вошли составной частью в оперативные исчисления — дифференциальное и интегральное. Место введения в анализ заняли теория действительного числа и теория пределов.

**Проблема обоснования анализа бесконечно малых.** Работы по вопросам обоснования анализа, появлявшиеся в течение XVIII в., настолько многочисленны, что составляют большую самостоятельную отрасль математической литературы вообще.

Одной из самых характерных черт анализа бесконечно малых в XVIII в. была невыясненность его исходных понятий, невозможность объяснить рационально правомерность введенных операций. Взгляды создателей анализа на этот предмет не отличались ни постоянством, ни определенностью. Как Ньютон, так и Лейбниц предприняли множество попыток объяснения своих исчислений, не достигнув успеха. Их ближайшие последователи только усугубили путаницу. Практические успехи анализа бесконечно малых приходили во все увеличивающееся противоречие с его неясными, зыбкими основами. Анализ бесконечно малых переживал мистический, по определению К. Маркса, период своего развития.

Уязвимость такого положения вскоре дала себя знать. У анализа бесконечно малых появились противники, ставящие под сомнение или отвергающие его методы, результаты и в особенности трактовку основных понятий. Приверженцы же могли противопоставить этим возражениям лишь накопление практически важных результатов. К. Маркс по этому поводу писал: «Итак, сами верили в мистический характер новооткрытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом применении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем. Таким образом сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие, тем более бесили толпу старых ортодоксальных математиков и вызвали таким образом враждебный крик, отозвавшийся даже в мире несведущих в математике людей и бывший необходимым для того, чтобы проложить путь новому» [1].

---

[1] К. Маркс. Математические рукописи. «Под знаменем марксизма», 1933, № 1, стр. 65.

Видная роль во враждебных выступлениях против анализа бесконечно малых принадлежала ирландскому епископу, видному философу-идеалисту Дж. Беркли, который был озабочен укреплением позиций религии, расшатываемых под влиянием грандиозных успехов естественных наук. Наряду с другими сочинениями философского характера, где он отстаивал позиции субъективного идеализма, Беркли издал в 1734 г. трактат «Аналист, или рассуждение, обращенное к одному неверующему математику», в котором он стремился доказать, что анализ (как и все области науки) имеет отнюдь не большую обоснованность, чем догматы богословия.

Критические аргументы Беркли были весьма характерны для субъективного идеалиста. Они состояли из утверждений о чувственно-интуитивной несообразности, невоспринимаемости понятия флюксий и способа их последовательного образования, а также о логических противоречиях в высказываниях Ньютона относительно оснований анализа.

Возникла оживленная полемика, способствующая в конечном счете выяснению спорных вопросов. Она не входила в расчеты Беркли, и он вскоре отошел от этой специальной темы, отнюдь не изменив своих общих воззрений. Однако критический пересмотр проблемы обоснования анализа бесконечно малых продолжался в среде математиков с большой интенсивностью. Он был остро необходим.

Самой первой реакцией английских математиков (Джарин, Робинс, Пимбертон, Маклорен и др.) явилась защита теории флюксий и авторитета Ньютона путем комментирования его трудов и внесения в них частичных усовершенствований. При этом было высказано немало полезных мыслей. Так, например, привлечено внимание к правильному толкованию понятия предела переменной величины. Однако этот путь оказался, как и следовало ожидать, исторически бесплодным.

Виднейшие математики, занимавшиеся в середине XVIII в. проблемой обоснования анализа бесконечно малых, видели свою задачу пока еще только в рационализации его основ, в устранении пробелов, неясностей, мистического оттенка. Среди многих попыток этого периода, который К. Маркс называл «рациональным», особенно выделяются теории Эйлера и Даламбера.

Для Эйлера и его последователей (Торелли и др.) дифференциальное исчисление Лейбница не должно было трактоваться как исчисление дифференциалов, сопровождающееся отбрасыванием бесконечно малых. По Эйлеру, дифференциальное исчисление есть метод определения отношения исчезающих приращений, получаемых функциями, когда их аргументам даются исчезающие приращения. Основным понятием здесь является не дифференциал, а производная. Что же касается бесконечно малых, или дифференциалов, то они есть просто точные нули. Производные, следовательно, имеют вид $\frac{0}{0}$, требуется лишь выбирать то значение, к которому стремится (приближается) отношение конечных разностей $\Delta y = y_1 - y$ и $\Delta x = x_1 - x$, уменьшившихся каждое до нуля.

Теория нулей Эйлера не могла быть признана удовлетворительной. Она лишь затушевывала, маскировала реальные предельные переходы, которые практически совершались при дифференцировании функций. К тому же дифференциалы, объявленные нулями, вскоре появляются у самого Эйлера в виде главных линейных частей приращения функций. Без них оказалось невозможно обойтись.

Теория Даламбера также возникла на почве критического пересмотра наследия Ньютона и Лейбница с целью выявления их рациональной сущности. Этот пересмотр заставил Даламбера отдать предпочтение методу первых и последних отношений Ньютона. Этот метод Даламбер развил, придав ему форму метода пределов. «Говорят, что одна величина является пределом другой величины, если эта вторая может стать к первой ближе, чем на любую данную величину, как бы ни была мала эта последняя, причем, однако, приближающаяся величина никогда не сможет превзойти величину, к которой она приближается», — писал Даламбер.

Отсюда видно, что переменные, по Даламберу, — монотонны, предел — односторонний. Кроме того, чтобы избежать оперирования с нулями, Даламбер ввел требование, чтобы предел не совпадал ни с каким значением переменной.

Вычисление производных, по Даламберу, состоит из следующих операций: переменному аргументу $x$ дается конечное приращение $\Delta x$; функция $y = f(x)$ получает вследствие этого конечное же приращение $\Delta y$; составляется отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и упрощается; наконец, полагают $\Delta x = 0$. Подобный метод фактически основывается на предположении, что разложение $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ в ряд по степеням $\Delta x$ уже известно, что по существу эквивалентно утверждению, что найдена и сама производная и ее остается только «высвободить из ее окружения», по выражению К. Маркса.

Теория пределов имела многих последователей. В 1786 г.

швейцарец Люилье победил на конкурсе, объявленном Берлинской академией наук (президентом которой был Лагранж) на тему о ясной и точной теории математических бесконечно больших и бесконечно малых величин. Его сочинение «Элементарное изложение начал высших исчислений» было построено на базе теории пределов. В нем производная $\frac{dy}{dx}$ была введена как символ выражения $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Страстными приверженцами и пропагандистами метода пределов были петербургский академик С. Е. Гурьев и его последователи П. А. Рахманов и академик В. И. Висковатов.

Однако теория пределов XVIII в. не получила признания у большинства современников. Главной причиной этого была органически присущая понятию предела неалгоритмичность. «Методу пределов, — писал в 1797 г. Л. Карно, — свойственно одно серьезное затруднение, не имеющее места в анализе бесконечно малых: именно, в нем нельзя, как в этом последнем, отделять бесконечно малые количества друг от друга, и так как количества в нем всегда связаны друг с другом, то невозможно ни использовать при вычислениях свойства, принадлежащие каждому из них в отдельности, ни подвергать уравнения, в которых они встречаются, преобразованиям, способствующим их исключению». Определение предела как одностороннего недостижимого предела монотонной последовательности было недостаточным, неразвитым. Оно еще должно было развиться в понятие предела функции, освободившись от подобных ограничений. Наконец, теория пределов еще не включила в себя понятие сходимости последовательностей и, что еще более важно, критерия этой сходимости, введенного лишь в первой половине XIX в. Коши и Больцано. Словом, эта теория, чтобы стать общепризнанной и общеупотребительной, должна была, помимо строгости в выяснении смысла основных понятий анализа, приобрести алгоритмический аппарат.

Поэтому не удивительно, что ко второй половине XVIII в. выявилась еще одна концепция обоснования анализа, названная К. Марксом алгебраической. Ее сущность состояла в том, чтобы положить в основу анализа понятие производной, определение которой включало бы эффективный способ ее отыскания, не опирающийся на туманные понятия бесконечно малой, предела и т. п. Операцию дифференцирования, согласно этой концепции, следовало бы заменить алгебраическим приемом или каким-либо другим специальным алгоритмом.

По-видимому, первые работы в области алгебраического дифференциального исчисления появились в Англии. В 1748 г. вышло «Учение об ультиматорах» Джона Киркби, неудачное и тотчас же забытое. Через несколько лет в двух работах (1758—1764) Джон Ланден развил «анализ вычетов». В последнем рассматривались выражения вида $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$. Значение такого выражения при $x_1=x$ Ланден называл «специальным значением», или «отношением вычетов», и ввел для него символ $[x \,\underline{/}\, y]$. Разыскание «специального значения» для элементарных алгебраических функций в «анализе вычетов» опиралось на теорему

$$\frac{x^{\frac{m}{n}}-v^{\frac{m}{n}}}{x-v}=x^{\frac{m}{n}-1}\,\frac{1+\frac{v}{x}+\left(\frac{v}{x}\right)^2+\ldots+\left(\frac{v}{x}\right)^{m-1}}{1+\left(\frac{v}{x}\right)^{\frac{m}{n}}+\left(\frac{v}{x}\right)^{\frac{2m}{n}}+\ldots+\left(\frac{v}{x}\right)^{(n-1)\frac{m}{n}}}.$$

При $v=x$ получается значение производной для $y^{\frac{m}{n}}$:

$$y'=\frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Рассуждения Ландена, как и других приверженцев алгебраического обоснования анализа, по существу опирались на самоочевидность разложения функций в ряд. Их алгебраические приемы были пригодны фактически лишь для полиномиальных функций. Распространение этих приемов даже на класс аналитических функций связано с трудностями, с которыми их авторы не умели справиться (распространение на бесконечные ряды свойств конечных сумм, представимость функций степенным рядом и т. п.).

Самой серьезной работой, выяснившей полностью возможности алгебраического дифференциального исчисления и определившей его судьбу, была большая работа Лагранжа «Теория аналитических функций, содержащая принципы дифференциального исчисления, освобожденные от всякого рассмотрения бесконечно малых или исчезающих пределов и флюксий, сведенные к алгебраическому анализу бесконечных количеств» (1797) [1]. Ее исходным и центральным пунктом

---

[1] J. L. Lagrange. Théorie des fonctions analytiques... Oeuvres de Lagrange, t. IX. Paris, 1881, pp. 15—427.

было стремление доказать теорему, что всякая функция $y = f(x+h)$ почти всюду (быть может, за исключением дискретных значений аргумента) разложима в степенной ряд

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \ldots$$

Доказательство Лагранж строил таким образом, что исключал все особенные случаи (возможность появления членов разложения с отрицательными или дробными степенями $h$ и т. п.). Тем самым он выделил для исследования класс аналитических функций, отнеся остальные функции к разряду исключений. Это было отмечено позднее Вейерштрассом, по инициативе которого за функциями, представимыми степенными рядами, было сохранено название *аналитические*. Степенные ряды Лагранж использовал для приближения функций полиномами, опираясь на то, что для всех достаточно малых $h$ каждый член разложения будет больше суммы следующих за ним членов. При этом для конкретных функций он вывел формулу остаточного члена и ввел в употребление теорему о среднем.

Последовательные производные определены Лагранжем как коэффициенты при последовательных степенях $h$, с точностью до соответствующих числовых коэффициентов. Последующее изложение дифференциального исчисления было проведено Лагранжем в этом же сочинении.

Таким образом, дифференциальное исчисление, по мысли Лагранжа, должно было представлять часть алгебры, отличающуюся лишь специфическими алгоритмами. «Алгебра есть не что иное, как теория функций. В алгебре искомые количества должны быть функциями данных количеств, т. е. выражениями, представляющими различные операции, которые нужно произвести над этими количествами, чтобы получить значения искомых. В алгебре, в собственном смысле слова, рассматривают только первоначальные функции, происходящие из обычных алгебраических операций; это первая ветвь теории функций. Во второй ветви рассматривают производные функции, и это та ветвь, которую мы называем просто «Теорией аналитических функций» и которая содержит все, относящееся к новым исчислениям»[1] — так пояснил эту свою мысль Лагранж.

Однако вскоре выяснилось (и Коши сыграл в этом главную роль), что теория Лагранжа некорректна. Основная теорема о разложении функций в ряд по существу опиралась на неявное предположение, что всякая функция разложима

[1] J. L. Lagrange. Théorie des fonctions analytiques... Oeuvres de Lagrange, t. IX, p. 16.

в ряд Тейлора. Этот порочный круг оказался неустранимым. Кроме того, Лагранж не смог избежать неявных апелляций к бесконечно малым и к предельным переходам. Операции с рядами тоже оказались необоснованными, так как они производились без исследования сходимости ряда.

В обстановке острой борьбы обнаруживалась несостоятельность одного за другим почти всех способов обоснования математического анализа. Только по отношению к понятию предела критика вела не к отказу от концепций, основывающихся на нем, а к их уточнению. Но это понятие трудно и долго входило в анализ, так как всякий раз возникали трудности, связанные с вопросом о существовании предела и о способах эффективного его нахождения. Подобные трудности существовали долго, до конца XIX в., когда был создан «ε, δ-аппарат» теории пределов.

**Идеи К. Маркса о путях развития математического анализа.** В изложении проблемы обоснования анализа бесконечно малых в XVIII в. мы неоднократно ссылались на ряд идей К. Маркса, содержащихся в его математических рукописях. В предыдущем параграфе мы целиком исходили из этих идей; исследования Маркса имеют для нашей науки основополагающий характер. Дадим здесь их краткий обзор, отнюдь не претендуя на полноту анализа содержания всех математических рукописей Маркса.

Математикой Маркс начал заниматься в конце 50-х годов прошлого века в связи с работой над «Капиталом» и не прекращал этих занятий до последних дней своей жизни. Работая самостоятельно, он помимо применений математики к исследованию экономических проблем перешел к систематическим занятиям математическим анализом. Здесь он поставил перед собой задачу — сорвать покров тайны, окружавшей основные понятия и методы дифференциального исчисления со времен Ньютона и Лейбница. Труднейшая задача обоснования анализа бесконечно малых сделалась для Маркса пробным камнем применения метода материалистической диалектики к математике. При решении этой задачи Маркс проделал большую предварительную работу. Он изучил и критически сравнил многочисленные учебники математического анализа для высших школ Англии и Франции и познакомился с некоторыми классическими произведениями Ньютона, Эйлера, Маклорена и др.

В ходе этой работы К. Маркс убедился в неудовлетворительности почти всех попыток обоснования анализа, кроме теории пределов, важнейшим представителем которой являлся Коши. В конце 70-х годов Маркс приступил к изучению теории пределов и к обработке и систематическому изложению складывающейся у него собственной точки зрения. Смерть (14 марта 1883 г.) прервала занятия. Исследования остались неоконченными. Математические рукописи К. Маркса в той части, которая относится к математическому анализу, отражают эту большую работу.

Для К. Маркса анализ бесконечно малых не является изолированной, обособленной областью математики. Он представляет собой закономерно возникший новый этап исторического развития математики. Поэтому задача выявления логической структуры анализа в подавляющей части сводится к анализу его истории. Эта история начинается с накопления неразвитых форм, прообразов, понятий и операций анализа, ведущих к переходу от алгебры конечного к алгебре бесконечного, включающей в себя бесконечные ряды, интеграционные и дифференциальные методы. Появление собственно дифференциального и интегрального исчисления связано уже с изобретением специфических алгоритмов.

Работая над выяснением диалектического перехода от алгебры к анализу бесконечно малых, К. Маркс обращал внимание на то, что основатели дифференциального и интегрального исчисления, равно как и ученые более позднего времени, с самого начала действовали на почве самого исчисления и не искали его алгебраических истоков. Ньютон «был еще слишком поглощен разработкой самих дифференциальных операций, которые у Тейлора и Маклорена предполагаются как данные и известные. Кроме того, Ньютон... пришел к ним сперва от механических, а не принадлежащих чистому анализу исходных положений. — Что касается... Тейлора и Маклорена, то они с самого начала работали и действовали на почве самого дифференциального исчисления и поэтому не имели никакого повода к тому, чтобы искать возможно более простых алгебраических истоков этого исчисления тем более, что спор между ньютонианцами и лейбницианцами вращался вокруг определенных, уже готовых форм исчисления, как новооткрытой, совершенно особой, как небо от земли отличной от обыкновенной алгебры математической дисциплины... Действительные и потому простейшие связи нового со старым всегда открываются лишь, когда само новое принимает уже законченные формы...» [1].

---

[1] К. Маркс. Математические рукописи. «Под знаменем марксизма», 1933, № 1, стр. 93—94.

В истории обоснования дифференциального исчисления в XVIII в. К. Маркс различал следующие периоды:

1. **Мистическое дифференциальное исчисление.** В силу того что основоположники анализа бесконечно малых, в первую очередь Ньютон и Лейбниц, приращение с самого начала отождествляли с дифференциалом, они могли получать правильные результаты лишь посредством отбрасывания бесконечно малых более высоких порядков. Это с неизбежностью приводило к тому, что дифференциалу приписывались какие-то особые, таинственные свойства, что бесконечно малые рассматривались как некие мистические величины: и нули, и не нули одновременно. К. Маркс не видел в этом решительно никакой диалектики и считал такую трактовку неправильной. В то же время он высоко оценивал открытие дифференциального и интегрального исчисления и подчеркивал то обстоятельство, что борьба мнений, развернувшаяся вокруг этого открытия, была необходимой, чтобы проложить путь новому [1].

2. **Рациональное дифференциальное исчисление** исправляет методы Ньютона и Лейбница. Его виднейшими представителями были Эйлер и Даламбер. Как мы разъясняли выше, определение производной, по Даламберу, проведено более строго, но реальный (эффективный) способ нахождения производной при этом не выявляется. Больше того, составление отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и последующие операции с ним основываются на предположении, что разложение $f(x+\Delta x)$ в ряд по степеням $\Delta x$ уже найдено, что эквивалентно нахождению искомой производной, которую остается только «высвободить из ее окружения».

3. **Алгебраическое дифференциальное исчисление.** Лагранж, главный представитель этого течения, уже явно исходит из разложимости функции $f(x+h)$ в ряд по степеням $h$ и определяет производную как коэффициент того члена ряда, который содержит приращение $h$ в первой степени. Вопрос об алгоритмах нахождения производной для тех или иных классов функций остается, таким образом, открытым. Больше того, Лагранж так и не доходит до собственно дифференциального исчисления. Дифференциальные символы у него представляют собой просто «дело номенклатуры, которая одна лишь остается от собственно дифференциального исчис-

---

[1] К. Маркс. Математические рукописи. «Под знаменем марксизма», 1933, № 1, стр. 42.

ления». К. Маркс также отметил, что в приложениях своей аналитической теории функций Лагранж сам постоянно использует то или другое из отвергаемых им «метафизических» представлений: ньютоновы флюксии, лейбницевы бесконечно малые, даламберовские предельные значения отношений исчезающих величин, а также специфическую для дифференциального исчисления символику.

Остановимся еще на некоторых других идеях К. Маркса области основ математического анализа. Задача, которую он ставил перед собой, состояла для начала в выяснении сущности дифференциального исчисления как такового, т. е. как особого математического исчисления, оперирующего с характерными для него символами. В соответствии с этим К. Маркс прежде всего выявлял реальную сущность процесса дифференцирования.

По К. Марксу, производная $f'(x)$ от функции $y=f(x)$ получается следующим образом: образуется (если это возможно) «предварительная» производная, т. е. функция

$$\Phi(x, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Значение этой функции для $x_1=x$ (если оно существует) и есть производная от данной функции. К. Маркс искал алгоритмы, позволявшие (в простейших случаях) непосредственно находить по выражению функции ее производную. Так, в случае степенной функции $y=x^n$

$$\Phi(x, x_1) = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x \cdot x_1^{n-2} + x^2 x_1^{n-3} + \ldots + x^{n-2}x_1 + x^{n-1},$$

что при $x_1=x$ дает

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Такого рода способы непосредственного нахождения производной К. Маркс называл «алгебраическим» дифференцированием. Термин «алгебраическое» употреблялся им в том же смысле, как и у многих математиков XIX в.: как не требующее использования понятия бесконечно малой величины.

«Алгебраическое» дифференцирование К. Маркса допускает символическое отображение в общепринятом в его время виде. Обозначив

$$x_1 - x = \Delta x, \quad y_1 - y = \Delta y,$$

причем $\Delta x \neq 0$, К. Маркс получал для предварительной производной символическое выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Соответственно обозначение производной $f'(x)$ будет $\frac{dy}{dx}$. Этот символ, который К. Маркс (в соответствии с употреблявшейся в его время терминологией) называл «символическим дифференциальным коэффициентом», непосредственно имеет смысл только в целом. Однако в силу способа образования производной можно рассматривать выражения

$$f'(x)\,dx = dy.$$

Эта формула верна и для дифференцирования сложной функции. В этом случае она используется как оперативная формула, позволяющая (в довольно широких предположениях) свести нахождение производной от функции

$$F(t) = f[\varphi(t)]$$

к отысканию производных $f'(x)$ и $\varphi'(x)$. Для этого достаточно в формулу для дифференциала подставить

$$x = \varphi(t), \qquad dx = \varphi'(t)\,dt.$$

Но таким образом происходит оборачивание метода. Мы следуем не от реального математического процесса образования производной к ее символическому выражению, а, наоборот, опираясь на символическую формулу, находим выражение для производной. Первым нетривиальным примером такого оборачивания метода является дифференцирование произведения $y = uz$. Обращаясь к выводу формулы

$$\frac{d(uz)}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx},$$

К. Маркс указывал, что символические дифференциальные коэффициенты становятся при этом самостоятельным исходным пунктом. Их «реальный эквивалент лишь должен быть найден... Но тем самым и дифференциальное исчисление выступает как оперирующее на своей собственной почве. Ибо его исходные пункты: $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ — суть лишь ему принадлежащие и его характеризующие математические величины. И это обращение метода получилось здесь как результат алгебраического дифференцирования $uz$. Таким образом, алгебраический метод сам собой превращается в противоположный ему дифференциальный... Но тем самым символические дифференциальные коэффициенты тотчас превращаются в оперативные символы, в символы процессов, которые должны быть произведены... Возникший первоначально как символическое выражение «производной», т. е. уже выполненных операций дифференцирования, — символический дифференциальный коэффициент играет теперь роль символа операций дифференцирования, которые лишь нужно еще произвести»[1].

К. Маркс не ограничивался понятием дифференциала как оперативного символа. В применении к вопросу о приближенном выражении приращения функции он использовал понятие дифференциала как главной линейной части приращения. Понятие дифференциала как оперативного символа, впервые открытое К. Марксом, и различие обоих понятий дифференциала приобретают, как это было показано советским математиком В. И. Гливенко, особенно важное значение в современных обобщениях понятия дифференциала на функциональный анализ.

В ходе работы над математикой К. Маркс интересовался широким кругом вопросов. Среди них: о применении математики в экономических исследованиях, о математических способах отображения движения и многие другие. Несмотря на незавершенность, математические рукописи К. Маркса имеют большое научное значение.

---

[1] К. Маркс. Математические рукописи. «Под знаменем марксизма», 1933, № 1, стр. 28—29.