ГЛАВА VII

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ

Проблемы общей теории алгебраических уравнений. Современная алгебра — чрезвычайно широкая и разветвленная область математики. Она объединяет большое число самостоятельных научных дисциплин. Их общим предметом являются алгебраические операции, представляющие собой далеко идущие абстракции операций элементарной алгебры. Эти операции определяются в многообразных множествах. Последние выбираются для исследования преимущественно из соображений их приложимости. При этом оказывается необходимым заботиться о сохранении известной близости свойств определенных в них операций и свойств операций над числами. Так выделился класс алгебраических образований, наибольшее значение среди которых приобрели поля, кольца, группы и структуры. Алгебра взаимодействует с другими областями математики, участвуя в образовании новых, «пограничных», дисциплин (топологическая алгебра, теория групп и алгебр Ли и т. п.).

Столь общие воззрения на природу и состав алгебры сложились по существу недавно, лишь в XX в. Как было показано выше (глава VI), вплоть до XIX в. основной задачей алгебры являлось решение алгебраических уравнений, понимаемое как нахождение корней уравнения с помощью рациональных операций и операции извлечения корня. В поисках общей формулы математики перепробовали громадное количество методов и к самому концу XVIII в. были вынуждены прибегнуть к фактическому рассмотрению полей и групп, еще не вводя этих понятий явно.

Буквально на рубеже XVIII и XIX вв. в алгебре были сделаны открытия необычайной важности. Они сопровождались введением в эту науку ряда новых понятий (в первую очередь, понятия группы), легших в основу современной алгебры. Эти открытия повели к преобразованию всей алгебры в течение XIX в. Мы имеем здесь в виду результаты К.-Ф. Гаусса, Н.-Г. Абеля и Э. Галуа, относящиеся к доказательству основной теоремы алгебры, доказательству неразрешимости в радикалах уравнений степени $n \geqslant 5$ и созданию теории Галуа. Рассмотрим подробнее эти результаты.

Карл-Фридрих Гаусс сделал свои первые открытия в алгебре еще совсем молодым человеком во время обучения в Геттингенском университете (1795—1798). В марте 1796 г., занимаясь задачей отыскания корней уравнения

$$x^n - 1 = 0,$$

он обнаружил связь между этой задачей и делением окружности на равные части, доказав, что правильный 17-угольник можно вписать в круг с помощью циркуля и линейки. Соответствующий алгебраический факт, что уравнение $x^{17} - 1 = 0$ разрешимо в квадратных радикалах, Гаусс обобщил вскоре, найдя критерий возможности такой разрешимости (уравнение разрешимо для простого n вида $n=2^{2^k}+1$) и дав его геометрическую интерпретацию.

При доказательстве этой группы предложений Гаусс развил методы, послужившие одной из исходных точек при создании теории Галуа, по собственному признанию ее автора. Так, например, Гаусс явно высказал, что цель его исследований полинома

$$X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$$

состоит в том, чтобы последовательно разлагать полином на множители вплоть до линейных, обнажая при этом структуру уравнения.

Гаусс установил, что уравнение $X = 0$ степени $m = n - 1$, где n — простое, неприводимо в поле рациональных чисел и нормально над ним, т. е. все его корни рационально выражаются через один из них. Оказалось, что эти корни имеют вид: α, α^β, $(\alpha^\beta)^\beta$, ..., т. е. что группа автоморфизмов этого уравнения циклическая. Остается лишь один шаг для того, чтобы обнаружить, что любая подгруппа циклической группы является ее нормальным делителем. Этот шаг сделал

Галуа, учитывавший также указание Лагранжа, что подстановки корней уравнений указывают путь к построению их общей теории.

Через три года, в 1799 г., Гаусс получил в Гельмстедте степень доктора за диссертацию, посвященную доказательству основной теоремы алгебры. Спустя много лет он вернулся к этой теореме и дал (в 1815, 1816 и 1849 гг.) три новых доказательства.

Первоначальная формулировка этой теоремы, данная Жираром (1629) и Декартом, содержала, как мы уже упоминали, утверждение, что уравнение $P_n(x)=0$ может иметь столько корней, сколько единиц содержит его степень. В связи с последующим введением комплексных чисел $a+bi$ это понимание возможности переросло в уверенность, что корней уравнения $P_n(x)=0$ (где n — степень уравнения) будет именно n — действительных и комплексных. Вслед за первым доказательством Даламбера (1746) появились и другие. При этом предполагалось, что всякий полином может быть разложен на линейные множители

$$P_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i).$$

Оставалось доказать, что все корни x_i ($i=1, 2, \ldots, n$) имеют вид $a+bi$ (a и b — действительны). Проблема заключалась теперь в установлении разложимости всякого алгебраического уравнения с действительными коэффициентами в произведение вещественных множителей степени $n=1$ или $n=2$.

Мы не будем рассматривать те доказательства, в которых содержатся явные апелляции к фактам математического анализа. Вообще говоря, отказаться полностью от использования свойств непрерывности при доказательстве этой теоремы невозможно. Однако вопрос о чисто алгебраическом доказательстве основной теоремы алгебры был в это время весьма актуальным. Такое алгебраическое доказательство искал и Гаусс.

В упомянутой выше докторской диссертации он критически рассмотрел все доказательства и обнаружил их общий недостаток: априорное предположение, что корни уравнений существуют. В действительности необходимо существование корней доказывать, чтобы избегнуть порочного круга. Существование Гаусс относил к области комплексных чисел $\{a+bi\}$, так как никаких других более общих видов величин он не мог себе представить. Тем не менее он отмечал, что если бы были определены другие числовые области, то вопрос существования корня надо было относить к ним.

Алгебраическое доказательство Гаусса исходило из предположения, что заранее задана область K комплексных чисел. Состояло это доказательство в установлении того факта, что каждое уравнение с вещественными коэффициентами имеет корень в указанной области. В иной, эквивалентной, постановке требуется доказывать разложимость любого полинома, коэффициентами которого являются действительные числа, на вещественные множители первой и второй степени.

Отказ от предположения о существовании корней уравнения, постулированный Гауссом, а также от обращения к фактам математического анализа, сильно затруднил задачу. По существу ему пришлось строить поля разложений многочленов. Громоздкое доказательство заняло специальный мемуар (1815). Оно потребовало введения ряда специальных понятий и лемм [1]. Так, Гауссу пришлось заново строить теорию симметрических функций и доказывать их алгебраическую независимость. Это дало ему возможность ввести новый способ доказательства, получивший впоследствии (у Кронекера, Кенига и др.) название принципа Гаусса. Соотношение между элементарными симметрическими функциями

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots) = 0$$

может быть лишь тождественным. Пусть, например, дан полином, разлагающийся на линейные множители

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

и между его коэффициентами установлено какое-либо соотношение

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots) = 0.$$

В силу принципа Гаусса это соотношение останется верным при подстановке коэффициентов любого другого полинома $Q_n(y) = 0$. Таким образом, все соотношения между коэффициентами разложимых многочленов верны для коэффициен-

[1] См. И. Г. Башмакова. О доказательстве основной теоремы алгебры. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. X, стр. 257—304.

тов всех многочленов. Вслед за этим вводится понятие дискриминанта

$$P = \prod_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)$$

и доказывается ряд лемм, которые в силу их специального характера мы не будем здесь приводить.

Дальнейшее доказательство опирается на лемму: если

$$Q(u, x) = \prod_i (\lambda_i + \mu_i u + \nu_i x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и w — неопределенная величина, то

$$\theta\left(u + w\frac{\partial\theta}{\partial x}, x - w\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)$$

делится на $\theta(x, u)$. Применяя эту лемму к многочленам, Гаусс получил известное тождество:

$$\theta\left(u + w\frac{\partial\theta}{\partial x}, x - w\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = \theta(u, x)\,\theta_1(u, x, w, a_1, \ldots, a_n),$$

где θ_1 — целая функция, рациональная относительно своих аргументов.

При помощи этого тождества Гаусс построил затем поле, в котором вспомогательный многочлен $\theta(u, x)$ имеет линейный множитель, а заданный многочлен — множитель второй степени.

Примерно через 50—60 лет Кронекер сумел использовать метод построения полей, данный Гауссом, и создать (1882)[1] конструкцию поля разложения для любого полинома. Оказалось, что если дан $P_n(x)$ — многочлен с коэффициентами из поля k, над которым уравнение $P_n(x) = 0$ неприводимо, то можно (не предполагая существования $K \supset k$) построить поле разложения, т. е. то минимальное поле, в котором

$$p_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

Тогда основная теорема алгебры приняла вид: поле любого полинома (с вещественными или комплексными коэффициен-

---

[1] См. L. Kronecker. Werke, Bd. III, SS. 341—360; Bd II, SS. 247—300.

тами) есть подполе поля комплексных чисел или изоморфно этому подполю.

Другое из замечательных алгебраических открытий начала XIX в. — доказательство неразрешимости в радикалах уравнения пятой степени. Как мы указывали выше, поиски подходящей формы иррациональности для решения того или иного класса алгебраических уравнений сменились уверенностью, что, по-видимому, это невозможно. Задача обернулась; необходимым оказалось исследовать наиболее общие выражения, содержащие радикалы, с тем чтобы выяснить, могут ли они быть выражениями корней алгебраического уравнения пятой степени.

По этому пути и повел свои исследования в самом конце XVIII в. П. Руффини. В 1799 г. он опубликовал «Общую теорию уравнений, в которой доказывается невозможность алгебраического решения общих уравнений выше четвертой степени».

Но первый реальный успех выпал на долю скромного молодого норвежского математика Нильса-Генрика Абеля (1802—1829). За время своей короткой жизни он успел сделать так много открытий в математике, что по праву может считаться одним из наиболее выдающихся математиков XIX в. Начав с доказательства невозможности решения в радикалах уравнения пятой степени, Абель произвел вслед за тем основополагающие исследования в области теории аналитических функций. Он также исследовал ряд классов специальных функций, в первую очередь эллиптических и гиперэллиптических.

Еще в школе (около 1820 г.) Абель заинтересовался проблемой разрешимости уравнений в радикалах. Одно время ему казалось, что он дал доказательство разрешимости в радикалах уравнения пятой степени. Вскоре выяснилось, что это доказательство содержало ошибку. Но ошибочное доказательство сослужило свою хорошую службу. Абель получил государственную стипендию и возможность поехать в Европу для усовершенствования в математике.

Исправленное доказательство появилось в 1824 г. в «Мемуаре об алгебраических уравнениях, где доказывается невозможность разрешимости общего уравнения пятой степени». В нем Абель, по-видимому независимо от Руффини, шел тем же путем; он стремился доказать, что наиболее общие выражения, содержащие радикалы, не могут быть корнями общего алгебраического уравнения пятой степени. Интересно, что это доказательство Абеля страдало тем же недостатком, что

Н. Г. Абель
1802—1829

и доказательство Руффини. Оно опиралось на предположение, что корни резольвенты должны рационально выражаться через корни данного уравнения.

Наконец, в 1826 г. в работе Абеля «Доказательство невозможности алгебраической разрешимости уравнений, степень которых превышает четвертую» многовековая проблема получила удовлетворительное разрешение. Здесь Абель рассматривал уравнения пятой степени с переменными коэффициентами. Решения он трактовал как выражения корней через алгебраические функции коэффициентов. Этот вид функций образуется из аргументов посредством конечного числа четырех арифметических операций и операции извлечения корня, показателем которого является простое число.

Громоздкое доказательство Абеля мы не имеем возможности полностью воспроизвести здесь[1]. Оно начинается (§ 1) с построения наиболее общего вида алгебраических функций

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + \ldots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

где n — простое число, q_i — алгебраические функции того же порядка, что и v, но степени не выше, чем $m - 1$; p — алгебраическая функция порядка на единицу ниже, чем v, построенная так, что она не выражается рационально через $q_0, \ldots, q_{n-1}$. Затем (§ 2) рассмотрены свойства алгебраических функций, удовлетворяющих данному уравнению, и доказано, что если уравнение алгебраически разрешимо, то его корню всегда можно дать такой вид, что все алгебраические функции, из которых он составляется, выражаются через рациональные функции корней данного уравнения.

Следующий параграф (§ 3) посвящен вопросу о подстановках и о числе различных значений, которые при этом могут принимать функции нескольких переменных. Здесь доказана теорема, известная как теорема Коши: если число различных значений v меньше p — наибольшего простого числа, не превосходящего n, — то оно не превышает 2. Отсюда получим результат, что не существует функции от пяти величин, имеющей три или четыре различных значения. Наконец (§ 4), показано, что никакое самое общее радикальное выражение не может быть универсальным выражением корней уравнения данной степени, большей чем четвертая.

Доказательства Абеля — Руффини не дают возможности выделить классы уравнений, разрешимых в радикалах. Они

[1] См. Н. Г. Чеботарев. Теория Галуа, т. I. ГТТИ, М. — Л., 1936.

не снимают также возможности такой разрешимости для уравнений с численными коэффициентами подбором подходящих иррациональностей в конкретном случае. Исследования надо было расширять. Перед Абелем, как и в свое время перед Лагранжем, встала общая проблема разрешимости — основная проблема классической теории Галуа.

Лагранж нашел частный класс уравнений, разрешимых в радикалах, — циклические уравнения.

Абель в «Мемуаре об одном особом классе алгебраически разрешимых уравнений» (1829) вновь исследовал циклические уравнения, отыскав для них явные выражения корней через коэффициенты. Кроме того, он рассмотрел еще один класс разрешимых уравнений, которые по существу являются нормальными уравнениями с коммутативной (абелевой) группой Галуа.

Как в этой, так и в другой (оставшейся незаконченной и опубликованной лишь в 1839 г.) работе Абеля «Об алгебраической разрешимости уравнений» доказан ряд теорем, относящихся к теории Галуа. Например, Абель доказал теорему, эквивалентную теореме Галуа: чтобы неприводимое уравнение было разрешимо в радикалах, необходимо и достаточно, чтобы все корни были рациональными функциями двух известных корней. В других теоремах он исследовал структуру нескольких конкретных классов разрешимых групп. Фактически Абель исследовал структуру коммутативных групп. Он показал, что эти группы являются произведениями циклических групп. Однако понятие группы у него еще не было выделено.

Возникновение теории Галуа. Абель не смог дать общий критерий разрешимости уравнений с числовыми коэффициентами в радикалах. Но решение и этого вопроса не заставило себя долго ждать. Оно принадлежит Эваристу Галуа (1811—1832), французскому математику, скончавшемуся, как и Абель, в очень молодом возрасте. Его жизнь, короткая, но наполнённая активной политической борьбой, страстный интерес к математическим занятиям представляют яркий пример того, как в деятельности одаренного человека накопленные предпосылки науки претворяются в качественно новый этап ее развития.

Галуа успел написать мало работ. В русском издании его работы, рукописи и черновые записи заняли лишь 120 страниц в книге маленького формата[1]. Но значение этих работ

[1] См. Э. Галуа. Соч, ОНТИ, М. — Л., 1936.

огромно. Поэтому рассмотрим его замыслы и результаты подробнее.

Рассмотрим вслед за Галуа уравнение

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Для него определим область рациональности — совокупность рациональных функций от коэффициентов уравнения

$$R(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Область рациональности R является полем, т. е. совокупностью элементов, замкнутой по отношению к четырем действиям. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — рациональны, то R — поле рациональных чисел; если же коэффициенты — произвольные величины, то R есть поле элементов вида $\frac{P(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$, где числитель и знаменатель — многочлены. Область рациональности можно расширить, присоединяя к ней элементы, например корни уравнения. Если к этой области присоединить все корни уравнения, то вопрос о разрешимости уравнения делается тривиальным. Задача разрешимости уравнения в радикалах может ставиться только по отношению к определенной области рациональности.

Галуа доказал, что для всякого уравнения $P_n(x) = 0$ можно в той же области рациональности найти некоторое уравнение $Q(x) = 0$, называемое нормальным. Корни данного уравнения $P_n(x) = 0$ и соответствующего нормального уравнения $Q(x) = 0$ выражаются друг через друга рационально. Нормальное уравнение — это уравнение, обладающее тем свойством, что все его корни рационально выражаются через один из них и элементы поля коэффициентов. Примером нормального уравнения будет уравнение: $x^n - 1 = 0$. Его корни:

$$x_1 = \xi, \ x_2 = \xi^2, \ \ldots, \ x_n = \xi^n = 1.$$

Нормальным также будет являться, например, квадратное уравнение.

Все подстановки корней нормального уравнения образуют группу G. Это и есть группа Галуа уравнения $Q(x) = 0$, или, что то же самое, уравнения $P_n(x) = 0$. Она обладает, как выяснил Галуа, замечательным свойством: любое рациональное соотношение между корнями и элементами поля R инвариантно относительно подстановок группы G. Таким образом, Галуа связал с каждым уравнением группу подстано-

Э. Галуа
1811—1832

вок его корней. Он же ввел (1830) термин «группа» — адекватное современному, хотя и не столь формализованное определение.

Структура группы Галуа оказалась связанной с задачей разрешимости уравнений в радикалах. Чтобы разрешимость имела место, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая группа Галуа была разрешима. Это значит, что в данной группе существует цепочка

$$G \supset H_{p_1} \supset H_{p_2} \supset + \ldots \supset H_{p_k} (= E)$$

нормальных делителей с простыми индексами $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Напомним, кстати, что нормальные делители, или, что то же самое, инвариантные подгруппы H_i, — это такие подгруппы группы G, для которых справедливо $gH_i = H_ig$, где g — элемент группы G.

Общие алгебраические уравнения $P_n(x) = 0$ при $n \geqslant 5$, вообще говоря, такой цепочки не имеют, так как группы подстановок имеют только один нормальный делитель индекса 2 — подгруппу всех четных подстановок. Поэтому эти уравнения в радикалах, вообще говоря, неразрешимы.

Аппарат, введенный Галуа для установления разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, имел значение, выходящее за рамки указанной задачи. Его идея изучения структуры алгебраических полей и сопоставления с ними структуры групп конечного числа подстановок была плодотворной основой современной алгебры. Однако она не сразу получила признание.

Перед роковой дуэлью, оборвавшей его жизнь, Галуа в течение одной ночи сформулировал свои важнейшие открытия и переслал их другу О. Шевалье для публикации в случае трагического исхода. Это письмо было опубликовано вскоре после смерти Галуа, однако идеи, содержащиеся в нем, не нашли отклика. Только через 14 лет, в 1846 г., Лиувилль разобрал и опубликовал все математические работы Галуа. В середине XIX в. в двухтомной монографии Серре, а также в работе Э. Бетти (1852) впервые появились связные изложения теории Галуа. И только с 70-х годов прошлого века идеи Галуа начали получать дальнейшее развитие.

Это развитие происходило в разных направлениях. В области классической основы, наиболее близкой собственным идеям Галуа, новые задачи группировались вокруг проблемы классификации алгебраических иррациональностей и установления их арифметической природы. Сюда, например, относится теорема Кронекера — Вебера, что корни абелевых уравнений (т. е. уравнений с коммутативной группой) с рациональными коэффициентами рационально выражаются через корни из единицы. Дальнейшие обобщения этой теоремы привели к общей теории полей классов, где речь идет о классификации всех абелевых расширений данного поля алгебраических чисел. Последнее является конечным алгебраическим расширением поля рациональных чисел. Современная теория алгебраических чисел сложилась как соединение теории этих чисел с теорией идеалов и теорией Галуа.

Постановка новых, более общих задач способствовала быстрому усложнению теории Галуа и росту общности ее результатов. Среди этих задач упомянем, например, проблему разыскания всех уравнений, которые для заданной области рациональности обладают определенной, наперед заданной группой. Проблемы такого рода привели к изучению полей общих рациональных функций (проблема Люрот—Штейница). Обобщения задачи о разрешимости уравнений в радикалах привели к проблеме общего характера о возможности сводить уравнение к цепочке вспомогательных уравнений с меньшим числом параметров. Первые общие результаты здесь были получены лишь советским математиком Н. Г. Чеботаревым в его теории резольвент. Другой советский математик — И. Р. Шафаревич в 1954 г. решил так называемую обратную задачу теории Галуа: для любой разрешимой группы любого порядка, если расширяемое поле κ_0 алгебраических чисел содержит корень n-й степени из единицы, всегда существует сколько угодно его расширений K, имеющих над κ_0 любую наперед заданную разрешимую группу n-го порядка.

Современная теория Галуа превратилась в сложную разветвленную математическую дисциплину, включающую в себя обширный материал о связях между свойствами уравнений, алгебраических чисел и групп [1].

Возникновение теории групп. Аппарат, введенный Галуа, в значительной степени опирается на понятие группы. Галуа же, по-видимому независимо от Руффини, ввел соответствующий термин. Плодотворность этого понятия и необходимость его введения были очевидны для многих математиков. Группы подстановок фактически рассматривал еще Лагранж. С 1815 г. Коши провел серию исследований по теории конеч-

[1] См. Н. Г. Чеботарев. Проблемы современной теории Галуа. В кн.: Э. Галуа. Соч., стр. 183—241; Н. Г. Чеботарев. Собр. соч., т. III. стр. 5—43; Н. Г. Чеботарев. Основы теории Галуа, тт. 1—2. Гостехиздат, М., 1934—1937.

ных групп, доказав, в частности, теорему о том, что каждая группа, порядок которой делится на простое число *p*, содержит по крайней мере одну подгруппу порядка *p*.

В первой половине XIX в. факты теории групп играли еще вспомогательную роль, главным образом в теории алгебраических уравнений. Складывающаяся теория групп была еще преимущественно теорией конечных групп — групп подстановок. К середине века выяснилось, что понятие группы имеет более широкое применение. В связи с этим в 50-х годах в работах Кэли и др. начало появляться более общее, абстрактное определение группы. Выяснилось, что наиболее важные свойства группы зависят не от характера элементов подстановки, а от групповой операции. Процесс перехода к абстрактной теории групп ускорился с 1870 г., после появления трактата К. Жордана «Traité des substitutions et des equations algébriques», где были подытожены результаты теории конечных групп в применении к теории чисел, теории функций и алгебраической геометрии.

К концу XIX в. теория конечных групп оформилась и достигла высокого уровня. Появился ряд сводных трактатов, содержащих ее систематическую разработку. В это же время появились первые приложения теории групп. В 1890—1891 гг. русский кристаллограф и геометр Е. С. Федоров и немецкий математик А. Шёнфлис независимо друг от друга решили методами теории групп задачу классификации всех кристаллических пространственных решеток. Они установили наличие 230 пространственных групп симметрии, состоящих из совокупности самосовмещений кристаллических структур. Точки, получаемые друг из друга преобразованием данной группы, называются гомологичными по отношению к этой группе и образуют так называемую правильную систему. В настоящее время исследование структуры кристаллических веществ включает в себя определение их федоровских групп.

Дискретные конечные группы, к которым принадлежат федоровские группы, получили распространение в теории многомерных пространств в связи с теорией правильных многогранников в них. В основе этих рассмотрений лежит теорема Жордана: число конечных линейных групп заданного измерения существенно конечно. Та же теорема получила приложение на рубеже XIX—XX вв. в теории алгебраических интегралов линейных дифференциальных уравнений, римановых поверхностей и др. Например, Жордан указал на связь между линейными дифференциальными уравнениями, имеющими алгебраические интегралы, и конечными группами. Оказалось, что необходимым и достаточным условием существования алгебраических интегралов у линейного дифференциального уравнения фуксова типа является условие конечности группы линейных преобразований, претерпеваемых его интегралами при обходе независимой переменной вокруг каждой из критических точек.

К концу XIX в. теория конечных групп сформировалась настолько, что для нее приобрела актуальность проблема классификации. Однако в общем виде эта проблема не решена до сих пор. Чрезвычайные трудности возникают и при исследовании ее частных аспектов. Например, окончательно не решен вопрос о структуре и классификации конечных разрешимых групп. Оказалось также, что все известные простые некоммутативные конечные группы имеют четные порядки. Проблема Бернсайда: будет ли это свойство общим для всех групп этого класса — остается пока нерешенной.

При таком положении вещей в теории групп, когда выделено общее, абстрактное понятие группы, естественно, возникал вопрос об исследовании бесконечных групп, как непрерывных, так и дискретных, а также о создании вычислительного аппарата, приспособленного для нужд теории групп. Эти три группы вопросов были поставлены и получили продвижение в конце XIX — начале XX в.

Главные достижения здесь принадлежат ученикам К. Жордана — Ф. Клейну и С. Ли, которые предприняли систематическое изучение теории групп и ее возможных обобщений и приложений.

Норвежский математик Софус Ли распространил методы теории групп на проблему интегрирования дифференциальных уравнений. Он ввел около 1873 г. новый вид групп, названный им «непрерывные группы преобразований». С каждым дифференциальным уравнением он связал такую группу преобразований, которая оставляет его неизменным. Группы Ли состояли из преобразований вида

$$x \to f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

определяемых параметрами. Например, для вращения плоскости параметрами являются углы поворота, для пространства — так называемые эйлеровы углы. Перемножение двух преобразований, являющихся элементами группы, дает преобразование. Параметры последнего связаны с параметрами сомножителей непрерывными функциями.

$$F_i = F_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Группы, определенные таким образом, получили название групп Ли. Структура групп Ли оказалась связанной с вопросом об интегрируемости дифференциальных уравнений в квадратурах. Соответствующие структурные свойства групп Ли получили, по аналогии с теорией Галуа, интерпретацию свойств разрешимости. С. Ли классифицировал всевозможные группы преобразований на плоскости и построил таблицу нормальных типов дифференциальных уравнений с указанием, решаются ли они в квадратурах. Вопрос, вытекает ли из непрерывности функций F_i существование таких параметров в группе, для которых функции F_i аналитичны, был включен Д. Гильбертом в число его знаменитых проблем и в настоящее время решен положительно[1].

Другое важное приложение теории непрерывных групп было осуществлено около 1872 г. Ф. Клейном. Позднее (в главе XI) будет рассказано о концепции Клейна, что любая из геометрий (евклидова, аффинная, проективная и т. д.) имеет в своей основе некоторую непрерывную группу преобразований и представляет собой по существу учение об инвариантах этой группы.

Открытие столь многообразных приложений теории непрерывных групп было причиной введения еще более общего, абстрактного определения непрерывной группы. В него входит требование задания предельного перехода, согласованного с группой операций. Вскоре удалось показать (это сделал Ван Данциг), что это определение более общее, нежели определение Ли, и что существуют непрерывные группы, не являющиеся группами Ли. Так как при этом определении отвлекаются от того, что элементы группы являются преобразованиями, то приходят по существу к топологической группе и к топологическому пространству. В связи с этим создалась настоятельная необходимость объединить отдельные топологические факты в единую теорию. Это было проделано А. Пуанкаре в его знаменитом мемуаре *«Analysis situs»* (1895) и в пяти прибавлениях к нему (1899—1911).

На рубеже XIX и XX вв. теория групп приобрела необычайную разветвленность, составив ядро современной алгебры. Ее составляет ряд высокоразвитых теорий: конечных групп, бесконечных дискретных групп, непрерывных групп, в том числе групп Ли. Теоретико-групповые методы проникли в ряд математических дисциплин и их приложений. Открытия

---

[1] См., например, Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. ГТТИ, М., 1954.

де Бройля, Шредингера, Дирака и др. в квантовой механике и в теории структуры материи показали, что современная физика должна опираться на теорию непрерывных групп, в особенности на теорию представлений групп линейными операторами, теорию характеров и др., разработанные Картаном, Г. Вейлем и другими учеными.

Прошло около половины столетия после работ Гаусса, Абеля и Галуа, а центр тяжести в алгебраических исследованиях переместился в теорию групп, подгрупп, колец, структур. В алгебре вступил в свои права период современной математики.

Некоторые другие пути формирования современной алгебры. Из богатой и разнообразной истории алгебры XIX в. мы выделили сравнительно небольшую область формирования некоторых основных понятий. Это сделано потому, что в выделении немногих алгебраических объектов — группы, поля, а позже кольца и структуры — и в создании соответствующих теорий отражается главное содержание изменений, происшедших в алгебре в течение XIX — начала XX в. Эти изменения предопределили основные направления развития алгебры в первой половине XX в.

Более обстоятельное исследование истории создания современной алгебры связано с решением нескольких историко-математических задач.

Во-первых, необходимо проследить обогащение теории групп, а также теории других основных алгебраических понятий фактическим материалом, позволяющим полнее раскрывать их свойства. Так, наряду с историей конечных и непрерывных бесконечных групп большой интерес в силу их важности для приложений вызывают бесконечные дискретные группы.

Во-вторых, перед исследователями встает задача раскрытия связей теории групп (а также теории полей, колец и структур) с другими математическими дисциплинами. Например, наметившееся внедрение теоретико-групповых рассмотрений в область топологических свойств привело к тому, что теперь каждый топологический образ характеризуется в известной мере своей фундаментальной группой, в общем случае — бесконечной. Особенно велика, по-видимому, роль теории групп в теории узлов, частным случаем которых являются косы. Среди многих задач, которые здесь предстоит решить, можно назвать, например, задачу подробного выяснения такого обстоятельства, что в топологических образах фундаментальные группы несут, по-видимому, функции, сходные с функциями групп Галуа в алгебраических полях.

История алгебры XIX в. будет неполной, если исследователь не обратит внимания, в-третьих, на формирование линейной алгебры, выраставшей из теории систем линейных уравнений и связанной с ней теории определителей и матриц. Во второй половине XIX в. велись весьма активные исследования теории инвариантов уравнений, т. е. выявления функций их коэффициентов, сохраняющих свои значения при том или ином заданном классе преобразований. На этом пути развития выросла более общая теория форм, нашедшая применение не только в алгебре, но и в других областях математики: теории чисел, дифференциальной геометрии, алгебраической геометрии, механике и др., а также в их приложениях.

Мы не смогли, наконец, выделить место для освещения истории гиперкомплексных числовых систем Гамильтона и Грассмана, созданных в 1830—1840 гг., и для богатой совокупности средств изучения векторных пространств, играющих ныне столь важную роль в исследовании различных, казалось бы, математических теорий с единых, весьма общих позиций.