ГЛАВА IV

СОЗДАНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Вариационное исчисление является одним из актуальных отделов современного математического анализа. Входя в качестве составной части в функциональный анализ, оно тесно связано со многими математическими науками. Вариационные методы проникают в различные области математики, механики, физики, техники, создавая всякий раз возможности непосредственных приложений. Вариационное исчисление продолжает обогащать свое содержание за счет связанных с ним наук.

Вариационное исчисление возникло в XVIII в. В трудах Эйлера, а затем Лагранжа и Эйлера оно получило вид стройной математической теории. Последняя тотчас доказала свою полезность, так как методами этой теории оказалось возможным решить большое число задач практического характера. Возникновение вариационного исчисления и его выделение в самостоятельную математическую дисциплину, разрабатывающую общие методы определения экстремумов функционалов, были обусловлены необходимостью решения особого класса геометрических, механических и физических экстремальных задач практического характера. За задачами этого класса установилось название вариационных задач.

Вариационные задачи. В истории математики задачи этого типа были поставлены и подвергались исследованию очень давно. Примерами могут служить античная теория изопериметров и многочисленные высказывания экстремального характера в физике (механике и оптике). Однако мы их не будем здесь рассматривать, так как способы решения этих

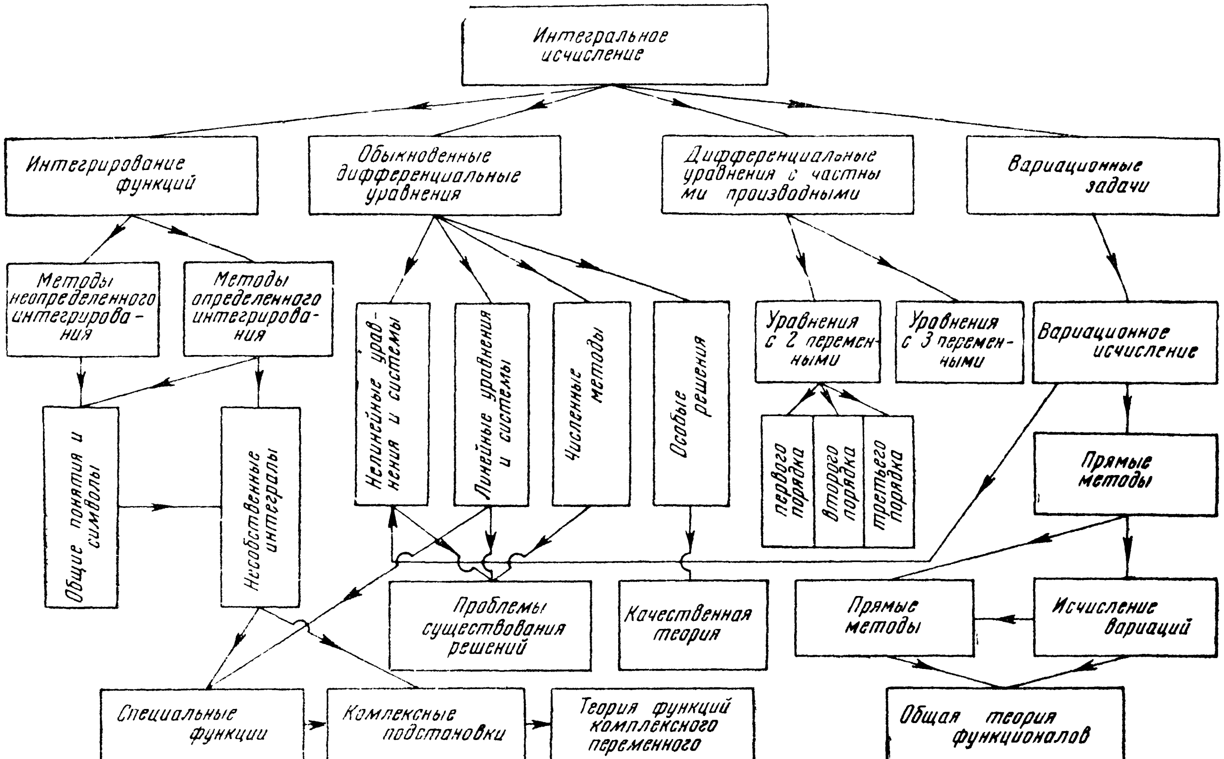
Интегральное исчисление
Интегрирование функций
Обыкновенные дифференциальные уравнения
Дифференциальные уравнения с частны ми производными
Вариационные задачи
Методы неопределенного интегрирова-ния
Методы определенного интегрирова-ния
Нелинейные урав-нения и системы
Линейные уравнения и системы
Численные методы
Особые решения
Уравнения с 2 перемен-ными
Уравнения с 3 перемен-ными
Вариационное исчисление
первого порядка
второго порядка
третьего порядка
Общие понятия и символы
Несобственные интегралы
Прямые методы
Проблемы существования решений
Качественная теория
Прямые методы
Исчисление вариаций
Специальные функции
Комлексные подстановки
Теория функций комплексного переменного
Общая теория функционалов

Рис. 2

экстремальных задач были еще индивидуальными и по существу специального исчисления составить не могли. К концу XVIII в. сложилась совсем иная обстановка. Накопились и были выделены в отдельный класс экстремальные задачи особого рода, не поддающиеся решению средствами только что возникшего анализа бесконечно малых. Это была, во-первых, задача Ньютона, поставленная и решенная им в «Математических началах натуральной философии» (1687). В ней требовалось найти кривую, проходящую через две данные точки и такую, чтобы она при вращении вокруг данной оси образовывала тело вращения, испытывающее наименьшее сопротивление при движении вдоль оси. Другими вариационными задачами оказались: задача о брахистохроне (1696) — кривой, по которой осуществляется быстрейший спуск материальной точки из одной точки пространства в другую; изопериметрическая задача (1697); задача о геодезических линиях на поверхностях (1697). По существу разработке были подвергнуты, уже в то раннее время, все основные типы вариационных задач.

Решения указанных задач были постепенно найдены в конце XVII—начале XVIII в. Ньютон для высказанной им задачи дал эквивалент дифференциального уравнения в форме геометрической пропорции. Задача о брахистохроне была решена И. Бернулли, а затем Ньютоном, Лейбницем и Я. Бернулли. Изопериметрическая задача и задача о геодезических были решены также одновременно несколькими учеными. Методы решения были недостаточно общими, специальными, но в них все яснее проявлялись общие черты. Создавались возможности для выработки общего метода.

Создание вариационного исчисления. Прямой метод Эйлера. Общий метод решения вариационных задач был выработан в серии работ Эйлера в 1726—1744 гг. Вначале он, рассмотрев методы решения задачи о брахистохроне, поставил (1726) эту же задачу в условиях сопротивления, оказываемого средой. Затем (1728) он вывел дифференциальное уравнение геодезической линии на поверхности. Малая общность и недостаточность приемов, применяемых при решении задач уже осознанного в своем своеобразии класса, не удовлетворяли Эйлера. Он предпринял поиски общего метода и к 1732 г. отыскал его. В соответствующей статье Эйлера «Общее решение изопериметрической задачи, поставленной в самом широком смысле» мы находим первую общую постановку одномерной вариационной задачи.

Эта работа Эйлера интересна в особенности тем, что она знаменует начало характерного для развития математических исчислений диалектического переворота, когда решения отдельных задач начинают рассматриваться как приложения общего метода. Последний же делается предметом исчисления.

Эйлер классифицирует задачи, где отыскиваются, по его выражению, кривые, обладающие экстремальным свойством. При этом в качестве экстремального избрано свойство интегралов частных видов, взятых вдоль кривой, принимать максимальные или минимальные значения. Классификация Эйлера такова: а) из всех вообще кривых определить ту, которая обладает экстремальным свойством A; б) из семейства кривых, обладающих общим свойством A, выбрать экстремаль относительно свойства B; в) из совокупности кривых, обладающих двумя свойствами A и B, выделить экстремаль относительно свойства C и т. д.

Свойствами, или, как мы теперь говорим, функционалами, у Эйлера являются интегралы. Почти все они имеют вид

$$\int f(x, y, y')\, dx.$$

Метод опирается на: а) идею сохранения экстремального значения свойства, когда элемент экстремали заменен элементом другой близкой кривой, б) принцип Лейбница— Я. Бернулли, что экстремаль сохраняет свои экстремальные свойства в любой своей части. Метод состоит в варьировании одной, двух и т. д. (в зависимости от вида задачи) ординат и в приравнивании значений свойств соответствующего элемента экстремали до и после варьирования.

Через четыре года (в 1736 г., опубликовано в 1741 г.) Эйлер обобщил этот метод на интегралы вида

$$\int_a^b Q(x, y, s, y', y'')\, dx,$$

где

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Наконец, к 1744 г. метод Эйлера приобрел столь большую общность, что перерос в специальное исчисление, систематически изложенное Эйлером в книге «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле» — первой в истории книге по вариационному исчислению.

Постановка задачи в руках Эйлера обернулась. Вместо стремления решить еще одну трудную вариационную задачу или целый их класс Эйлер выдвинул общий метод, применяющийся затем к решению различных видов таких задач. Этот метод, который Эйлер называл «методом максимумов и минимумов в применении к кривым линиям», имеет своей первоначальной, самой общей целью отыскание кривых линий, для которых какая-либо наперед заданная величина достигает своего наибольшего или наименьшего значения. Рассмотрим этот метод по существу.

Сформулированная только что задача еще поставлена недостаточно определенно. Эйлер вводит следующие условия определенности: а) задача ставится и решается для одного и того же отрезка оси абсцисс; б) вводятся два вида экстремумов: абсолютный и относительный; в) определяется вид функционала как «неопределенной интегральной величины»

$$w = \int_{x_0}^{x} Z(x, y, y', y'', \ldots)\, dx.$$

Идеи, положенные Эйлером в основу абсолютного метода максимумов и минимумов, сравнительно просты. Пусть необходимо среди всех возможных кривых на отрезке $[x_0, x]$ выбрать такую $f(x, y) = 0$, чтобы интеграл

$$w = \int_{x_0}^{x} Z\, dx$$

принимал экстремальное значение. Всякую кривую $y = y(x)$, определенную в некоторой области значений $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, Эйлер заменяет полигоном, абсциссы вершин которого выбираются на оси Ox на равных расстояниях друг от друга. Это, по мысли Эйлера, давало возможность с любой степенью точности аппроксимировать кривую.

«Интегральную формулу максимума и минимума»

$$I = \int_{x_0}^{x} Z(x, y, y', y'', \ldots)\, dx$$

он заменяет суммой вида

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} Z(x_i, y, y', y'', \ldots)\, dx,$$

где

$$dx = \frac{x - x_0}{n}, \quad x_i = x_{i-1} + dx,$$

а y_i — ординаты в фиксированных точках x_i. Кроме того, заменяя производные отношениями конечных разностей:

$$y'_i = p_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{dx}; \quad y''_i = q_i = \frac{y'_{i+1} - y'_i}{dx} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{dx^2}, \ldots$$

Эйлер добивается возможности рассматривать значение формулы максимума или минимума для данной кривой как функции ординат:

$$I = F(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

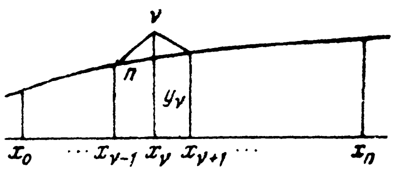

Рис. 3

Затем решается обычная экстремальная задача: варьируется некоторая произвольная ордината y_ν; разность значений I, соответствующих неизмененной и варьированной кривой, приравнивается нулю. Тем самым получается дифференциальное уравнение экстремали.

Таким образом, Эйлер сводил решение вариационной задачи к решению другой — об экстремуме функции многих переменных (ординат). Этот метод в руках Эйлера сделался универсальным для любого типа вариационных задач и являлся основным для вариационного исчисления в созданной первоначально Эйлером форме.

Пусть для простоты $z = z\ (x, y, y')$. Тогда

$$\int Z(x, y, y')\, dx$$

заменяется на

$$\sum_{i=0}^{n-1} Z\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{dx}\right) dx.$$

Ордината y_ν испытывает приращение на $n\nu$. Тогда в указанной сумме изменятся только члены, содержащие y_ν. Это

$$Z\left(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, \frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{dx}\right) dx \quad \text{и} \quad Z\left(x_\nu, y_\nu, \frac{y_{\nu+1} - y_\nu}{dx}\right) dx.$$

Чтобы вычислить их приращения, Эйлер дифференцировал Z по x, y, p и заменял дифференциалы dx_i, dy_i, dp_i приращениями соответствующих величин x_i, y_i, p_i.

$$dZ(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, p_{\nu-1}) = M\,dx_{\nu-1} + N\,dy_{\nu-1} + P\,dp_{\nu-1},$$
$$dZ(x_\nu, y_\nu, p_\nu) = M'\,dx_\nu + N'\,dy_\nu + P'\,dp_\nu.$$

Так как приращение получает лишь y_ν, то

$$dx_{\nu-1} = dx_\nu = dy_{\nu-1} = 0, \quad dy_\nu = +n\nu,$$
$$dp_{\nu-1} = +\frac{n\nu}{dx}, \quad dp_\nu = -\frac{n\nu}{dx}.$$

Следовательно, величина приращения

$$Z(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, p_{\nu-1})\,dx + Z(x_\nu, y_\nu, p_\nu)\,dx$$

будет

$$Pn\nu + N'n\nu\,dx - P'n\nu.$$

Но, пишет Эйлер, «$P' - P = dP$, а вместо N' можно писать N». Тогда

$$Pn\nu + Nn\nu\,dx - P'n\nu = 0$$

или

$$-dP + N\,dx = 0,$$

т. е.

$$N - \frac{dP}{dx} = 0,$$

что в привычных нам символах означает

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dZ}{dy'}\right) = 0$$

дифференциальное уравнение Эйлера.

Будучи распространен на случаи, в которых подынтегральное выражение зависит от производных более высокого порядка, этот метод приводит к уравнению вида

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots = 0.$$

При этом Эйлер не останавливается перед возможностью неограниченного продолжения этого ряда. Он лишь отмечает, что дифференциальное уравнение кривой всегда будет иметь порядок в два раза больший, чем формула максимума или минимума. Из этого замечания естественно вытекает условие, обеспечивающее определенность задачи: среди всех кривых. проходящих через $2n$ заданных точек, определить ту, для которой $\int Zdx$, где

$$Z = Z(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

был бы максимумом или минимумом.

Изложение метода, данное Эйлером, очевидно, не удовлетворяет требованиям современной научной строгости. В нем не обоснованы, в частности, вопросы законности перехода к пределу и перестановки предельных переходов. Не доказано также, дает ли предел экстремумов аппроксимирующих функций экстремум функционала. Однако необходимо помнить, что для Эйлера требования научной строгости в смысле, принятом в XX в., не могли и стоять. Кроме того, исследование указанных вопросов повело бы не только к отысканию дифференциального уравнения экстремали, но и к аппроксимации решения этого уравнения решением системы обыкновенных уравнений, что выходило за пределы поставленной Эйлером задачи.

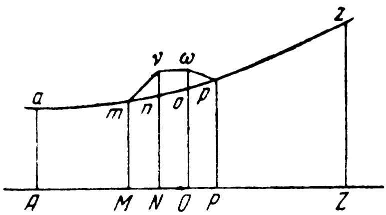

Рис. 4

Метод Эйлера решения задач на относительный экстремум имеет целью отыскание экстремали не среди всех кривых, определяемых на данном участке оси абсцисс, но среди некоторого их семейства, каждая из кривых которого обладает одним или несколькими свойствами. Если дополнительное условие состоит в сохранении постоянного значения другого (или нескольких) функционала — интеграла, то получается обобщенная изопериметрическая задача. Эйлер приводит ее к задаче на вычисление абсолютного интеграла следующим образом.

Чтобы удовлетворить сразу двум условиям (если речь идет о кривых, обладающих одним общим свойством) — неизменности значения общего свойства B и формуле максимума или минимума A, — необходимо дать приращения не одной, а двум соседним ординатам. «Дифференциальные значения» обоих свойств будут иметь в силу изменения двух ординат y_ν и $y_{\nu+1}$ (см. рис. 4 на стр. 83) на $n\nu$ и $o\omega$ соответственно следующий вид:

$$dA_\nu \cdot n\nu + dA_{\nu+1} \cdot o\omega;$$

$$dB_\nu \cdot n\nu + dB_{\nu+1} \cdot o\omega.$$

Из заданных условий (экстремальности A и постоянства B) следует, что оба эти выражения должны быть приравнены нулю:

$$dA_\nu \cdot n\nu + dA_{\nu+1} \cdot o\omega = 0;$$

$$dB_\nu \cdot n\nu + dB_{\nu+1} \cdot o\omega = 0.$$

После исключения из этой системы двух уравнений $n\nu$ и $o\omega$ Эйлер получал уравнение искомой кривой

$$\alpha\, dA + \beta\, dB = 0$$

($\alpha = \mathrm{const}$, $\beta = \mathrm{const}$). То же уравнение получается, если искать кривую, для которой выражение $\alpha A + \beta B$ достигает абсолютного экстремума.

Указанный метод Эйлер распространил и на еще более сложные случаи: а) подынтегральная функция Z в выражении функционала сама представляет собой функционал; б) эта подынтегральная функция задана посредством дифференциального уравнения, способ решения которого не известен. Такой, например, являлась у Эйлера задача о брахистохроне в сопротивляющейся среде. Как нашел Эйлер, здесь идет речь о нахождении максимума выражения

$$\int_0^l \frac{dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{v}}$$

при условии

$$dv = g\,dx - hv^n\,dx\,\sqrt{1+p^2}.$$

При этом он правильно решил вопрос о границах применимости так называемого принципа Лейбница—Бернулли о наличии экстремального свойства в каждой точке экстремали.

В книге Эйлера приведено большое число примеров (свыше 60), иллюстрирующих широту возможностей нового метода. В них была продемонстрирована практическая ценность исчисления и установлены его тесные связи с механикой и физикой. Помимо тех недостатков, которые в XVIII в.

заметить было еще невозможно, у метода Эйлера существовал еще один: громоздкость. В течение нескольких последующих лет Эйлер упорно работал над отысканием удобного алгоритма.

Переход от прямых методов к исчислению вариаций. Положение дел начало изменяться с 1755 г., когда совсем еще юный преподаватель математики артиллерийской школы в г. Турине Лагранж сообщил Эйлеру об изобретенном им общем аналитическом методе вычисления вариации интеграла посредством интегрирования по частям. Этот метод основывался на введении вариации функции и на распространении на вариации правил дифференциального исчисления. Поясним эту мысль подробнее.

Чтобы сравнить значение интеграла $I(C)$ вдоль кривой C с его значениями вдоль соседних кривых, Лагранж изменял функции

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

определяющие кривую C, прибавляя к ним величины $\delta y(x)$, $\delta z(x)$ — их вариации. Если вариации в крайних точках сегмента $[x_1, x_2]$, на котором рассматривается задача, обращаются в нуль, то образуются две кривые сравнения C и $C + \delta C$ с общими концами. Последняя из этих кривых будет задана функциями

$$y(x) + \delta y(x), \quad z(x) + \delta z(x).$$

Из всех возможных кривых сравнения теперь следует выбрать такую, чтобы для любых вариаций $\delta y(x)$, $\delta z(x)$

$$\Delta I = I(C + \delta C) - I(C) \geqslant 0.$$

Между вариациями $\delta y(x)$, $\delta z(x)$ и приращением функционала в вариационном исчислении, с одной стороны, и дифференциалом независимой переменной dx и дифференциалом функции $y=f(x)$ в дифференциальном исчислении, с другой стороны, существует аналогия. Эту аналогию и обнаружил Лагранж. Она позволила ему применить в вариационном исчислении алгоритмы, аналогичные алгоритмам дифференциального исчисления, и доказать перестановочность символов d и δ, а также $\int$ и δ.

Эйлер, находившийся буквально на пороге подобного открытия, с энтузиазмом встретил сообщение молодого математика. Он поделился с ним своими идеями, а чтобы дать возможность Лагранжу первому опубликовать свои результать (что произошло в 1762 г.), приостановил печатание своих статей на подобные темы. После 1762 г. Эйлер дал в ряде работ подробное, усовершенствованное и снабженное примерами изложение вариационного исчисления. Он же придумал название новому исчислению: вариационное. В одной из работ (1771) Эйлер дал вариационному исчислению новое истолкование. Оно теперь могло быть понято как метод выбора из однопараметрического семейства кривых такой кривой, которая реализует некоторое экстремальное свойство. Это толкование существенно сближает вариационное исчисление с дифференциальным исчислением. Однако оно еще не сделалось достаточно общим, так как в нем не рассматривались указанные еще Д. Бернулли случаи, когда бесконечно малые перемещения точки вдоль кривой сопровождаются конечными отклонениями касательных («сильные вариации»).

Конец XVIII в. ознаменовался серией исследований Эйлера, Лагранжа и других ученых. Вариационное исчисление при этом сравнительно быстро приняло завершенную форму в его наиболее элементарной части, относящейся к теории первой вариации. Рассматривался еще лишь слабый экстремум и, соответственно, лишь сравнительно гладкие кривые.

Главной задачей вариационного исчисления теперь как будто бы оказывалась проблема отыскания экстремумов функционалов возможно более широкого класса. Длинный ряд работ в XIX в. был посвящен именно этой теме. Однако наряду с этим кругом проблем оставалась нерешенной еще одна задача: как различить вид достигаемого экстремума. Относительно этой задачи еще Лагранж, опираясь, по-видимому, на аналогии с дифференциальным исчислением, указанные выше, отметил возможность применения второй вариации для решения этого вопроса.

В самом деле, пусть, например, задан функционал

$$I = \int_{x_0}^{x} F(x, y, y')\, dx.$$

Если

$$\delta I = 0, \quad \delta^2 I \neq 0,$$

то знак ΔI совпадает со знаком $\delta^2 I$ (при достаточно малых вариациях функций и их производных). В 1786 г. Лежандр (опубликовано в 1788 г.) смог привести вторую вариацию к виду, из которого явствовало, что ее знак зависит от знака $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$. Это привело его к так называемому условию Лежандра: чтобы на экстремали осуществлялся максимум (соответственно: минимум), необходимо, чтобы вдоль нее $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \leqslant 0$ (соответственно: $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geqslant 0$). Это условие оказалось и достаточным для слабого экстремума, что было показано К. Якоби в 1837 г., при условии, что экстремаль может быть включена в поле экстремалей — в однопараметрическое семейство кривых, не пересекающихся между собой и заполняющих некоторую односвязную область.

Понятие поля экстремалей, введенное К. Якоби, оказалось необходимым для отыскания сильного экстремума функционала. Это нашло свое подтверждение в работах Вейерштрасса, который к 1879 г. разработал методы решения этой проблемы. Идея Вейерштрасса (с учетом последующих усовершенствований ее Д. Гильбертом) состояла в следующем: пусть дано поле экстремалей $y = y(x, \alpha)$. В него включена и искомая экстремаль. Введем функцию, выражающую зависимость углового коэффициента касательной к экстремали от координат точки касания $u(x, y)$, которую назовем наклоном поля. Приращение функционала имеет вид

$$\Delta I = \int\limits_{(y)} \left[F(x, y, y') - F(x, y, u) - \frac{\partial F}{\partial u}(y' - u) \right] dx.$$

Подынтегральная функция широко известна в настоящее время как функция Вейерштрасса и имеет специальное обозначение $E\ (x, y, u, y')$. Знак этой функции указывает на вид экстремума: $E \geqslant 0$ в случае минимума и $E \leqslant 0$ в случае максимума. Если это условие рассматривается относительно слабого экстремума, то достаточно, чтобы указанное условие соблюдалось в точках поля, близких к экстремали, и для достаточно малой разности $|y' - u|$. В случае сильного экстремума условие Вейерштрасса должно выполняться, очевидно, для любых y', а не только для y', достаточно мало отличающихся от u.

Таким образом, в течение XIX столетия были найдены условия правомерности операций вариационного исчисления. Эти условия были распространены на широкие классы функционалов и снабжены строгими доказательствами. Выяснение достаточных условий для обеих разновидностей экстремумов, основанных на теории полей экстремалей, логически завершило целый этап развития вариационного исчисления. Последнее формировалось как исчисление вариаций. Прямой метод Эйлера, казалось, был окончательно забыт.

О путях дальнейшего развития вариационного исчисления. Однако на рубеже XIX и XX вв. вариационное исчисление было вынуждено возродить прямые методы, вернувшись тем самым как бы к своей исходной точке. Еще М. В. Остроградский в 1834 г. показал, что задача вариационного исчисления об экстремуме кратных интегралов эквивалентна задаче решения некоторого дифференциального уравнения математической физики. В самом деле, если

$$I = \iint_G F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

где

$$z = z(x, y), \; p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

то

$$\Delta I = \iint_G [F(x, y, z + \delta z, p + \delta p, q + \delta q) - F(x, y, z, p, q)]\, dx\, dy =$$

$$= \iint_G \left(\frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial p} \delta p + \frac{\partial F}{\partial q} \delta q + R \right) dx\, dy.$$

Необходимое условие экстремума

$$\delta I = \iint_G \left(\frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial p} \delta p + \frac{\partial F}{\partial q} \delta q \right) dx\, dy = 0.$$

Преобразуя по формуле Остроградского двойной интеграл в криволинейный, можно получить

$$\iint_G \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] \delta z\, dx\, dy = 0,$$

откуда, в предположении непрерывности подынтегральной функции, вытекает

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) = 0.$$

Вариационная задача об экстремуме двойного интеграла оказывалась, таким образом, эквивалентной краевой задаче для дифференциального уравнения с частными производными второго порядка.

Например, гармоническая функция, являющаяся решением задачи о потенциале, задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

будет одновременно давать экстремум двойного интеграла

$$I = \iint \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy.$$

На это обстоятельство обращал внимание ряд ученых: Гаусс (1840), Томсон (1847) и, наконец, Дирихле. Возможности, вскрывающиеся в связи с открытием вышеотмеченной эквивалентности, были высоко оценены. Физический смысл этого явления в пространственном случае устанавливается легко: если u — потенциал скоростей в установившемся течении однородной несжимаемой жидкости, то соответствующее уравнение будет

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Искомое решение u_0 (среди всех функций, принимающих на границе области заданные значения) сбращает в минимум

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 \right] dx\, dy\, dz,$$

что соответствует минимуму кинетической энергии.

Риман, узнавший этот факт из лекций Дирихле, назвал его принципом Дирихле. Название сохранилось до наших дней. Выводы он распространил на введенные им и сохранившие его имя римановы поверхности. Для Римана является очевидным (по-видимому, из физических соображений), что для любой гармонической функции достаточно задать ее значение на границе области, чтобы иметь ее однозначную определенность внутри области.

Рассмотрим простейший случай краевой задачи Дирихле для однолистного круга. Пусть задана функция распределения краевых значений $u(\psi)$ — непрерывная функция угла. Задача сводится к установлению теоремы существования: внутри круга существует одна и только одна непрерывная функция u, непрерывно приближающаяся к заданным краевым значениям и удовлетворяющая уравнению $\Delta u = 0$.

Введем

$$\iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\,dy,$$

определенный на площади круга и имеющий смысл в любой его точке. Все значения этого интеграла конечны и, очевидно, неотрицательны. Тогда существует неотрицательная нижняя грань его значений для всех возможных u. Эта грань достигается при некотором u, т. е.

$$\delta \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\,dy = 0.$$

Тогда уравнение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

есть необходимое и достаточное условие обращения в нуль первой вариации.

Это рассуждение, поведшее к формированию в трудах Римана геометрической теории функций комплексного переменного, оказалось уязвимым в исходном пункте. Оказалось, что невозможно прийти к выводу о существовании гармонической функции, опираясь на вариационную задачу, так как можно привести примеры таких задач, которые не допускают никакого решения. Вейерштрасс еще при жизни Римана доказал, что из существования нижней грани указанного выше интеграла не следует, что эта грань достигается в классе допустимых функций. Знаменитый пример Вейерштрасса о том, что ломаная, соединяющая точки плоскости, меньше любой кривой, проходящей через эти точки, хотя к семейству этих кривых не принадлежит, вышел только в 1869 г., но был известен Риману. Последний не смог дать убедительного доказательства своим результатам, основанным на применении принципа Дирихле. Это удалось сделать его ученику Нейману (1884) и ученику Вейерштрасса Шварцу, которые в своих доказательствах не прибегали к вариационным методам.

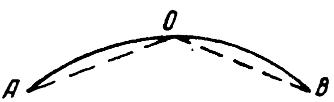

Рис. 5

Таким образом выявилась разница между экстремальной проблемой в конечно-мерном точечном пространстве и в пространстве функциональном. В первом последовательность точек непременно допускает предельные точки. Во втором из последовательности функций не всегда удается выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой предельной функции. Для преодоления подобных трудностей в вариационном исчислении понадобилось вновь разработать прямые методы.

Ведущая идея прямых методов современного вариационного исчисления заимствована еще от Эйлера. Она состоит в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для соответствующей задачи на экстремум функции конечного числа переменных. Последний разыскивается обычными методами, а последующий предельный переход дает решение вариационной задачи. Непосредственно к Эйлеру восходит конечно-разностный метод, который отличается от других прямых методов тем, что, например, функционал

$$v = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

рассматривается не на произвольных кривых (из числа допустимых в данной задаче), а на ломаных, составленных из заданного числа n прямолинейных отрезков с заданными абсциссами вершин:

$$a,\ a+\Delta x,\ a+2\Delta x,\ \ldots,\ a+(n-1)\,\Delta x,\ b,$$

где $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Первых успехов в возрождении прямых методов достиг Гильберт, который в 1904 г., возвратившись к вопросу о принципе Дирихле, доказал существование решения в доказательстве Римана, построив последовательность функций, эффективно достигающую искомой функции. Затем вскоре Ритц (1908) разработал еще один широко известный теперь метод.

Идея метода Ритца заключается в том, что функционал V изучается на линейных комбинациях $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ с постоянными коэффициентами. При этом функционал превращается в функцию коэффициентов:

$$v = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Решая систему уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, n),$$

получаем точки экстремума этой функции, а затем, переходя к пределу при $n \to \infty$, — решение вариационной задачи. Разумеется, понадобятся условия относительно свойств функционала и полноты системы функций $u_1, u_2 \ldots, u_n$.

В общей разработке прямых методов помимо работ Г. Вейля, Лебега и Куранта большое значение имели исследования советских ученых. Л. А. Люстерник, И. Г. Петровский, М. А. Лаврентьев, Н. Н. Боголюбов, Н. М. Крылов и др. обогатили вариационное исчисление высокоэффективными прямыми методами. Еще более велик вклад советских математиков в развитие качественных методов вариационного исчисления, получивших за последние 30—40 лет особое развитие. Это вполне закономерно, так как дифференциальные уравнения, к которым сводятся задачи вариационного исчисления, в конечном виде в большинстве случаев не решаются. Качественные же методы позволяют решать вопросы о существовании решений, об их числе, дать характеристику семейств экстремалей и т. п.

Вариационное исчисление в XX в. сделалось составной частью функционального анализа, той частью, в которой изучаются экстремумы функционалов. Кроме того, вариационные методы и принципы составляют важнейшую часть теоретической механики. С успехом применяются они в решении многочисленных задач прикладного характера.

Более чем двухсотлетняя история вариационного исчисления дает богатый материал для исследования общих закономерностей развития математических исчислений: их формирования, связанного с оборачиванием метода; трансформирования содержания, отражающего диалектичность развития, вхождения в более общие части математики, взаимосвязей с практикой и т. д.