ГЛАВА III

РАЗВИТИЕ АППАРАТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В XVIII в.

Перестройка основ математического анализа происходила в обстановке, когда последний непрерывно одерживал большие и быстрые практические успехи. Эти успехи были так значительны, что многие исследователи последующих времен, говоря о математиках XVIII в., упрекали их за то, что они в погоне за практическими результатами оставались якобы безучастными к его шатким основам. Мы показали в предыдущей главе, что это было, конечно, не так.

В части оперативной анализ также был преобразован самым радикальным образом. Основной чертой преобразования была выработка удобного, действенного, развитого аппарата исчислений. В начале XVIII в. анализ подразделялся еще только на две части: дифференциальное и интегральное исчисление. Первое включало в себя, в частности, всю теорию рядов. Во втором же были сосредоточены методы решения всех так называемых обратных задач анализа бесконечно малых. Таким образом, в интегральное исчисление помимо методов интегрирования функций включалась вся теория дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и с частными производными, а также вариационное исчисление.

Ярким примером такой нерасчлененности структуры математического анализа является рассмотренная выше серия монографий Эйлера.

Фактическое богатство анализа, накопленное в течение XVIII в., огромно. Оно слишком велико, чтобы предпринять в рамках настоящего учебника его систематическое перечисление или хотя бы обзор. Да в этом здесь и нет необходимости. Мы ограничимся ниже указанием на некоторые наиболее характерные особенности развития дифференциального исчисления, интегрального исчисления и теории дифференциальных уравнений.

Дифференциальное исчисление. Вскоре после первых работ Г.-В. Лейбница выяснилось, что его исчисление дифференциалов и символика имеют большие преимущества перед исчислением флюксий и соответствующей системой символов. Они лучше отображали сущность операций анализа, и, последний, естественно, принял форму, в основном предуказанную Лейбницем. Однако в качестве основного понятия математики XVIII в., в отличие от Лейбница, приняли не дифференциал, а производную, как менее уязвимую в логическом отношении. Постановка задач дифференциального исчисления изменилась. Вслед за Эйлером оно стало трактоваться большинством математиков как метод определения отношения исчезающих приращений, получаемых функциями, когда переменному количеству, функциями которого они являются, дается исчезающее приращение.

В течение длительного времени дифференциальное исчисление сохраняло тесные связи с исчислением конечных разностей. Эта связь была в рассматриваемое нами время настолько тесной, что оба эти исчисления фактически объединялись в единое исчисление для функций как непрерывного, так и дискретного аргумента. Помимо обычных соображений, в которых учитывается «молодость» и нерасчлененность анализа, такое положение объяснялось, по-видимому, большим прикладным значением исчисления конечных разностей для методов интерполяции, численного дифференцирования и интегрирования, приближенного решения дифференциальных уравнений. Не последнюю роль играли при этом соображения, связанные с доказательствами по аналогии. Совместное рассмотрение обоих исчислений создавало большие возможности для подобных аналогий.

Математики как XVII, так и XVIII в. много внимания уделяли развитию исчисления конечных разностей. В работах П. Ферма, И. Барроу, Г. Лейбница, Дж. Валлиса, И. Ньютона и др. сформировалась эта полезная область математики. Изобретатели анализа бесконечно малых ввели многочисленные аналогии между конечными разностями и дифференциалами, используя их для дальнейшего развития дифференциального исчисления. Вот один из примеров.

В 1711 г. Ньютон вывел известную интерполяционную формулу [1]

$$f(a+n\Delta x)=f(a)+n\Delta f(a)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a)+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 f(a)+\ldots+\Delta^n f(a),$$

где n — целое положительное число,

$$\Delta f(a),\quad \Delta^2 f(a),\quad \Delta^3 f(a),\ldots$$

последовательные конечные разности функции $f(x)$ при $x=a$:

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x),$$
$$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+\Delta x)-\Delta f(x),$$
$$\Delta^3 f(x)=\Delta^2 f(x+\Delta x)-\Delta^2 f(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Отправляясь от этой формулы Ньютона, Тейлор распространил ее на случай бесконечно большого числа членов, где Δx стремится к нулю, но, однако, так, чтобы $n\cdot\Delta x=h$ было конечным. Тогда

$$f(a+h)=f(a)+h\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}+\frac{h(h-\Delta x)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\Delta^3 f(a)}{\Delta x^3}+\ldots$$

превратилось у него в

$$f(x+h)=f(x)+h\frac{df(x)}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}+\frac{h^3}{3!}\frac{d^3 f(x)}{dx^3}+\ldots$$

Подобное использование аналогий и параллельное развитие дифференциального исчисления и исчисления конечных разностей было характерно для анализа XVIII в. Особенное распространение эта черта получила к середине века, что ярко продемонстрировал, например, Эйлер в своем «Дифференциальном исчислении» (1755). Он посвятил, в частности, первые две главы систематическому изложению

[1] И. Ньютон. Конечные разности. В кн.: И. Ньютон. «Математические работы». ОНТИ, М., 1937, стр. 210—217.

теории конечных разностей в объеме, превышающем дальнейшее ее применение в настоящем сочинении к интерполированию рядов, преобразованию их в целях улучшения сходимости, и тому подобным вопросам.

Основным аппаратом дифференциального исчисления являлось разложение функций в степенные ряды. Сравнительно богатый арсенал средств, накопленный предшественниками, в самом начале века обогатился теоремой Тейлора. Последний нашел ее, как мы показали выше, на путях аналогий с исчислением конечных разностей, экстраполируя на исчисление дифференциалов интерполяционную формулу Ньютона. В 1712 г. Тейлор уже сообщил свою теорему в одном письме. Публикуя ее в «Methodus incrementorum directa et inversa» (1715), Тейлор дополнил ее выводом для частного случая, носящего ныне название ряда Маклорена. Последний дал новый вывод этой теоремы в 1742 г.

Регулярное применение рядов Тейлора и Маклорена сделалось характерной особенностью дифференциального исчисления. Их значение оказалось настолько большим, что когда в 1784 г. Кондорсе присвоил им имена их открывателей, то это было воспринято как само собой разумеющийся факт. Задача разложить в ряд элементарными путями все известные функции и тем самым обеспечить эффективность операций дифференциального исчисления сделалась не только актуальной, но и, казалось, достижимой. На пути ее осуществления были достигнуты крупные успехи. Все известные математикам XVIII в. (и, по-видимому, все возможные) функции обнаруживали свойство разложимости в степенные ряды, бесконечные произведения и т. п., и с ними оказывалось возможным оперировать. Огромное увеличение фактов дифференциального исчисления, кажущееся пренебрежение к необходимости более глубокого изучения свойств рядов создали прецеденты для неправильных оценок творчества математиков XVIII в. в области математического анализа. С разной степенью определенности различные авторы писали о формализме и беспечности в этих вопросах.

Однако это не соответствует действительности. Первые же трудности выдвинули проблему сходимости рядов. Уже в 1715 г. П. Вариньон сформулировал относительно биномиальных разложений ряд требований, сущность которых сводилась к тому, чтобы члены разложения неограниченно уменьшались, равно как и остаток ряда. Усилия, направленные на замену смутных метафизических рассуждений точным определением сходимости, продолжались в течение всего столетия. При этом основные заслуги математиков XVIII в. можно сформулировать в трех пунктах: вывод и исследование различных форм остаточного члена ряда; преобразование рядов с целью получить ряд, заведомо сходящийся; творческое осмысление оперирования с расходящимися рядами.

В 1754 г. Даламбер при выводе ряда Тейлора высказал соображения, сводящиеся к представлению остаточного члена n-кратным интегралом. Эйлер, не прибегая к этой идее, стремился отыскать иные критерии сходимости, рассматривая модули разностей сумм членов ряда, взятых в конечном числе. В 60-х годах идея различения сходящихся и расходящихся рядов проникла в учебники, например в учебники Кестнера (1760 и 1761 гг.). В 1768 г. Ламберту удалось строго доказать ряд теорем относительно сходимости разложения числа π в цепную (непрерывную) дробь. В конце века, в 1797 г., Лагранж представил остаточный член ряда Тейлора сперва в интегральном виде, а затем в виде, в котором он находится в современных учебниках под его именем. Усилия математиков XVIII в. найти правильное понимание проблемы сходимости (равно как и их ошибки) создали к началу XIX в. условия для строгого подхода к ее решению. Новый этап теории рядов, характеризующийся регулярными строгими оценками остаточных членов и характера сходимости, начинается в первые десятилетия XIX в. и связан в первую очередь с работами Коши.

О большом внимании к проблеме сходимости свидетельствуют работы по улучшению сходимости рядов. Многие преобразования рядов, производимые с целью получить сходящиеся ряды, принадлежат Эйлеру. Вот пример: дан ряд

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + \dots$$

Производится замена переменных

$$x = \frac{y}{1-y} = y + y^2 + \dots$$

$$S = a(y + y^2 + \dots) - b(y + y^2 + \dots)^2 + c(y + y^2 + \dots)^3 - \dots$$

$$S = ay + (a-b)y^2 + (a - 2b + c)y^3 + \dots =$$

$$= ay + \Delta a \cdot y^2 + \Delta^2 a \cdot y^3 + \dots$$

Затем новая замена переменных $y = \frac{x}{1+x}$ приводит к

$$S' = a\frac{x}{1+x} + \Delta a\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \Delta^2 a\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \dots$$

Если ряд S сходится, то ряд S' сходится к этой же сумме. Но существуют такие значения x, для которых S' сходится, а S — расходится.

Оперирования с рядами вне области их сходимости приводили к парадоксальным результатам (или, по выражению Абеля, к «омерзительным равенствам»). Однако Эйлер нашел способы получать важные результаты анализа именно с помощью расходящихся рядов. Вообще Эйлер нередко оперировал с расходящимися рядами, видя для этого основания в индуктивном распространении на бесконечные ряды операций, применимых к полиномиальным функциям. Оправданием законности оперирования с расходящимися рядами для Эйлера было получение правильных результатов. Чтобы избежать несообразностей, следует, говорит он, правильно определить понятие суммы расходящегося ряда. При этом надо отказаться от обычных представлений, связанных со словом «сумма», и считать, что суммой ряда является конечное выражение, из разложения которого этот ряд возникает. Например, суммой ряда

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

будет $\frac{1}{1-x}$, потому что данный ряд получается из разложения последнего выражения. Такое определение оказывается более общим и предвосхищает многие важные идеи последующих времен, например идею аналитического продолжения, не говоря уже о возможности использования важного аппарата расходящихся рядов.

Наряду со степенными рядами в математический анализ вошли новые типы разложений функций. Стирлинг (1730) и Эйлер (1732) применили, например, разложения в асимптотические ряды. В 1748 г. Эйлер ввел тригонометрические ряды для решения задач математической физики. Это средство получило большое применение не только в работах Эйлера, но и в сочинениях других математиков: Д. Бернулли (1753) по уравнениям математической физики (например, решение уравнения колебания струны), Даламбера (1754) и одновременно Клеро по небесной механике. К концу XVIII в. Лаплас (1782 г., опубликовано в 1785 г.) и Лежандр (1783; опубликовано в 1786 г.) решили задачу о притяжении эллипсоидального тела, введя разложения в ряды по сферическим функциям.

Математический анализ в XVIII в. обогатился мощным и разнообразным аппаратом разложения функций в ряды различных видов. Этот аппарат был создан под сильным непосредственным давлением задач математической физики. В ходе его разработки постепенно были подняты проблемы изучения общих свойств рядов, главным образом их сходимости. Без этого систематическое использование созданного аппарата делалось затруднительным. Построение достаточно общей и строгой теории рядов сделалось к концу века первоочередной проблемой, от решения которой зависели практические успехи математического анализа.

Правила дифференцирования в подавляющем большинстве были получены еще в трудах Лейбница и братьев Бернулли. Расширение этих правил в связи с расширением класса исследуемых функций не представляло принципиальных трудностей. Так, вслед за аналитическим выражением тригонометрических, показательных и других классов функций были немедленно получены аналитические выражения их производных.

Накопление фактов дифференциального исчисления происходило быстро. В «Дифференциальном исчислении» (1755) Эйлера это исчисление появляется уже в весьма полном виде. Например, теорема о независимости значения частных производных от порядка дифференцирования была известна еще в начале века. Эйлер дал ей доказательство, распространив последнее на частные производные высших порядков. В теории полного дифференциала Эйлер показал, что в

$$df(x, y) = P\,dx + Q\,dy$$

частные производные должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Символы $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, однако, были введены позднее, около 1786 г., Лежандром. Необходимость, а затем достаточность данного условия, чтобы выражение $Pdx+Qdy$ было полным дифференциалом, была доказана Эйлером. Он же, рассматривая функции трех переменных $f(x, y, z)$ и их полные дифференциалы вида $Pdx+Qdy+Rdz$, ввел условия:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

С именем Эйлера связаны также формулы дифференцирования сложных функций, теорема об однородных функциях и многие другие факты.

Правила определения экстремумов функций одной переменной $y=f(x)$ были даны Маклореном. Эйлер разработал этот вопрос для функций двух переменных. Лагранж показал (1789), как отличать вид условного экстремума для функций многих переменных, а затем (1797) применил для их исследования метод неопределенных множителей, носящий поныне его имя. Упомянем, наконец, вопрос об исследовании неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, полностью изложенном Эйлером.

Дифференциальное исчисление в течение XVIII в. накопило почти все богатство фактов, характерных для современной его структуры. В нем был разработан сильный аппарат представления функций рядами. Оно приобрело достаточно развитую аналитическую форму. Помимо общих проблем рационального истолкования его основных понятий, связанных с невыясненностью понятия бесконечно малого количества и рассмотренных нами в предыдущей главе, перед ним встали новые проблемы обоснования. Эти проблемы относились к суммируемости рядов, разложимости функций в ряды различных типов, условий существования интегралов от заданных полных дифференциалов и т. п.

Интегральное исчисление. Создатели анализа бесконечно малых ввели интегральное исчисление, рассматривая обратные задачи своих исчислений. В теории флюксий Ньютона взаимная обратность задачи вычисления флюксий и флюент проступала особенно явно. У Лейбница вопрос был сложнее: интеграл появился вначале как определенный, как сумма бесконечно большого числа бесконечно малых дифференциалов. Однако и у него интегрирование практически сводилось к отысканию первообразных функций. Идея неопределенного интегрирования была вначале доминирующей.

Обратные задачи были поставлены при этом в самом общем виде. Интегральное исчисление включало еще в себя помимо интегрирования функций задачи и теорию дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, теорию специальных функций и т. п. Эти области математического анализа лишь постепенно отпочковались от интегрального исчисления в течение XVIII в. Интегральное исчисление в такой общей постановке необычайно быстро разрослось. Эйлеру понадобилось в 1768—1770 гг. три больших тома, чтобы дать его систематическое изложение. Первый том этого колоссального труда включал в себя в первой части собственно интегрирование функций; обыкновенные дифференциальные уравнения заняли вторую часть первого тома и весь второй том; третий том был отведен дифференциальным уравнениям с частными производными и вариационному исчислению. Однако, весь этот материал понимался еще все-таки как единое интегральное исчисление.

По Эйлеру, который выражал общепринятую точку зрения, интегральное исчисление являлось методом нахождения по данному соотношению между дифференциалами соотношения между самими количествами. Действие, которым это достигалось, называлось интегрированием. Исходным понятием такого исчисления, разумеется, был неопределенный интеграл. Само исчисление имело целью выработку методов отыскания первообразных функций для функций возможно более широкого класса.

Задача построения исчисления в основном была решена в течение первой половины XVIII в. Главные достижения в этом деле вначале принадлежали И. Бернулли, написавшему первый систематический курс интегрального исчисления (1742), затем — Эйлеру. Вклад последнего в интегральное исчисление необычайно велик. По справедливому замечанию Н. Н. Лузина об Эйлере, доведенные им до конца интеграции и найденные им квадратуры еще до сих пор образуют рамки всех современных курсов и трактатов по интегральному исчислению; математика в течение 150 лет после смерти Эйлера не могла пробить бреши в том кольце интеграций, которое было выковано Эйлером, и таким образом добавить новые квадратуры. В отношении интегрального исчисления современные учебники являются лишь переделками трактата Эйлера, только подновлением этого труда в отношении языка. Аналогичную оценку давал академик А. Н. Крылов.

Несмотря на кажущуюся чрезмерной категоричность этих суждений, они подтверждаются при конкретном рассмотрении знаменитого «Интегрального исчисления» Эйлера и сравнении его с современными учебниками по этой дисциплине. Интегральное исчисление в части методов неопределенного интегрирования достигло практически современного уровня во второй половине XVIII в.

Формирование совокупности методов нахождения первообразных функций сопровождалось выработкой общих понятий исчисления и соответствующей удобной символики. Эйлер, исходя из понятия неопределенного интеграла как основного, ввел целую систему определений. Интеграл вместе с произвольной аддитивной постоянной интегрирования он называл полным. Фиксирование произвольной постоянной приводило к частному интегралу. Значение последнего при некотором определенном значении аргумента давало эквивалент определенного интеграла.

Эту стройную последовательность оказалось невозможным выдержать в прикладных вопросах (в случае когда первообразная не является элементарной функцией), и в соответствующих приближенных вычислениях определенное интегрирование вводилось как суммирование в смысле, аналогичном современному. Необходимое видоизменение символа Лейбница

$$\int f(x)\,dx$$

для случая определенного интегрирования было тоже найдено не сразу. Символ Эйлера

$$\int f(x)\,dx \begin{bmatrix} ab\; x = a \\ ad\; x = b \end{bmatrix}$$

(где вместо $f(x)$ еще стояло p) получил с 1779 г., по предложению Лапласа, соответствующий термин «определенный интеграл». Привычный нам (кажущийся таким естественным) символ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

был изобретен и введен Фурье только в 1819—1822 гг.

Параллельно с развитием интегрального исчисления возникали обобщения операции интегрирования. В 1743 г. Клеро ввел криволинейные интегралы

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

взятые вдоль кривой, в книге «Теория фигуры земли, основанная на началах гидростатики» (русский перевод вышел в 1947 г.). В 1770 г. Эйлер в связи с практическими задачами разработал и ввел двойное интегрирование. Через два года (в 1772 г.) Лагранж, рассматривая задачу о притяжении эллипсоида вращения (опубликовано в 1775 г.), ввел в математику тройные интегралы.

В ходе развития интегрального исчисления появился ряд задач специального характера. Попытки их решения повели к разработке новых областей математического анализа. Последние рано или поздно отделились от своего первоначального источника — интегрального исчисления XVIII в.

В этом плане прежде всего следует упомянуть о теории дифференциальных уравнений и о вариационном исчислении. Их мы рассмотрим далее специально в соответствии с тем значением, которое эти отделы имели для дальнейшего развития математики.

Вычисление интегралов специальных видов уже в начале века привело к открытию ряда фактов теории специальных функций. Одним из первых было открытие эйлеровых интегралов первого и второго рода, т. е. соответственно бета-функции

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

(1730—1731) и гамма-функции

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx$$

(1729—1730).

Интегрирование по частям, примененное к гамма-функции, дает:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \qquad a > 0.$$

Если a — натуральное, то

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) = \ldots = a! \quad \Gamma(1) = a!$$

Это дало Эйлеру основание дать обобщенное определение факториала

$$n! = \int_0^\infty e^{x}x^{n-1}\,dx.$$

В случае бета-функции при натуральных a и b

$$B(a, b) = \frac{1}{bC_{a+b-1}^{a-1}}$$

подобные соображения позволяют обобщить (как и понятие факториала) понятие биномиального коэффициента на случай непрерывно изменяющихся аргументов. Доказательство абсолютной сходимости для $a>0$, $b>0$, разумеется, еще не могло быть дано, как и рассмотрение этих функций для комплексных значений аргумента.

Из числа многих специальных интегралов можно отметить «интегральный логарифм»:

$$\mathrm{li}(x)=\int_0^x \frac{dx}{\ln x}=\int_{-\infty}^{\ln x}\frac{e^t\,dt}{t},$$

приобретший вместе с функцией $\zeta(x)$ большое значение в аналитической теории чисел, например при исследовании проблемы распределения простых чисел в натуральном ряду.

Эйлер разложил интегральный логарифм $\mathrm{li}(e^{-x})$ в ряд:

$$\mathrm{li}(e^{-x})=c+\ln x-\frac{x}{1\cdot 1!}+\frac{x^2}{2\cdot 2!}-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots,$$

где c — постоянная Эйлера:

$$c=0{,}577215\ldots,$$

арифметическая природа которой не выяснена до настоящего времени.

Класс специальных, или трансцендентных, функций включал в себя также эллиптические функции, возникшие при обращении эллиптических интегралов, т. е. интегралов вида

$$\int R(x,\ \sqrt{P_n(x)})\,dx$$

(где R — знак рациональной функции, $n=3$ или $n=4$, а полином $P_n(x)$ не имеет кратных корней). Свое название эти интегралы получили за то, что через один из них

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha$$

(интеграл второго рода в нормальной форме Лежандра) выражается длина дуги эллипса

$$u=a\sin\alpha,\qquad v=b\cos\alpha \qquad (a<b)$$

$$L=\int_0^{\varphi}\sqrt{\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{dv}{d\alpha}\right)^2}\,d\alpha=\int_0^{\varphi}\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}\,d\alpha=$$

$$=a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha.$$

Интегралы этого вида были применены многими математиками XVIII в. для вычисления длин дуг различных кривых. В 1761 г. Эйлер открыл теорему сложения эллиптических интегралов, а идея их обращения была впервые высказана в конце XVIII в. Гауссом. Теория эллиптических функций в основном была построена в XIX в. в трудах Абеля, Якоби, Лиувилля и других математиков.

Как уже было сказано, указанные функции являются одним из видов специальных функций — трансцендентными. Они имеют своим общим источником интегралы, не выражающиеся через элементарные функции. Другой основной класс специальных функций появляется, как известно, при решении линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (функции Бесселя, Ламе, цилиндрические и т. д.).

При вычислении ряда трудных интегралов был применен также метод комплексных подстановок, связавший впоследствии интегральное исчисление с теорией функций комплексного переменного. Например, еще Даламбер и Эйлер утверждали, что

$$\varphi(x+iy) = M+iN$$

и одновременно

$$\varphi(x-iy) = M-iN.$$

Тогда

$$P+iQ = \int (M+iN)(dx+i\,dy),$$

$$P-iQ = \int (M-iN)(dx-idy),$$

откуда

$$P = \int M\,dx - N\,dy, \qquad Q = \int N\,dx + M\,dy.$$

Из того, что выражения под интегралами являются полными дифференциалами функций P и Q, следуют известные условия Даламбера—Эйлера

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}; \qquad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Например, для гамма-функции

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

применение этой идеи имеет следующий вид.

Эйлер (1781 г., опубликовано в 1794 г.) производит замену $x=ky$.

Тогда

$$\Gamma(n) = k\int_0^\infty e^{-ky}y^{n-1}\,dy.$$

Полагая затем

$$k = p + iq = r(\cos\alpha \pm i\sin\alpha),$$

он нашел

$$\int_0^\infty e^{-py}y^{n-1}\cos qy\,dy = \frac{\Gamma(n)\cos n\alpha}{r^n}$$

и

$$\int_0^\infty e^{-py}y^{n-1}\sin qy\,dy = \frac{\Gamma(n)\sin n\alpha}{r^n},$$

откуда в качестве частного результата (при $n=\frac{1}{2}$, $p=0$, $q=1$) получил интегралы, известные теперь под именем интегралов Френеля

$$\int_0^\infty \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \int_0^\infty \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(учитывая, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}).$$

Другой частный результат Эйлер получил, положив во втором уравнении $n\to\infty$, откуда

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\sin qx\,dx}{x} = \alpha = \operatorname{arctg}\frac{q}{p},$$

а затем ($p=0$, $q=1$)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Целью подобных подстановок является стремление получать интегралы функций от одной переменной. При этом иногда в качестве исходного берется такой интеграл, значение которого уже известно, чтобы получить новые, более сложные интегралы. Так, Эйлер в одной из работ применил подобный метод к интегралу

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z$$

и получил два новых интеграла

$$P = \int \frac{\cos(\vartheta + \omega)\, dv}{\sqrt{s}}; \quad Q = \int \frac{\sin(\vartheta + \omega)\, dv}{\sqrt{s}},$$

где

$$\vartheta = \mathrm{const};$$

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{v^2 \sin 2\vartheta}{1 - v^2 \cos 2\vartheta};$$

$$s = \sqrt{1 - 2v^2 \cos 2v + v^4}; \qquad \vartheta = \mathrm{const}.$$

Лаплас рассматривал интегралы с мнимыми пределами.

Эта область интегрального исчисления играла важную роль в создании теории функций комплексного переменного, в качестве одного из ее источников.

Итак, в течение XVIII в. в интегральном исчислении сформировалась совокупность методов, близкая к его нынешнему составу и уровню. Это исчисление также дало начало новым отделам математического анализа, как, например, теории специальных функций. От него отделились и превратились в самостоятельные области математики теория дифференциальных уравнений и вариационное исчисление. Интегральное исчисление послужило, наконец, одним из источников теории аналитических функций.

Дифференциальные уравнения. Перед создателями анализа задача интегрирования дифференциальных уравнений вначале выступила как часть более общей задачи: обратной задачи анализа бесконечно малых. Естественно, внимание вначале сосредоточилось на различных уравнениях первого порядка. Их решения разыскивались в виде алгебраических или элементарных трансцендентных функций с помощью более или менее удачно подобранных приемов. С целью сведения этой задачи к операции нахождения первообразных функций создатели анализа и их ученики стремились в каждом дифференциальном уравнении провести разделение переменных. Этот прием, которым теперь начинаются систематические учебные курсы теории дифференциальных уравнений, оказался, по-видимому, и исторически первым.

Около 1692 г. И. Бернулли нашел другой прием, использовав в ряде задач умножение на интегрирующий множитель. Этот же прием успешно применял в 1720 г. его сын Николай Бернулли. Постепенно выяснилось, что метод интегрирующего множителя, по-видимому, можно рассматривать как общий метод интегрирования уравнений вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

трудно, однако, осуществимый в части подбора этого множителя.

Арсенал приемов решения дифференциальных уравнений включал также замены переменных. Лейбниц (1693), а затем И. Бернулли с помощью подстановки $y=xt$ решали однородные уравнения первого порядка. Уравнение И. Бернулли

$$a\,dy = yp\,dx + by^n q\,dx$$

$$(a = \text{const},\ b = \text{const},\ p = p(x),\ q = q(x))$$

было с помощью подстановки $y^{1-n} = v$ преобразовано (Лейбницем в 1693 г., И. Бернулли в 1697 г.) в линейное дифференциальное уравнение первого порядка. В ходе решения этого уравнения И. Бернулли предвосхитил метод вариации постоянных, введенный в 1775 г. Лагранжем. Наконец, к 1700 г. И. Бернулли сумел решить линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\sum_{k=n}^{1} A_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} + y = 0,$$

вводя интегрирующий множитель вида x^p и последовательно понижая с его помощью порядок уравнения.

Эти, а также некоторые другие приемы имели, однако, разрозненный характер. Тем временем количество задач, сведенных к дифференциальным уравнениям, гигантски выросло. По существу все прикладные задачи анализа, известные в то время, требовали решения дифференциальных уравнений. Последние появились не только в большом количестве, но и в чрезвычайном разнообразии типов. Каждое из этих уравнений было продиктовано конкретной задачей математического естествознания, а его решение сулило открытие важной тайны природы или технического усовершенствования и овладение им.

Вопросы общей теории дифференциальных уравнений, разумеется, в начале XVIII в. не могли быть поставлены. Слишком был слаб аппарат, пригодный для решения дифференциальных уравнений, не выделены отдельные классы дифференциальных уравнений, не изучены их особенности. Оставался единственный путь — путь упорной, методической работы над решением возможно более широких классов уравнений. На этот путь стали все крупные математики того времени. Слишком важна и неотложна была задача. Количество сочинений и конкретных результатов, полученных ими, огромно и не поддается точному учету. Мы сможем здесь лишь наметить некоторые тенденции развития и указать на наиболее важные результаты.

Заметные результаты этой работы стали обнаруживаться уже в 20-х годах XVIII в. В 1724 г. итальянский математик Я. Риккати опубликовал разностороннее исследование уравнения, получившего, по предложению Даламбера (1769), название уравнения Риккати. Речь шла об интегрируемости в элементарных функциях нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^\alpha \tag{1}$$

(α, a, b — постоянные). Риккати рассматривал первоначально это уравнение в более сложном виде

$$x^n \frac{dq}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{q},$$

где y и q — любые функции от x. Однако ему пришлось упростить задачу, положив $q=x^n$.

Исследованием уравнения Риккати занимались многие математики: Г. Лейбниц, Х. Гольдбах, Я. Бернулли, Н. Бернулли, Д. Бернулли и др. Д. Бернулли установил (1724), что это уравнение интегрируется в элементарных функциях, если

$$\alpha = -2 \quad \text{или} \quad \alpha = -\frac{4k}{2k-1},$$

(k — целое число). В 1738 г. Эйлер применил к решению этого уравнения теорию рядов. В это же время он начинает рассматривать общее уравнение Риккати

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\, y^2 + Q(x)\, y + R(x)$$

($P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — непрерывные функции), частными видами которого являются не только специальное уравнение Риккати, но и уравнение Бернулли (при $R(x)=0$) и линейное дифференциальное уравнение (при $P(x)=0$). Эйлер же в 60-х годах XVIII в. обнаружил, что при наличии двух частных решений интегрирование уравнения Риккати сводится к квадратурам. Если же известен один частный интеграл v, то оно может быть преобразовано в линейное дифференциальное уравнение подстановкой

$$y = v + \frac{1}{z}.$$

Еще к концу 30-х годов XVIII в. Эйлер разработал алгоритм решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, основанный на понижении порядка некоторых однородных уравнений с помощью показательной функции. В 1743 г. в одной из работ Эйлера был опубликован метод решения линейного однородного дифференциального уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами при помощи подстановки

$$y = e^{k.x},$$

а в случае кратных действительных корней характеристических уравнений — подстановки

$$y = ue^{kx}.$$

В случае наличия пары комплексных корней $\alpha \pm \beta i$ подстановка того же типа

$$y = ue^{\alpha x}$$

сводит задачу к уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \beta^2 u = 0,$$

тригонометрический вид решения которого был известен Эйлеру еще с 1740 г.

Через несколько лет (в 1753 г.) для понижения порядка уравнения

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} = X.$$

Эйлер применил множитель e^{mx}. Затем он предположил, что решение нового уравнения имеет вид

$$e^{mx}\left(A_1 y + B_1 \frac{dy}{dx}\right) = \int X e^{mx}\, dx,$$

где A_1 и B_1 — неопределенные коэффициенты. Эти коэффициенты, а также m, он нашел дифференцированием обоих членов этого уравнения и почленным сравнением.

Даламбер (в 1766 г.) нашел, что общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме некоторого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Многие ученые (в особенности Клеро и Эйлер) интенсивно разрабатывали метод интегрирующего множителя. Помимо отыскивания специальных видов интегрирующего множителя для отдельных классов уравнений были поставлены более общие задачи. Так, в 1768—1769 гг. Эйлер исследовал классы дифференциальных уравнений первого порядка, обладающих интегрирующим множителем данного типа, и делал попытки распространить эти исследования на уравнения высших порядков.

По инициативе Эйлера в 30-х годах сложилось и окрепло убеждение, что для интегрирования дифференциальных уравнений даже простых, казалось бы, классов, множества элементарных функций и простейших трансцендентностей недостаточно. В этих целях внутри теории дифференциальных уравнений приходилось ограничиваться тем, чтобы выразить решения в квадратурах; методы же вычисления интегралов, получающихся при этом, были вынесены в собственно интегральное исчисление.

Наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями были найдены решения отдельных уравнений с частными производными. Уже около 1735 г. Эйлер, занимаясь различными задачами о траекториях, пришел к «модулярным», или «параметрическим», уравнениям

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y),$$

а также

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F(x, y, z),$$

называемым так потому, что речь идет о семействе кривых, в уравнения которых входит переменный параметр, или, по терминологии того времени, модуль. Применение интегрирующего множителя R ко второму уравнению дало Эйлеру условие интегрируемости в виде

$$\frac{\partial R}{\partial x} = F\frac{\partial R}{\partial z} + R\frac{\partial F}{\partial z},$$

откуда он нашел выражение для интегрирующего множителя

$$\ln R = \int \frac{\partial F}{\partial z}\, dx.$$

Несколько дифференциальных уравнений с частными производными решил Даламбер, в том числе уравнение колеблющейся струны, о котором речь шла выше.

Таким образом, в области решения дифференциальных уравнений в первой половине XVIII в. работа состояла в решении отдельных специфических уравнений. В этот период были выработаны предпосылки для создания первых форм общей теории, в том числе ряд основных понятий.

В 1743 г. появились понятия частного и общего интегралов, найденные Эйлером еще в 1739 г. Они были опубликованы в мемуаре, где речь идет об едином алгоритме решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. В работах этих лет Эйлер рассмотрел и особые решения ряда дифференциальных уравнений, которые были известны еще из «Methodus incremenforum etc» Тейлора (1715).

Тейлор обнаружил особое решение, рассматривая уравнение

$$4x^3 - 4x^2 = (1 + z^2)^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2. \qquad (1)$$

Подстановками

$$x = \frac{v}{y^2}, \quad v = 1 + z^2$$

он преобразовал (1) в уравнение

$$y^2 - 2zyy' + vy'^2 = 1. \qquad (2)$$

Продифференцировав

$$2y''(vy' - zy) = 0,$$

а затем приравняв

$$vy' - zy = 0$$

и подставив в уравнение (2)

$$y' = \frac{zy}{v},$$

Тейлор получил

$$y^2 = v, \ x = 1,$$

которое он назвал «некоторым особым решением задачи».

Неразъясненность этого вида решения, не содержащегося в общем решении, побудившая Тейлора назвать его «особым», сохранилась в сочинениях Клеро, рассматривавшего (в 1736 г.) особое решение уравнения

$$y = (x+1)\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Эйлер, однако, уже в 1736 г. обнаружил, что если найден интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ дифференциального уравнения, то $\frac{1}{\mu} = 0$ может дать особое решение. Например,

$$x\,dx + y\,dy = \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}\,dy$$

имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}},$$

а особое решение будет

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Лишь в 1774—1776 гг. Лагранж сумел детально выяснить, как получать особые решения: либо непосредственно из дифференциального уравнения, либо из общего решения дифференцированием по постоянной. Он же дал геометрическую интерпретацию особого решения как огибающей семейства интегральных кривых. Систематическое и единое изложение всех сведений об особых решениях обыкновенных дифференциальных уравнений Лагранж дал в 1801 г. в «Лекциях об исчислении функций».

Возвратившись к общей характеристике положения дел, мы можем заметить, что практические успехи, достигнутые крупнейшими учеными XVIII в. в решении дифференциальных уравнений, оказались в 60-х годах настолько значительными, что создалась объективная возможность для построения общей теории дифференциальных уравнений.

Эта общая теория была изложена впервые Эйлером в его знаменитом сочинении: «Интегральное исчисление». Оно, как мы уже указывали, состоит из трех томов, вышедших в свет последовательно в 1768, 1769 и 1770 гг., и завершает серию книг Эйлера, посвященных систематическому построению современного ему анализа и его приложений. Теория дифференциальных уравнений — обыкновенных и с частными производными — составляет основное содержание этого труда. Ему предшествует лишь интегрирование функций, занявшее первую половину первого тома. За ним следует только вариационное исчисление, составляющее приложение к третьему тому.

Дифференциальные уравнения в эти годы находились в стадии самой энергичной разработки и поисков методов решения новых и новых типов уравнений. Эйлер впервые в «Интегральном исчислении» дал строгую и четкую классификацию всех известных уравнений и систематически изложил способы их решения вплоть до самых современных, «не так давно найденных», по его выражению, результатов. Огромное количество последних найдено самим Эйлером. Таким образом, теория строилась как совокупность методов решения уравнений, а эти последние рассматривались в связи с физической задачей, породившей их. При таком состоянии теории дифференциальных уравнений еще не появилась потребность в постановке задач о теоремах существования и единственности, столь характерных для более позднего периода.

По-видимому, не представляется целесообразным описывать содержание всего этого огромного труда Эйлера, изобилующего практически трудно обозримым на ограниченном числе страниц множеством конкретных методов и результатов. Кроме того, это сочинение издано полностью в переводе на русский язык. Поэтому перейдем к характеристике основных направлений в теории дифференциальных уравнений, сложившихся во второй половине XVIII в.

Более отчетливо эти основные направления проявились в области обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти направления порождены, как правило, потребностями решения прикладной задачи или группы их. Вокруг них концентрировались наибольшие усилия и наибольшее количество работ.

Первое из направлений состояло в развитии теории линейных дифференциальных уравнений, главным образом второго порядка, и их систем как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. К такого рода уравнениям приводили задачи о малых колебаниях материальных точек и их систем с конечным числом степеней свободы. Примером подобных задач являются задачи, связанные с конструированием маятниковых часов и применением маятниковых аппаратов для гравиметрических исследований. К этому классу относятся и задачи о колебательных движениях часовых пружин, вставшие тотчас, как была выяснена ограниченность применения маятниковых часов. Переход от колебаний точки к колебаниям систем последних повлек за собой расширение задачи на случай бесконечного числа степеней свободы: колебаний столба воздуха, струны и т. п.

Проблемы аналитической динамики точки и системы точек выдвинули в качестве другого главного направления теории дифференциальных уравнений развитие методов решения нелинейных уравнений первого и второго порядка и их систем. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки выражается нелинейной системой трех уравнений второго порядка относительно $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ — так называемых углов Эйлера, выраженных в функциях от времени. Движение центра тяжести планеты в солнечной системе выражается решением квазилинейной системы

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + R^2 \frac{x_i}{\left(\sum_i x_i^2\right)^{3/2}} = 0$$

$$(i = 1, 2, 3; \qquad k = \text{const}).$$

Квазилинейными в общем случае оказываются и уравнения Эйлера, появляющиеся в вариационном исчислении при решении задачи об экстремуме функционала

$$\int_a^b F(x, y, y')\, dx.$$

Нелинейное уравнение второго порядка получается, в частности, в задаче о нахождении геодезических на поверхностях. К уравнениям того же вида приводились решения уравнений движения точки в сопротивляющейся среде.

Сложность проблемы решения уравнений и невозможность сплошь и рядом интегрировать их в конечном виде послужили основной причиной возникновения третьего большого направления. Речь идет о разработке приближенных методов решения дифференциальных уравнений. Классический метод ломаных, ныне широко применяющийся в теоремах о существовании и единственности решения уравнения,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

с начальными условиями $x=x_0$, $y=y_0$ был найден и опубликован в 1768 г. Эйлером. Задачи небесной механики, поставленные с учетом возмущающих сил, явились первым объектом применения методов приближенного интегрирования. Учитывая сравнительную малость эксцентриситетов орбит планет и возмущающих сил, решение задается в первом приближении в виде круговой орбиты, которая затем исправляется.

Геометрические приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений, выделившиеся в особую область математики — дифференциальную геометрию, оставили свой след и в теории самих уравнений. Теория особых решений составила заметное направление в общей теории дифференциальных уравнений. Изучение семейств интегральных кривых и решение задач о нахождении огибающих и изогональных траекторий, перенесение результатов на семейства поверхностей — таков путь исследований в этом, четвертом, направлении. Его значение возросло, когда в качестве первоочередных встали проблемы существования и единственности решения дифференциальных уравнений.

Исследования в области создания теории дифференциальных уравнений в частных производных, несмотря на свою многочисленность, не давали еще возможности столь четко выделить основные направления. Задача была еще слишком сложной. И хотя к дифференциальным уравнениям в частных производных было сведено большое число задач физики, механики и теории поверхностей, решение их продвигалось медленно.

Систематическая работа в этом направлении начала развертываться лишь в 60-х годах. Начало ей положил Эйлер. Ему же принадлежит первая монография, где сделана попытка построения теории дифференциальных уравнений с частными производными. Речь идет о третьем томе «Интегрального исчисления», вышедшем в 1770 г. Наряду с Эйлером теорию уравнений с частными производными разрабатывали Даламбер, Лагранж, Лаплас, Монж и многие другие ученые.

Одной из главных идей, сравнительно быстро утвердившихся в теории уравнений первого порядка, была идея сведения их интегрирования к интегрированию обыкновенных уравнений или их систем. Ее использовал Даламбер (1768) при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Аналогичные методы развивал Эйлер. Метод сведения общего линейного дифференциального уравнения

$$Pp + Qq = R$$

к интегрированию системы

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

разработанный в 1776 г. Лапласом и Лагранжем, поныне входит в учебники. Когда несколько позднее (в 1781, 1787 гг.) Лагранж распространил этот метод на линейные уравнения с любым числом переменных, он открыто высказал, что решение уравнений с частными производными зависит от искусства сведения их к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

В решении нелинейных уравнений первого порядка Эйлер (1770) показал, что дифференциальное уравнение с тремя переменными всегда можно привести к линейному уравнению с четырьмя переменными. Этот результат был развит в работах Лагранжа (1774), Монжа (1787), Шарпи (1784). Последний довел до конца решение нелинейного уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными. Идея метода состояла в том, что к уравнению

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

подбирают другое уравнение,

$$u(x, y, z, p, q) = a,$$

так, чтобы эта система из двух уравнений была вполне интегрируема. Определяемые из системы уравнений функции

$$p = p(x, y, z, a), \quad q = q(x, y, z, a)$$

приводят, как мы теперь знаем, к уравнению Пфаффа

$$dz = p(x, y, z, a)\,dx + q(x, y, z, a)\,dy.$$

Интеграл этого уравнения

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0,$$

где a и b — произвольные постоянные, будет полным интегралом уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Об этом методе, который до сих пор продолжает входить в монографии по дифференциальным уравнениям, стало известно, однако, лишь в 1814 г. О нем сообщил французский академик Лакруа, так как Шарпи вскоре после представления своего мемуара в Парижскую академию скончался. Шарпи не мог распространить свой метод на уравнения с большим числом переменных. Эта трудность была преодолена в XIX в. в трудах К. Якоби и Пфаффа.

В ходе разработки методов решения дифференциальных уравнений первого порядка выяснились виды их решений, взаимоотношения между ними и введена терминология, сохранившаяся до настоящего времени. Итоги этого процесса подвел Лагранж в работах 1774 и 1776 гг. Так, решение, зависящее от двух произвольных постоянных, получило название полного. Если в полном решении

$$z = \varphi(x, y, a, b)$$

положить

$$b = \psi(a),$$

где $\psi(a)$ — произвольная функция, а из уравнений

$$z = \varphi(x, y, a, \psi(a)) \text{ и } \frac{\partial z}{\partial a} = 0$$

исключить a, то получится решение, названное общим. Наконец, исключение a и b из уравнений

$$z = \varphi(x, y, a, b), \ \frac{\partial z}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial z}{\partial b} = 0$$

давало решение, получившее название специального, а затем особого. Так как решение дифференциальных уравнений не всегда сводится к квадратурам, то Лагранж был вправе ввести разные термины: решение уравнения и его интеграл.

Наряду с аналитически-вычислительными методами решения уравнений развивалась и геометрическая теория их решений. Вообще, теория дифференциальных уравнений с частными производными оказалась тесно связанной с задачами и понятиями геометрии (теории поверхностей и пространственных кривых). Это направление было развито в серии великолепных работ Г. Монжа. Эту группу вопросов мы рассмотрим в главе V, посвященной развитию геометрии в XVIII в.

Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка возникали преимущественно в ходе решения физических задач. Из них прежде всего следует указать на задачу о колебании струны, приведенную к уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

о чем говорилось в предыдущей главе. Около 1760 г. Эйлер, разрабатывая проблемы гидродинамики, вывел уравнение объемного расширения жидкости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Для этого уравнения Эйлер нашел частное решение, а в одном случае (когда движение совершается по направлению к неподвижному центру, а скорости на поверхностях соответствующих сфер одинаковы) — общий интеграл. Задачу о колебании мембран Эйлер в 60-х годах XVIII в. свел к уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Его решение он нашел в виде ряда для трансцендентной функции, которую мы теперь называем цилиндрической, или (что совсем не обосновано) бесселевой, по фамилии немецкого астронома Ф. В. Бесселя.

Задачи о колебании газа в трубах различных профилей, теории потенциала и др. приводили также к уравнениям второго порядка. Дифференциальные уравнения с частными производными составили особый многочисленный класс уравнений XVIII в.

Что касается уравнений более высокого порядка, то они имели эпизодический характер.

Исследования уравнений второго порядка были многочисленными, но создание общей теории сталкивалось с непреодолимыми в то время затруднениями. Первые успехи наметились к 1770 г., когда Эйлер применил преобразования линейных дифференциальных уравнений второго порядка к каноническим формам. Например, уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

подстановками
$$t = x + ay, \quad u = x - ay$$
приводится к виду
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial t} = 0.$$
Общий интеграл этого уравнения имеет вид:
$$z = f(t) + \varphi(u) = f(x + ay) + \varphi(x - ay).$$
Таким путем было начато выделение канонических типов дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Общее линейное дифференциальное уравнение с частными производными
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \beta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z + T = 0,$$
где коэффициенты и свободный член являются некоторыми функциями от x и y, рассматривал Лаплас (1777), создавший для его решения единый метод, получивший название метода каскадов.

Сущность этого метода, как и для общего линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка
$$\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + \psi(x, y, z) = 0,$$
которое решал Лаплас, состоит в замене переменных. Введя две новые переменные s и s_1, Лаплас приходит к уравнению, носящему ныне его имя
$$\frac{\partial^2 u}{\partial s\, \partial s_1} + m \frac{\partial u}{\partial s} + n \frac{\partial u}{\partial s_1} + lu + T = 0,$$
или, кратко, $D(u) = 0$.

Если $\varphi(s)$ и $\psi(s_1)$ — две произвольные функции и если составить
$$\varphi_1(s) = \int \varphi(s)\, ds, \quad \varphi_2(s) = \int \varphi_1(s)\, ds, \ \ldots$$
$$\psi_1(s_1) = \int \psi(s_1)\, ds_1, \quad \psi_2(s_1) = \int \psi_1(s_1)\, ds_1, \ \ldots$$
то решение можно записать в виде ряда
$$u = A_0\varphi_1(s) + A_1\varphi_2(s) + A_2\varphi_3(s) + \ldots +$$
$$+ B_0\psi_1(s_1) + B_1\psi_2(s_1) + B_2\psi_3(s_1) + \ldots$$

Подстановка этого выражения в уравнение $D(u)=0$ даст для определения коэффициентов A_0, $A_1, \ldots$, B_0, $B_1, \ldots$ дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial A_0}{\partial s_1}+mA_0=0; \qquad \frac{\partial B_0}{\partial s}+nB_0=0;$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial s_1}+mA_1+D(A_0)=0; \qquad \frac{\partial B_1}{\partial s}+nB_1+D(B_0)=0;$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial s_1}+mA_2+D(A_1)=0; \qquad \frac{\partial B_2}{\partial s}+nB_2+D(B_1)=0;$$

. . . .

Если ряд для u обрывается, т. е. для некоторого k будет иметь место $A_k=0$, $B_k=0$, то общий интеграл выражается в конечном виде. Если же это не имеет места, Лаплас представляет решение не рядом, а с помощью определенных интегралов. Он показал, что в этом случае

$$u=\int_0^s p\,\varphi(z)\,dz+\int_0^{s_1} p_1\psi(z)\,dz,$$

где p и p_1 — частные интегралы $D(u)=0$

$$p=\int_0^s \Gamma(s-z)\,\varphi(z)\,dz, \qquad p_1=\int_0^{s_1} \Pi(s-z)\,\psi(z)\,dz,$$

а в этих интегралах

$$\Gamma(s-z)=\sum_{k=1}^{\infty} A_{k-1}\frac{(s-z)^{k-1}}{(k-1)!};$$

$$\Pi(s-z)=\sum_{k=1}^{\infty} B_{k-1}\frac{(s-z)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Лаплас показал, что его метод является более общим, чем все другие. В случае, например, когда l, m, n — постоянные в уравнении $D(u)=0$,

$$T=0, \quad m=\frac{f}{s+s_1}, \quad n=\frac{g}{s+s_1}, \quad l=\frac{h}{s+s_1},$$

получается частный случай интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Дальнейшие усовершенствования, внесенные в метод каскадов Лагранжем и Лапласом, привели этот метод к современному виду.

Подведем итоги. Аппарат математического анализа в течение XVIII в. развился необычайно быстро, приняв формы и объем, близкие к современному. Дифференцирование, а также интегрирование в элементарных функциях по существу были в основном завершены. Важнейшей частью математического анализа в его оперативно-алгоритмической трактовке постепенно сделались дифференциальные уравнения, как обыкновенные, так и с частными производными. Вместе с разработкой методов решения отдельных классов уравнений формировались элементы общей теории.

В области обыкновенных дифференциальных уравнений были выявлены основные их типы, поддающиеся решению в квадратурах, найдены приемы приближенного их решения. Сформулированы и сделались общепринятыми понятия общего и особого решения. В части дифференциальных уравнений с частными производными проведены частичная классификация и выделение канонических типов, а также накоплено множество частных приемов решения.

Однако теория дифференциальных уравнений не могла долго развиваться как совокупность частных приемов, пригодных для решения немногочисленных классов уравнений. Накопление этих приемов необходимо, но недостаточно для построения общей теории. Перед математиками все более остро вставала проблема существования решения и установления его характера. Решения образовывали класс функций, неизмеримо более широкий, чем класс первообразных от элементарных функций. Практические успехи теории дифференциальных уравнений и ее многообразные связи с теорией функций комплексного переменного, специальными функциями, вариационным исчислением, и особенно с задачами математической физики, делали проблему создания общей теории особенно настоятельной.

В заключение главы приведем схему интегрального исчисления в XVIII в. для облегчения понимания его сложной структуры и процесса отпочкования от него различных дисциплин. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными приведена в соответствие со структурой третьего тома «Интегрального исчисления» Эйлера. В схему включено как часть интегрального исчисления и вариационное исчисление; истории этого исчисления посвящена следующая глава книги.