ГЛАВА V

РАЗВИТИЕ ГЕОМЕТРИИ В XVIII в.

Открытия принципиального значения, сделанные в геометрии в течение XVII в., предопределили для этой науки в следующем, XVIII, веке качественно новый этап развития. В составе геометрии появились новые дисциплины. Практически все классические области геометрии, исключая только неевклидовы геометрии, получили оформление в это столетие. Речь идет об аналитической, дифференциальной, начертательной и проективной геометриях, а также о работах по основаниям геометрии. Их общими чертами являются: развитие в рамках и на основе системы геометрии Евклида, непосредственное воздействие на эти области математики практических задач. Среди различных задач и методов геометрии наибольшее место и значение имели геометрические приложения анализа бесконечно малых. Из них возникла и развилась дифференциальная геометрия — наука, занимавшая в XVIII в. центральное место в системе геометрических дисциплин.

Аналитическая геометрия. Под таким названием общепринято понимать ту часть геометрии, где изучаются геометрические фигуры и преобразования, задаваемые алгебраическими уравнениями. Для аналитической геометрии характерно использование методов алгебры и координатного метода.

Сочинения Декарта и Ферма открыли все возможности для развития аналитической геометрии еще в 30-х годах XVII в. Однако для претворения в жизнь очевидных (для нас) преимуществ аналитической геометрии даже в случае плоских задач потребовалось довольно много времени.

Прошло около столетия, пока средствами аналитической геометрии удалось получить достаточно результатов, чтобы превзойти достижения древних, в особенности Аполлония. В XVIII в. аналитическая геометрия еще переживала процесс становления, накапливания и исследования новых фактов.

Аналитическая геометрия Декарта и Ферма включала в себя лишь плоские задачи. Исследование кривых ранга выше первого (т. е. выше второго порядка) было в ней сравнительно редким явлением. Но даже этот скромный объем был труден для современников. В течение XVII в. появилось много сочинений, целью которых было комментировать новые методы. Однако подлинно новый шаг в развитии аналитической геометрии был сделан только в начале XVIII в. в результате выхода в свет в 1704 г. сочинения И. Ньютона «Перечисление кривых третьего порядка».

Ньютон отказался от декартовой классификации кривых по их родам[1]. Он увидел, что классификация по степеням уравнений кривых лучше приспособлена для нужд аналитического аппарата новой геометрии. Порядок кривых в новой классификации получил геометрическую трактовку в виде возможного числа точек их пересечения с прямой. Затем Ньютон перенес на кривые третьего порядка ряд понятий и теорем, доказанных для конических сечений, соответственно видоизменяя их. Так, он ввел диаметры кривых как геометрические места точек ряда параллельных прямых, алгебраическая сумма расстояний которых от точек пересечения прямых с кривой равна нулю. В случае перпендикулярности диаметра к сопряженным хордам вводится ось кривой. Если все диаметры пересекаются в одной точке, то эта точка получает название общего центра. Соответственно распространяются многие другие понятия и теоремы.

Виды кривых определены Ньютоном с учетом конечных ветвей кривых, наличия или отсутствия диаметров, наличия и свойств бесконечных ветвей. Всего оказалось 72 вида кривых, каждому из которых Ньютон дал название. Эти виды кривых записываются уравнениями четырех типов. Если обозначить

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = A,$$

то указанные уравнения будут:

$$xy^2 + ey = A, \quad xy = A, \quad y^2 = A, \quad y = A.$$

[1] См. К. А. Рыбников. История математики, ч. 1. Изд-во МГУ, 1960, стр. 133.

Сложная и громоздкая классификация заставила Ньютона сосредоточиться на особенностях кривых: узлах, точках заострения и т. п. Для облегчения этой трудной задачи Ньютон использует третье из указанных выше уравнений — уравнение полукубической параболы,

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

и показывает, что каждая кривая третьего порядка получается из нее посредством подходящего центрального проектирования. Такая проективная классификация, или, по выражению И. Ньютона, «органическое описание», приводит к выявлению всех проективно разных кривых третьего порядка. исходя из свойств корней уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Именно если три корня действительны и различны, то кривая состоит из двух различных ветвей; равенство всех трех корней свидетельствует о наличии точки возврата. Равенство двух корней укажет либо на двойную, либо на изолированную точку. Кривые, имеющие только одну ветвь, будут соответствовать наличию двух мнимых корней.

Мы не будем останавливаться больше на содержании этого сочинения. Оно слишком специфично. Принципы классификации кривых третьего порядка не оказались ни простыми, ни универсальными, результаты — недостаточно полными и не снабжены доказательствами. Значение настоящего сочинения Ньютона было не в этом. Ньютон раскрыл новые возможности для метода координат. К тому же последний был значительно усовершенствован Ньютоном, который ввел равноправные оси координат, определил знаки функций во всех четырех квадрантах, создал основы исследования свойств кривых по свойствам выражающих их уравнений. Эти возможности были подхвачены и развиты Стирлингом в книге «Ньютоновы кривые третьего порядка» (1717).

Стирлинг снабдил теоремы Ньютона доказательствами, а также вывел ряд теорем общего характера. Ему принадлежит. в частности, вывод канонической формы уравнений кривых третьего порядка путем выбора оси координат параллельно асимптоте, в силу чего степень уравнения понижается. Общими свойствами алгебраических кривых успешно занимался Маклорен (1720), который развил ньютонов органический способ образования кривых. Специальные мемуары на эту тему издали Ф. Николь (1731), Мопертюи (1731), Брекенридж (1733) и др. Впоследствии кривым третьего порядка было посвящено огромное число работ Штейнера, Сальмона. Сильвестра, Шаля, Клебша и др.

Как было указано выше, аналитическая геометрия Декарта и Ферма не включала в себя методов решения пространственных задач. Оба автора сумели лишь дать общие указания о необходимости проектирования пространственных кривых на координатные плоскости. В течение почти столетия эта кажущаяся в наше время очевидной идея реализовалась лишь эпизодически, по частным поводам и не принимала общего характера.

Систематическое использование пространственных координат в аналитической геометрии начато в 1731 г. в книге Клеро «Исследования о кривых двоякой кривизны». Таким именем назывались пространственные кривые. Каждую точку последних Клеро проектировал ортогонально на две взаимно перпендикулярные координатные плоскости. Таким образом, пространственная кривая оказывалась заданной как геометрическое место пересечения двух цилиндрических поверхностей, а в аналитической форме она выражалась системой двух уравнений. Если же задано единственное уравнение, то Клеро правильно интерпретировал его как уравнение поверхности, приведя много примеров главным образом поверхностей вращения:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad \sqrt{y^2 + z^2} = \frac{m}{n} x,$$

$$y^2 + z^2 = ax,$$

$$x^4 = a^2 (y^2 + z^2)$$

и т. п.

Работы Клеро создали возможность для систематического построения аналитической геометрии в форме, более или менее привычной для нас. Это осуществил Эйлер к 1748 г.

Аналитическая геометрия в первой половине XVIII в. формировалась в тесном сплетении с геометрическими приложениями математического анализа. Она уже играла роль фундамента большой области математических знаний, несмотря на незавершенность как по форме, так и по содержанию. Поэтому Эйлер, решая громадную задачу систематического построения математического анализа, осуществленную им в ряде монографий, выделил для аналитической геометрии специальный том («Введение в анализ...», т. 2). Значение этого сочинения в истории аналитической геометрии необычайно велико. Охарактеризуем содержание этого тома подробнее.

В основной его части, состоящей из двадцати двух глав, излагается система аналитической геометрии на плоскости. В первой главе введены прямолинейные координаты, как прямоугольные, так и косоугольные, а также разъяснен способ записи уравнений кривых, дано понятие непрерывности кривых, как свойство кривой быть выраженной единым аналитическим выражением, в соответствии с понятием непрерывности функции, введенным в первом томе «Введения в анализ бесконечных». Вторая глава посвящена преобразованиям систем координат: повороту осей и переносу начала, а также анализу уравнения прямой в виде

$$\alpha x+\beta y-a=0.$$

Следующие две главы относятся к классификации кривых по степеням их уравнений и выявлению общих свойств кривых. Еще две главы отведены специально исследованию кривых второго порядка. При этом в главе V речь идет о тех свойствах конических сечений, которые получаются из общего уравнения второй степени, а в главе VI подвергаются исследованию канонические формы уравнений кривых второго порядка. Бесконечные ветви и асимптоты конических сечений выделены для рассмотрения в главы VII и VIII.

Далее следует классификация кривых третьего порядка (главы IX и X). В соответствии с характером бесконечных ветвей эти кривые разделены на 16 видов. При этом Эйлер сравнил свою классификацию с той, которую дал Ньютон, и показал неполноту последней. Соответствующая классификация кривых четвертого порядка, проделанная в главе XI, дала уже 146 видов. Не продолжая этой делающейся бесперспективной работы, Эйлер перешел вновь к разработке общих методов исследования кривых по их уравнениям, дав краткие указания об этом в главе XII.

Касательные, являющиеся предметом тринадцатой главы, рассматриваются по отношению как к простым, так и кратным точкам кривых. В интересной главе XIV о кривизне кривых вначале определяется парабола, аппроксимирующая кривую в окрестности данной точки, а затем для этой параболы отыскивается круг кривизны. Длина радиуса кривизны кривой

$$0=At+Bu+Ct^2+Dtu+Eu^2+Ft^3+Gt^2u+Htu^2+\dots$$

в начале координат находится по формуле

$$\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E-2BD+B^2C)}.$$

Кроме того, Эйлер находит здесь же точки перегиба первого и более высоких порядков, точки заострения. Чтобы добиться наибольшей общности, он заменяет аппроксимирующую параболу более общими кривыми, например $ar^m = s^n$.

Глава XV отведена для исследования свойств диаметров кривых и симметрии последних, а две следующие (XVI и XVII) посвящены исследованию кривых по их свойствам. Речь идет о таких, например, задачах: исследовать кривую

$$y^2 - P(x)\,y + Q(x) = 0,$$

если известно, что для данного аргумента x кривая имеет две ординаты y_1 и y_2, связанные между собой условием

$$y_1^n + y_2^n = a^n.$$

Другим условием является, например, то, что кривая имеет с данным лучом $y = \alpha x$ данное число точек пересечения. Интересно, что при этом Эйлер вводит полярные координаты:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

В отдельной главе (XVIII) Эйлер собрал и систематизировал сведения о подобии и аффинных свойствах кривых. Кривые, по Эйлеру, называются аффинными, если их координаты связаны соотношениями

$$x = \frac{X}{m}, \quad y = \frac{Y}{n}.$$

Это понятие удержалось в математике до наших дней.

Наконец, в четырех завершающих главах рассматриваются: пересечения кривых (глава XIX), составление уравнений сложных кривых (глава XX), трансцендентные кривые (глава XXI) и геометрическое решение тригонометрических уравнений. Последние две главы появились, разумеется, в качестве геометрической трактовки функций, введенных в I томе «Введения в анализ». В них рассматриваются кривые тригонометрических функций, логарифмическая кривая, циклоиды всех трех видов, линия $x^y = y^x$ и различные спирали. Для исследования этих кривых используются как декартовы, так и полярные координаты.

Содержание этой книги, краткий обзор которой мы дали здесь, показывает, что аналитическая геометрия на плоскости превратилась в руках Эйлера в отдельную науку, предмет и методы которой уже определились в смысле и объеме, близком к современному. Однако Эйлер не ограничился двумерными задачами. Он проделал подобную работу также для аналитической геометрии в пространстве в специальном «Приложении о поверхностях» к той же книге.

Прежде всего, Эйлер (со ссылкой на Клеро) ввел пространственные прямоугольные декартовы координаты, рассматривая множество аппликат к координатной плоскости $x0y$. После введения знаков координат, замечаний о возможности замены осей, он рассмотрел ряд поверхностей и их сечений плоскостями. Было показано при этом, что уравнение относительно двух переменных соответствует цилиндрической или призматической поверхности, а однородное уравнение — конусу или пирамиде. Вслед за этим он ввел более общие классы поверхностей: а) выраженных уравнением

$$F(x,\ y,\ Z(z)) = 0,$$

однородным относительно указанных аргументов. Этот класс включает конусы, цилиндры и поверхности вращения; б) имеющих треугольные сечения, перпендикулярные к осям; в) имеющих аффинные соотношения между параллельными сечениями и др. Отправляясь от этих классов, он ввел метод сечений поверхностей произвольными плоскостями. Весь этот материал занял первые три главы приложения.

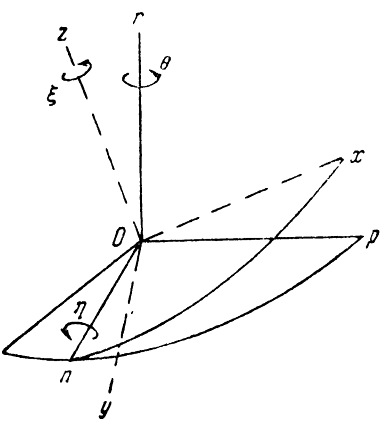

Рис 6

В главе IV выведены уравнения преобразования прямоугольных пространственных координат в виде

$$x = p(\cos\zeta\cos\theta - \sin\zeta\cos\eta\sin\theta) +$$
$$+ q(\cos\zeta\sin\theta + \sin\zeta\cos\eta\cos\theta) - r\sin\zeta\sin\eta + f;$$
$$y = -p(\sin\zeta\cos\theta + \cos\zeta\cos\eta\sin\theta) -$$
$$- q(\sin\zeta\sin\theta - \cos\zeta\cos\eta\cos\theta) - r\cos\zeta\sin\eta + g;$$
$$z = -p\sin\eta\sin\theta + q\sin\eta\cos\theta + r\cos\eta + h.$$

Углы ζ, η, θ называются и теперь углами Эйлера. Они определяют поворот осей. Угол прецессии θ есть угол вращения вокруг оси or, при котором ось op переходит в прямую on — линию узлов, определяющую пересечение координатных плоскостей poq и xoy. Угол нутации η является углом вращения вокруг прямой on, при котором ось or переходит в oz. Наконец, угол собственного вращения ζ вокруг oz переводит on в ox.

В этой же главе введено понятие порядка поверхности, доказано, что порядок кривой в плоском сечении не превышает порядка поверхности, и рассмотрены случаи распадения линий сечения.

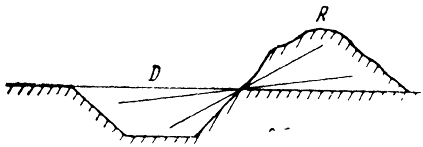

Рис. 7

Исследование общего уравнения второй степени относительно трех координат и приведение к каноническому виду, произведенное Эйлером в главе V, дало впервые уравнения всех видов невырожденных поверхностей второго порядка:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = a^2 \quad \text{(эллипсоид)},$$

$$Ap^2 + Bq^2 - Cr^2 = a^2 \quad \text{(однополостный гиперболоид)},$$

$$Ap^2 - Bq^2 - Cr^2 = a^2 \quad \text{(двуполостный гиперболоид)},$$

$$Ap^2 + Bq^2 = ar \quad \text{(эллиптический параболоид)},$$

$$Ap^2 - Bq^2 = ar \quad \text{(гиперболический параболоид)}.$$

Завершением книги служит рассмотрение пространственных кривых как пересечений двух поверхностей и выработка аналитического аппарата для их исследования.

Вторая половина XVIII в. принесла аналитической геометрии только частичные, хотя временами весьма существенные, усовершенствования. В основном аналитическая геометрия уже сформировалась. Упомянем лишь о нескольких наиболее значительных вкладах. В связи с дифференциально-геометрическими исследованиями о развертывании поверхностей Монж в 1771 г. (опубликовано в 1785 г.) решил ряд задач аналитической геометрии. Так, он нашел условие перпендикулярности плоскости, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1),

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

и прямой

$$ax + by + cz + d = 0,$$
$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$

Затем Монж определил длину перпендикуляра, опущенного из данной точки пространства на данную прямую. Наконец, ему удалось определить нормальную плоскость к любой точке кривой двоякой кривизны: $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$.

Лагранж в статье 1773 г. (опубликовано в 1775 г.) исследовал, не прибегая к чертежу, средствами аналитической геометрии, задачи, относящиеся к трехгранной пирамиде. Полностью завершил вопрос о преобразовании пространственных координат Менье (1785), выведя формулы:

$$z' - z = t\cos\omega + u\sin\omega;$$
$$x' - x = [v\cos\omega - t\sin\omega]\sin\pi + u\cos\pi;$$
$$y' - y = [v\cos\omega - t\sin\omega]\cos\pi - u\sin\pi,$$

где u, v, t — старые координаты, x', y', z' — новые, x, y, z — новые координаты старого начала координат. Угол старой координатной плоскости xoy с новой обозначен здесь π, а угол линии пересечения обеих плоскостей с новой осью y есть ω.

Во второй половине XVIII в. аналитическая геометрия начала входить в программы высших учебных заведений. Среди появившихся учебников наиболее систематическим и близким к современному стилю явился учебник французского академика Лакруа (1798—1799). Его переиздавали многократно; 25-е издание, например, вышло в свет с добавлениями Эрмита в 1897 г. В этих учебниках Лакруа появилось и название этой науки — аналитическая геометрия, — сохранившееся и в дальнейшем.

Разумеется, и в дальнейшем аналитическая геометрия видоизменяла свой облик. Это было связано прежде всего с обобщениями координатного метода. Созданные Мёбиусом (1827) барицентрические координаты позволили ввести бесконечно удаленные элементы. Из проективной геометрии были привнесены однородные координаты, а затем проективные, как линейные комбинации простейших однородных координат. Дарбу ввел тетрациклические, а затем пентасферические координаты. В конце XIX — начале XX в. из механики в аналитическую геометрию вошли векторы, что значительно усовершенствовало ее аппарат.

Г. Монж
1746—1818

Итак, в XVIII в. было завершено формирование аналитической геометрии как науки и становление ее как учебного предмета, явившегося составной частью классической основы современного высшего математического и технического образования.

Дифференциальная геометрия. Эта математическая дисциплина, как известно, изучает геометрические объекты — кривые, поверхности и т. п. Ее своеобразие состоит в том, что, отправляясь от результатов аналитической геометрии, она широко использует методы математического анализа, в особенности дифференциального исчисления. Дифференциальная геометрия возникла в XVIII в. из области геометрических приложений анализа бесконечно малых. В некотором смысле дифференциальную геометрию можно даже считать предшественницей анализа, если в ее историю включить инфинитезимальные задачи геометрического характера. Последние составили важную часть предпосылок возникновения дифференциального и интегрального исчисления.

К началу XVIII в. средствами анализа бесконечно малых были раскрыты и исследованы многие факты теории плоских кривых. Однако это еще не привело к выделению особой науки. Все результаты входили в систему математического анализа, составляя совокупность геометрических применений с использованием преимущественно функций от одного переменного. Этим последним обстоятельством, кстати, и объясняется то, что именно плоские, а не пространственные кривые были вначале предметом исследования.

Следующий этап развития дифференциальной геометрии связан с введением методов изучения пространственных кривых и поверхностей. Необходимой предпосылкой для этого является, очевидно, распространение средств аналитической геометрии на трехмерные задачи. Как было указано выше, в заметном виде подобное распространение было осуществлено впервые в 1731 г. в книге Клеро «Исследования о кривых двоякой кривизны». В основном эта книга, как мы упоминали, посвящена трехмерной аналитической геометрии, но ряд вопросов решен в ней с помощью дифференциального и интегрального исчисления. Так, Клеро рассмотрел касательные и нормали к пространственным кривым, а также подкасательные и поднормали, ввел касательную плоскость к поверхности, содержащей данную кривую. Нормаль, по Клеро, является нормалью к касательной плоскости. Рассмотрены также геометрические места точек пересечения касательных и нормалей с координатными плоскостями.

Пространственная кривая определена как пересечение двух цилиндрических поверхностей, характеризующихся проекциями на две координатные плоскости. Клеро развернул кривую на эти цилиндрические поверхности, решил ряд задач о спрямлении кривых, определил площади частей цилиндрических поверхностей, ограниченных кривыми, нашел некоторые кубатуры. Этот круг вопросов потребовал от него, разумеется, применения методов интегрального исчисления.

Перенесение методов двумерной дифференциальной геометрии на трехмерный случай, осуществленное Клеро, в течение многих лет (около полустолетия) не было превзойдено никем. Однако под воздействием потребностей геодезии и картографии, а также механики появился ряд работ, в которых решались дифференциально-геометрические задачи. Сам Клеро тоже обнаружил новые дифференциально-геометрические факты. Побывав вместе с Мопертюи в геодезической экспедиции в Лапландии, он, в частности, в 1733 г. доказал, что вдоль геодезической линии на поверхности вращения произведение радиуса параллели (т. е. круга, перпендикулярного к оси вращения) на синус ее угла с меридианом постоянно:

$$\rho \sin \alpha = \text{const}.$$

Однако и в этой области, как и во многих в то время, доминировали работы Эйлера.

Серию соответствующих исследований Эйлер начал (1728—1732) по примеру многих из своих предшественников с изучения геодезических линий на поверхностях. Он вывел дифференциальное уравнение геодезической линии на поверхности, заданной уравнением

$$P\,dx = Q\,dy + R\,dt$$

в виде

$$\frac{Qd^2x + P\,d^2y}{Q\,dx + P\,dy} = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

и рассмотрел ряд частных случаев, относящихся к геодезическим на поверхностях вращения. В 1736 г. Эйлер доказал, что точка, движущаяся по поверхности при отсутствии действующих сил, перемещается по геодезической. В том же году в статье о трактрисе он ввел натуральное уравнение плоской кривой и связал его с уравнением в декартовых координатах. Впоследствии, после ряда частных результатов, эти исследования привели Эйлера, с одной стороны, к созданию (начиная с 1744 г.) вариационного исчисления (так как задача о геодезических принадлежит к числу вариационных), а с другой — к исследованиям по общей теории кривых и поверхностей.

Классическая основа современной общей теории поверхностей, однако, начала создаваться сравнительно поздно. Первые фундаментальные результаты в этой области, равно как и во всей трехмерной дифференциальной геометрии, оказалось возможным найти не ранее 1760 г. в статье Эйлера «Исследования о кривизне поверхностей» (опубликована в 1767 г.). В этой работе выведена известная теорема Эйлера следующим образом: исследуемая поверхность $z=z(x, y)$ рассекается произвольной плоскостью $z=\alpha x-\beta y+\gamma$. Получается в сечении плоская кривая, радиус кривизны которой выражен довольно сложно:

$$\frac{[\alpha^2+\beta^2+2\alpha q+2\beta p+(\alpha p+\beta q)^2+p^2+q^2]^{3/2}}{\left[(\alpha-q)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+(\beta+p)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2(\alpha-q)(\beta+p)\left(\frac{dp}{dy}\right)\right]\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}$$

где

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad \left(\frac{dp}{dx}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \left(\frac{dq}{dy}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\left(\frac{dp}{dy}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ldots.$$

Затем через нормаль к поверхности проводится секущая плоскость. Выражение для радиуса кривизны этого произвольного нормального сечения получается еще более сложным вследствие того, что теперь параметры α и β не являются независимыми. Они выражаются через параметр, определяющий сечение, т. е. через угол между горизонтальным следом нормальной плоскости и осью абсцисс.

Из нормальных сечений выбираются два: главное, перпендикулярное координатной плоскости xoy, и перпендикулярное главному. Для этих сечений выражение кривизны упрощается. Затем вводится угол φ между плоскостями нормального и главного сечений и вновь выводится общее выражение для радиуса кривизны:

$$\frac{-(p^2+q^2)(1+p^2+q^2)^{3/2}\sec^2\varphi}{\left(\frac{dp}{dx}\right)(p-q\operatorname{tg}\varphi u)^2+\left(\frac{dq}{dy}\right)(q+p\operatorname{tg}\varphi u)^2+2\left(\frac{dp}{dy}\right)(p-q\operatorname{tg}\varphi u)(q+p\operatorname{tg}\varphi u)}.$$

Это громоздкое выражение Эйлер расписал для частных случаев: цилиндра $z=\sqrt{a^2-y^2}$, конуса $z=\sqrt{n^2x^2-y^2}$ и эллипсоида $z^2=a^2-mx^2-ny^2$, а затем преобразовал к виду

$$\frac{1}{L+M\cos 2\varphi+N\sin 2\varphi},$$

где

$$L=L\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right),$$

равно как M и N.

Отсюда равенство кривизн в локальной области поверхности определяется равенством величин L, M, N. Когда

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{N}{M},$$

то соответствующий радиус кривизны достигает экстремума. Сечения, дающие для радиуса кривизны максимум f и минимум g, взаимно перпендикулярны.

Эйлер делает последнее упрощение: пусть при достижении максимума f будет $\varphi=0$. Тогда $N=0$ и радиус кривизны будет

$$\frac{1}{L+M\cos 2\varphi}.$$

Минимум g радиуса кривизны достигается в этом случае при $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Выразив Z и M через f и g, Эйлер, наконец, получил

$$\frac{2fg}{f+g-\cos 2\varphi\,(f-g)}.$$

Употребляемая в настоящее время формула кривизны нормального сечения была получена из данного выражения Дюпеном через 50 лет.

Из приведенного примера видно, что в ходе создания общей теории поверхностей аппарат чрезвычайно усложнился. Преодолевать возрастающие в связи с этим трудности удавалось лишь немногим, а возможности приложений уменьшались. Но работа продолжалась под непосредственным давлением практики, прежде всего картографии и геодезии.

В 70-х годах одной из главных проблем в этой области сделалось развертывание поверхностей. Понятие развертывающейся поверхности ввел Эйлер. В статье 1771 г. о телах, поверхности которых можно наложить на плоскость, он исходит из соответствия между координатами (x, y, z) — точки развертывающейся поверхности и (t, u) — точки плоскости, с которой совпадает указанная точка поверхности после развертывания. На плоскости берется элементарный прямоугольный треугольник с вершинами:

$$(t, u), \ (t + dt, u), \quad (t, u + du).$$

Ему соответствует элементарный треугольник на поверхности с вершинами:

$$(x, y, z), \ (x + l\,dt, y + m\,dt, \ z + n\,dt),$$
$$(x + \lambda\,du, \ y + \mu\,du, \ z + \nu\,du),$$

конгруэнтный с ним ($l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ — соответствующие частные производные: $\frac{\partial x}{\partial t} = l$, $\frac{\partial x}{\partial u} = \lambda$ и т. д.). Конгруэнтность и равенство соответствующих отрезков привели Эйлера к следующим условиям развертывания:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2 + du^2,$$
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Решение Эйлера содержало общую идею изгибания поверхностей и повлекло за собой ряд значительных результатов. Так, Эйлер доказал, что касательные произвольной пространственной кривой образуют развертывающуюся поверхность. Тенсо (1780) ввел точки перегиба и классифицировал их. Точки плоского перегиба у него соответствовали случаю, когда кручение было равно нулю. Их можно было обнаружить по точкам перегиба плоской кривой, по которой развертывающаяся поверхность, соответствующая пространственной кривой, пересекала координатную плоскость xoy. Другой тип — точки линейного перегиба, соответствующие случаю, когда кривизна равна нулю. Эти точки являются точками перегиба для всех проекций пространственной кривой. В них соприкасающаяся плоскость перпендикулярна плоскости проекций. Аналогичную классификацию точек перегиба ввел Монж (1771 г., опубликовано в 1775 г.). Он же исследовал развертывание поверхностей.

Попытки построения общей теории поверхностей и пространственных кривых методами, заимствованными из аналитической геометрии и дифференциального исчисления, продолжались и в 80-х годах XVIII в. Новые идеи ввел в 1782 г. Эйлер, написав большую работу (опубликованную в 1786 г.). Он рассматривал пространственные координаты x, y, z кривой как функции длины дуги s и направляющих коэффициентов осей подвижного триедра, с помощью сферического отображения.

Ряд ученых — Монж, Лагранж, Ламберт, Менье и в особенности Эйлер — получили в дифференциальной геометрии значительное количество конкретных результатов. Последние находили применение в геодезии и картографии. Однако число лиц, занимавшихся этой проблемой, быстро уменьшалось. Утяжеление аппарата, не соответствующее раскрываемым возможностям, тревожило выдающихся математиков и заставляло их пессимистически оценивать перспективы развития общей теории поверхностей и пространственных кривых.

А тем временем пути дальнейшего развития дифференциальной геометрии уже намечались. Этими путями явились: а) бо́льшее привлечение геометрических соображений, временно отодвинутых на второй план усилиями по созданию аналитического аппарата; б) расширение последнего за счет привлечения теории дифференциальных уравнений; в) перевод геометрических фактов на язык дифференциальных уравнений и геометрическая интерпретация этих уравнений. Наибольшее продвижение в этих областях было достигнуто в революционной Франции конца XVIII в. исследованиями Г. Монжа и его учеников.

Гаспар Монж (1746—1818), выходец из крестьянско-буржуазной семьи, был, как и многие другие математики, активным деятелем Великой французской буржуазной революции. Неоднократно он занимал большие государственные посты (морской министр, организатор военной промышленности Франции и т. п.), с честью выполняя свои обязанности. Начав свою научно-педагогическую деятельность в качестве профессора военно-инженерной школы, Монж добился крупных успехов в математике, физике, химии и технике и в 1780 г. был избран членом Парижской академии наук. Он был также одним из основателей Политехнической школы в Париже (1794) и ее профессором.

В математике основные работы Монжа относятся к области геометрии. Охарактеризуем здесь его достижения в части, относящейся к дифференциальной геометрии. В течение 70-х годов Монж опубликовал два сочинения: «Мемуар о развертках, радиусах кривизн и различных видах перегибов кривых двоякой кривизны» (1771 г., опубликовано в 1785 г.) и «О свойствах многих видов кривых поверхностей» (1775 г., опубликовано в 1780 г.). В них дано широкое и полное исследование свойств пространственных кривых и поверхностей, введено развертывание поверхностей, исследованы эволюты, огибающие и т. п.

В частности, в первой из упомянутых работ, где Монж изучал пространственные кривые, показано, что эти кривые могут иметь неограниченно много эволют, что они все лежат на развертывающейся поверхности (имеется в виду развертка нормалей) и что они являются геодезическими линиями этой поверхности. Монж ввел также спрямляющую развертывающуюся поверхность и показал, что исходная кривая является ее геодезической. В этой же работе введены упомянутые выше два типа точек перегиба и многие термины, сохранившиеся до нашего времени: ребро возврата, развертывающаяся поверхность, геометрическое место центров кривизны и др.

Вторая работа в основном посвящена развитию теории развертывающихся поверхностей. В ней, в частности, выяснено отличие линейных и развертывающихся поверхностей, найдено известное дифференциальное соотношение:

$$rt - s^2 = 0.$$

Установлено, кроме того, что развертывающиеся поверхности могут трактоваться как геометрические места касательных к пространственным кривым, а также то, что они суть огибающие некоего двупараметрического семейства плоскостей и т. д.

Однако классификация кривых и поверхностей по виду и по степеням их алгебраических уравнений и связанный с этим громоздкий аппарат не удовлетворяли Монжа. Новая классификация поверхностей была дана Монжем в лекциях для Политехнической школы, выходивших отдельными выпусками, а в 1801 г. — отдельной книгой. В ней Монж исходит из потребностей практических приложений и соответствующих нужд технического образования. Свойства и структура поверхностей проявляются яснее, если кроме уравнения задан способ их конструирования, формирования путем перемещения в пространстве заданной линии. При этом в качестве объекта изучения выступают не алгебраические уравнения, а дифференциальные уравнения в частных производных.

Оказалось, что дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка соответствует большое семейство поверхностей. В него входят цилиндрические и конические поверхности, поверхности вращения и каналов. Последние образуются движением окружности постоянного диаметра, плоскость круга которой перпендикулярна заданной кривой, а центр передвигается по ней. Кроме того, к этому классу относятся поверхности склонов насыпей, т. е. такие, у которых линиями наибольшего спуска являются прямые постоянного наклона, а также винтовые поверхности.

Рассматривая поверхности с различных точек зрения, Монж получал одновременно и дифференциальное уравнение поверхности, и конечное уравнение, как его интеграл. Например, рассматривая цилиндрические поверхности как такие, касательная плоскость которых параллельна образующей

$$x = az, \quad y = bz,$$

получим их уравнения

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Но в то же время из условия, что образующая цилиндрической поверхности параллельна прямой, получается конечное уравнение этой поверхности

$$y - bz = \varphi(x - az),$$

где φ — произвольная функция. Последнее уравнение дает решение дифференциального уравнения цилиндрической поверхности. Соответствующие результаты для конических поверхностей

$$(x-a)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial z}{\partial y} = z - c \quad \text{и} \quad \frac{y-b}{z-c} = \varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right),$$

а для поверхностей склона насыпей

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = a^2 \quad \text{и} \quad z^2 = a^2[(x-a)^2 + (y-\varphi(a))^2].$$

В этой части работы введена геометрическая интерпретация характеристик как линий пересечения двух бесконечно близких поверхностей и выведено их дифференциальное уравнение.

Дифференциальные уравнения второго порядка определяют семейства развертывающихся поверхностей, а также те линейные поверхности, которые описаны прямой, перемещающейся по двум пространственным кривым параллельно заданной плоскости, и классы поверхностей, кривизны которых удовлетворяют некоторым условиям (резные, трубчатые, минимальные). Общие линейчатые поверхности определяются дифференциальными уравнениями третьего порядка, равно как и более сложные поверхности, вроде поверхности, огибающей сферу переменного радиуса, центр которой движется по заданной кривой.

Перевод фактов теории поверхностей на язык дифференциальных уравнений в частных производных сопровождался у Монжа разработкой геометрической теории этих уравнений. В частности, он дал геометрическую трактовку общей теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Полный интеграл таких уравнений $f(x, y, z, a, b)=0$ геометрически интерпретируется двупараметрическим семейством поверхностей. Если заменить $b=\varphi(a)$, где φ — символ произвольной функции, то уравнению

$$f(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0$$

соответствует однопараметрическое семейство поверхностей (Монж назвал их: огибаемые). Уравнение огибающей их поверхности получается путем исключения параметра a из уравнений

$$f = 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Отсюда при фиксированных значениях a получаются уравнения характеристик (образующих огибающих поверхностей, являющихся геометрическими образами общего интеграла). Все характеристики огибаются кривой, которую Монж назвал ребром возврата.

Подобные соображения, высказанные относительно уравнения

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

и его полного дифференциала

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + P\,dp + Q\,dq = 0,$$

привели Монжа к системе уравнений

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + pZ} = -\frac{dq}{Y + qZ}.$$

Интегрируя их, он получил уравнения характеристик.

Геометрические методы внесли также ясность в трактовку уравнения, названного впоследствии уравнением Пфаффа:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Если условие интегрируемости выполняется, то его решение геометрически представляется семейством поверхностей

$$f(x, y, z) = C,$$

на которых любые кривые ортогональны к кривым

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Если же это условие не выполнено, то, как показал Монж, при задании дополнительной зависимости $\varphi(x, y, z) = 0$ уравнение Пфаффа определяет на поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ однопараметрическое семейство кривых, ортогональных к тем же кривым

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Теория характеристик Монжа, сведение задачи решения дифференциальных уравнений с частными производными к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, геометрическая интерпретация решений, тесная взаимосвязь и взаимодействие геометрических и механических методов — вся совокупность достижений Монжа привела дифференциальную геометрию к новому этапу. Он характеризуется введением в геометрию аппарата дифференциальных уравнений и дальнейшим расширением ее теоретических и практических возможностей.

В конце XVIII в. исследование одной инженерной проблемы дало дифференциальной геометрии основы теории линейных конгруэнций, стоявшей некоторое время особняком. Речь идет о задаче (см. рис. 7 на стр. 100), рассмотренной Монжем в «Мемуаре по теории выемок и насыпей» (Mémoire sur la théorie des déblais et rémblais, 1781), опубликованном в 1784 г.

Постановка задачи такова: даны два равных объема земли, ограниченных неравными замкнутыми поверхностями. Элементы одного объема необходимо перенести в другой с соблюдением принципа наименьшей работы и, следовательно, стоимости. Траектории переносимых частиц образуют двупараметрическое семейство прямых, удовлетворяющее условиям: а) через каждую точку D проходит одна и только одна прямая семейства; б) на каждой прямой семейства есть элементы объема R (точка, отрезок); в) линейчатая поверхность, образованная прямыми семейства, высекает в D и R равные объемы; г) $\iiint\limits_{(D)} r dV = \min$ (dV — элемент объема D, r — расстояние между соответствующими точками объемов D и R).

В плоском случае семейство прямых $y=ax+b$ — однопараметрическое. Монж составлял дифференциальное уравнение, приравнивая элементарные площадки в фигурах D и R. Наличие общей касательной к D и R позволяет определить значение аддитивной постоянной уравнения.

Прямолинейные конгруэнции возникают в трехмерном случае. Монж доказал, что среди всех линейчатых поверхностей, образованных при этом, существуют только два семейства развертывающихся поверхностей. Если поверхности нормальны друг к другу, то конгруэнция ортогональна к поверхности. На последней образуется ортогональная сеть линий кривизны. Нормали к поверхности образуют вдоль этих линий развертывающуюся поверхность. Длина отрезка нормали от поверхности до пересечения с одной из двух бесконечно близких нормалей совпадает с длиной радиуса кривизны плоского сечения поверхности по линии кривизны.

Наконец, Монж утверждает, что условию минимальности работы в таких задачах удовлетворяют именно нормальные конгруэнции. Доказательство этого факта, однако, появилось лишь через сто лет (1886; Сен-Жермен и Аппель).

В первой половине следующего, XIX века происходило пополнение классического состава дифференциальной геометрии. Ученики и французские коллеги Монжа (Л. Карно, Фурье, Ампер, Пуассон и др.) по существу привели эту науку в ее классической части к современному состоянию. Отметим индикатрису и циклиду Дюпена (в работах 1813 и 1822 гг.), введение бинормали Сен-Венаном (1845), направляющие косинусы Френе (1847) и Серре (1851).

Новый этап дифференциальной геометрии ознаменован исследованиями Гаусса (1828) о внутренней геометрии поверхностей, т. е. о таких их свойствах, которые инвариантны относительно изгибания. Идеи Гаусса, а также работы о свойствах поверхностей постоянной гауссовой кривизны (Миндинг в 1839 г., Лиувилль в 1850 г.) создали область соприкосновения дифференциальной геометрии с неевклидовой [1]. Об этом речь будет идти ниже [2].

[1] О дифференциально-геометрических исследованиях Гаусса см. А. П. Норден. Геометрические работы Гаусса. В сб.: «Карл Фридрих Гаусс». Изд-во АН СССР, М., 1956, стр. 113—144.

[2] См. главу XI.

Начертательная и проективная геометрии. Методы начертательной геометрии формировались в области технических приложений математики. Факты учения о перспективе были известны с давних времен; особенно они были развиты художниками и архитекторами эпохи Возрождения. Эти факты составили необходимую основу для создания того раздела теоретической геометрии, в котором пространственные образы изучаются посредством комплекса отображений на плоскости. Метод координат для построения перспективы и соответствующие начала аксонометрического проектирования впервые применил Дезарг в 1636 г.

Формирование начертательной геометрии в особую математическую науку завершилось в работах Г. Монжа. С 1795 г. Монж читал в Политехнической школе лекции об ортогональном проектировании на плоскости. В 1798—1799 гг. он опубликовал уже полностью разработанный курс начертательной геометрии («Géométrie descriptive»), в котором систематически провел отображение пространственных фигур с помощью двух ортогональных проекций на две взаимно перпендикулярные координатные плоскости. Этот прием он дополнил развертыванием проекционных плоскостей около оси проекций в одну плоскость и сведением пространственных построений и перемещений к соответствующим преобразованиям проекций.

Учебник начертательной геометрии Монжа состоял из пяти глав. В первой главе рассмотрены: цель и метод начертательной геометрии, а также элементарные задачи относительно прямых и плоскостей. Затем следуют построения касательных плоскостей и нормалей к кривым поверхностям. Пересечения кривых поверхностей рассмотрены в третьей главе, а соответствующие задачи вынесены в четвертую главу. Пятая глава посвящена исследованию методами начертательной геометрии кривизны линий и поверхностей.

Изложение Монжа не является элементарным. Он рассматривал ряд новых и трудных задач. Так, он исследовал поверхности с ребром возврата, геодезические поверхности и линии наибольшего ската на них, поверхности одинакового ската и т. п., навеянные его дифференциально геометрическими исследованиями.

Влияние работ Монжа и близких к ним по содержанию учебников Лакруа было длительным. Их сочинения в течение первой половины XIX в. переиздавались много раз. Усовершенствования частного характера и разработка различных способов проектирования составили основное содержание работ по начертательной геометрии в дальнейшем. Сама же эта область геометрии со времен Монжа прочно вошла в круг математических дисциплин, входящих в систему технического образования.

Теоретический аспект технической перспективы и более общее понимание последней как одного из видов проективных преобразований были разработаны еще Дезаргом. Идея изучения проективных свойств геометрических объектов возникла как новый подход к трудной античной теории конических сечений с целью упростить и обобщить ее. Сочинение Дезарга «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (1639) и Б. Паскаля «Опыт о конических сечениях» (1640) содержат превосходное решение этой проблемы и служат основой новой геометрической науки — проективной геометрии.

Центральная проекция инженеров обогатилась бесконечно удаленными элементами, связав воедино пучки сходящихся и параллельных прямых, равно как и плоскостей. Весьма плодотворным оказалось и понятие инволюции. Проективные и инволюторные свойства конических сечений составили целую теорию, среди многочисленных теорем которой выделяются теоремы, названные по имени их авторов — Дезарга и Паскаля (явление, не так часто встречающееся в истории науки). Кроме того, Дезарг открыл много теорем о полюсах и полярах конических сечений.

Вначале лишь немногие ученые восприняли идеи Дезарга и Паскаля. Их сочинения оказались утерянными. Лишь в 1845 г. Шаль нашел копию сочинения Дезарга. От работ Паскаля по проективной геометрии сохранился лишь набросок. В течение более столетия можно отметить лишь эпизодические применения проективных преобразований. Сама эта область еще не выделилась в отдельную дисциплину. Поэтому строгое и систематическое построение начертательной геометрии, проделанное Монжем к концу XVIII в., сыграло роль необходимой предпосылки для построения проективной геометрии.

Сочинения Л. Карно «О корреляции фигур в геометрии» (1801) и «Геометрия положения» (1803) вновь обратили внимание ученых на полузабытую со времен Дезарга и Паскаля науку. Довершил (1822) теоретическое построение и оформление новой области математики офицер наполеоновской армии Понселе, который имел для этого достаточно свободного времени в русском плену в Саратове. Выделив класс проективных преобразований фигур, Понселе уделил основное внимание соотношению между проективными и метрическими свойствами фигур.

Дальнейшее развитие проективной геометрии проходило под знаком поисков решения этой проблемы. В XIX в. соответственно наметились даже два направления. Приверженцы одного из этих направлений (в особенности Штаудт) стремились освободить проективную геометрию от всякой метрики. Другие (например, Мебиус) всячески развивали аналитические методы.

Противоречие это сгладилось в результате установившихся связей проективной геометрии с неевклидовой, с теорией функций комплексного переменного, когда раскрылись возможности проективной геометрии и ее подлинное место в системе математических наук. Общность проективных свойств была использована Кэли и Клейном в качестве средства рассмотрения различных геометрических систем с единой точки зрения. Синтетико-геометрические устремления Штаудта и др. послужили основой аксиоматического построения проективной геометрии в начале XX в.

Основания геометрии. К этой области геометрии относят те исследования и результаты, в которых изучается обоснованность выбора исходных понятий, дается анализ систем аксиом, положенных в основу геометрических теорий, а также содержатся конкретные преломления в последних ведущих математических идей. При этом раскрываются как внутриматематические связи геометрии, так и более широкие ее связи с другими науками.

Основания геометрии в XVIII в. — это по преимуществу основания евклидовой геометрии. Главным содержанием научных исследований был критический анализ «Начал» Евклида. Тяжеловесная система «Начал» не удовлетворяла многих математиков. Поэтому среди большого числа сочинений выделялась группа, в которой подвергалась критике система аксиом Евклида, в особенности постулат о параллельных.

В плане научного пересмотра оснований евклидовой геометрии нет необходимости упоминать о многочисленных дискуссиях, занимающих большое место в сочинениях, посвященных этому вопросу. Дело в том, что критика была пестрой, противоречивой, в большом числе случаев недостаточно обоснованной. По справедливому замечанию Даламбера, нельзя указать такого автора сочинения по основаниям геометрии, который не осуждал бы своих предшественников и современников в более или менее энергичных выражениях и не превозносил свою систему.

Придирчивый анализ оснований евклидовых «Начал», и в особенности аксиомы о параллельных и ее многочисленных «доказательств», привел математиков к убеждению в неудовлетворительности всех известных «доказательств» этой аксиомы. Некоторые из математиков, исходя из стремления доказать аксиому о параллельных путем приведения к противоречию, получили ряд теорем неевклидовой геометрии. Так, итальянский математик — монах И. Саккери рассматривал проблему параллельных таким образом: из концов отрезка AB восставим перпендикуляры AA_1 и BB_1 равной длины. Точки A_1 и B_1, а затем середины C и C_1 оснований прямоугольника соединим прямыми. Определим величину углов прямоугольника $\angle A = \angle B = \frac{\pi}{2}$ по построению. Перегнем чертеж по CC_1.

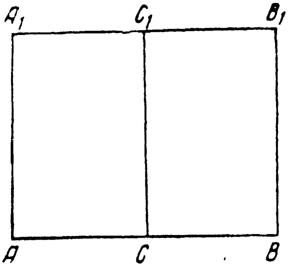

Рис. 8

$$CC_1 \perp AB; \text{ также } CC_1 \perp A_1B_1 \text{ и } \angle A_1 = \angle B_1.$$

Последующие предположения о величине этих равных углов получают у Саккери название гипотез: острого, прямого и тупого углов. Гипотеза тупого угла быстро привела его к противоречию. По замыслу Саккери, таков же должен быть исход и гипотезы острого угла, что дало бы доказательство аксиомы о параллельных. Однако случилось непредвиденное. Гипотеза острого угла при логическом ее развитии давала странные результаты, но к противоречию не приводила. Выводы Саккери, как выяснилось впоследствии, по существу совпадали с первыми теоремами геометрии Лобачевского: сумма углов треугольника оказалась меньше $2d$, площадь треугольника не была в состоянии неограниченно увеличиваться при увеличении его сторон; появилась необходимость в существовании некоторой абсолютной единицы длины и т. п.

Примерно через тридцать лет Клюгель (1763) сделал обзор важнейших попыток доказательства теоремы о параллельных линиях и пришел к выводу, что Евклид правильно поместил это предложение среди аксиом.

В части научного исследования оснований геометрии XVIII век замыкается статьей Ламберта, швейцарца по происхождению, берлинского академика. Около 1766 г. он написал «Теорию параллельных линий», очевидным образом навеянную работами Саккери и Клюгеля. Ламберт модифицировал четырехугольник Саккери; именно он построил перпендикуляры: $AA_1 \perp AB$, $BB_1 \perp AB$, $A_1B_1 \perp AA_1$ и свел задачу к определению величины угла B_1. Гипотеза прямого угла дала евклидову геометрию, гипотеза тупого угла привела к противоречию. А вот гипотеза острого угла снова дала странные теоремы, но ни к каким противоречиям не привела.

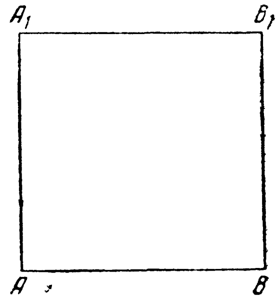

Рис. 9

Основания геометрии во второй половине XVIII в. приобрели помимо научного большое общественное значение. Вопрос о пригодности «Начал» в качестве школьного учебника геометрии был поставлен под сомнение и явился предметом широких дискуссий. В Англии и частично в Германии эти дискуссии привели к преобладанию изданий, сохраняющих дух и структуру евклидовых «Начал» и лишь более или менее упрощающих изложение. Во Франции, наоборот, традиции в этом направлении были подорваны. Исходные установки создания школьного курса и в конечном счете всей системы элементарной геометрии определялись общими воззрениями французских энциклопедистов, в особенности Даламбера. В результате появился ряд учебников для начальной и средней школы французских авторов: Даламбера, Безу, Лежандра, Лакруа. С большей или меньшей решительностью авторы этих учебников отрывали преподавание геометрии от евклидовой схемы.

Влияние этих книг было велико. В них по существу был создан современный нам тип школьного учебника геометрии. Для этого была проделана огромная работа. То, что кажется нам теперь очевидным в построении основ школьного учебника геометрии, было достигнуто к концу XVIII в. усилиями французских математиков.

Что же конкретно было сделано? Во-первых, в основы геометрии были введены метрика и движение, которых столь тщательно избегал Евклид. Во-вторых, была произведена широкая арифметизация, в том числе арифметизация теории отношений и пропорций, в результате чего отпала необходимость в пятой книге «Начал». Введение алгебраической символики и элементов алгебры сняло необходимость во второй книге «Начал». Употребление радикалов упразднило в курсе геометрии сложную классификацию иррациональностей, развитую в десятой книге «Начал». Так, евклидовы «Начала» были переработаны в курс элементарной геометрии, живое изложение которого сделало его доступным для широких кругов учащейся молодежи и для решения практических задач.

Создание новых принципов преподавания геометрии и углубленный анализ евклидовой системы аксиом по существу создали предпосылки для перестройки всей системы геометрических наук. Эта перестройка произошла в XIX веке. Начало ей было положено введением геометрии Лобачевского.