ГЛАВА VIII

ПЕРЕСТРОЙКА ОСНОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В XIX в.

Усиление роли теории пределов. Математический анализ к XIX в. развился в разветвленную систему дисциплин, продолжая занимать центральное место в математике. Неиссякающий поток новых теоретических результатов и непрерывно расширяющаяся область приложений обусловили то, что в общей структуре математики особое место заняли именно аналитические дисциплины.

Математическое естествознание обогащало свое содержание главным образом за счет анализа, в первую очередь дифференциальных уравнений. Методы анализа глубже проникли в физику, захватив помимо механики и оптики теорию электрических, магнитных и тепловых явлений. В механике были подвергнуты разработке кроме точек и их систем непрерывные среды. Разнообразные области техники: паровые машины, артиллерия, техника строительства и др. — получали новые методы аналитического исследования важнейших задач. В связи с этим структура и содержание математического анализа подверглись глубокой перестройке.

Стандарт логической строгости, сложившийся в математическом анализе во второй половине XVIII в., отставал от приложений. Работа по обоснованию этой области математики, проделанная Эйлером, Даламбером, Лагранжем и др., не привела к преодолению отставания. Теоретические исследования требовали новых, более тонких аналитических методов, опирающихся на ясные и строго определенные исходные положения. Задача критического пересмотра системы определений и логических приемов доказательств приобрела для математического анализа еще большую актуальность. От ее решения зависело теперь слишком много. Поэтому исследования, имеющие целью обосновать математический анализ, занимали в математике XIX в. весьма заметное место.

В современной структуре математического анализа одно из центральных мест принадлежит понятию предела. Его значение огромно. На него опирается практически весь аппарат инфинитезимальных доказательств, характеризующийся гипотетико-дедуктивными суждениями и применением специфических неравенств (этот аппарат мы выше условно назвали: ε, δ-аппарат).

Выше было показано также, что понятия предела и перехода к нему фактически существуют в математике с давних пор. Первоначальная теоретическая форма предельных суждений имелась еще у древних греков в виде метода исчерпывания. Мы не находим в этом методе еще ни понятия предела, ни единой отражающей сущность этого понятия символики. Однако единообразное проведение метода с обязательным, хотя и неявно осуществляемым предельным переходом дало нам возможность увидеть в нем неразвитую форму позднейшей теории пределов.

Вплоть до Ньютона в истории математики можно отметить лишь наличие отдельных фактически производимых предельных переходов, совокупность которых медленно расширяется. Ньютону мы обязаны первой попыткой развить теорию пределов как логическую основу созданного им в виде теории флюксий дифференциального и интегрального исчисления. Он же ввел специальный термин: *limes* (предел), не давая ему формального определения, по-видимому как интуитивно ясному. Теория Ньютона опубликована в его знаменитых «Математических началах натуральной философии». Здесь она носила название «метода первых и последних отношений», и об этом методе утверждалось, что с его помощью все последующее доказывается. Однако метод первых и последних отношений не давал оперативной основы для практического пользования бесконечно малыми. Ньютон также не смог преодолеть трудности, связанные с определением отношения исчезающих или зарождающихся величин.

Математики XVIII в. испробовали множество способов обоснования анализа бесконечно малых. Неудовлетворительность почти всех этих способов быстро делалась очевидной. Только по отношению к методам, основанным на понятии предельного перехода, критика не обнаруживала существенных логических пробелов и несообразностей. Поборники метода пределов: Даламбер, Люилье, Гурьев и др. — с большой настойчивостью отстаивали его, разъясняя роль и смысл понятия предела. Так, Даламбер писал по этому поводу, что Ньютон видел в дифференциальном исчислении только метод определения пределов отношений. Он никогда не дифференцировал величины, а только уравнения, так как всякое уравнение заключает в себе отношения между переменными, а решение дифференциальных уравнений состоит только в определении пределов отношений между конечными разностями содержащихся в уравнении переменных.

Однако Даламбер не смог противопоставить лейбницевскому отбрасыванию бесконечно малых при дифференцировании какой-либо рациональный метод, основанный на предельных рассмотрениях. Рекомендованный им прием можно коротко записать формулой

$$y' = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\Big|_{h=0}.$$

В этом приеме явно предполагается разложимость функции в ряд; кроме того, в нем по существу еще нет операций с пределами.

Подобные определения понятия предела и связанных с ними понятий могли служить лишь для объяснения, истолкования, наконец, оправдания правильности результатов анализа бесконечно малых. Так они и воспринимались. Но для внедрения в анализ предельных рассмотрений требовалось бо́льшее: чтобы они служили средством разработки стоящих перед этой наукой проблем, вошли в его оперативную практику. На этом пути предстояло преодолеть большие трудности, связанные: а) с необходимостью определять существование пределов; б) с отсутствием алгоритма вычисления пределов; в) с отсутствием математического выражения пределов, позволяющего оперировать с ними, и соответствующей символики.

Первая из указанных трудностей (не говоря уже об остальных) отнюдь не носила абстрактно-теоретического характера, как это могло бы показаться. В математике накопилось большое количество проблем, решение которых сводилось к решению вопросов существования. Таковы, например: а) вопрос о существовании корней алгебраических уравнений; б) о существовании сумм бесконечных рядов чисел; в) о существовании сумм бесконечных рядов функций; г) о существовании интегралов функций как действительного, так и комплексного переменного. Для решения всех этих проблем совокупность известных предельных переходов, индивидуально определенных ранее, была совершенно недостаточна.

В конце XVIII — начале XIX в. сочинения большого числа математиков отражали уже, с различной степенью решимости и последовательности, объективную необходимость построения теории пределов как основы математического анализа и коренной перестройки последнего. Наибольшие заслуги в осуществлении этого принадлежат О. Коши.

Деятельность О. Коши в области обоснования математического анализа. Процесс перестройки оснований математического анализа на базе теории пределов отчетливо проявился в 20-х годах XIX в., прежде всего в знаменитых лекциях О. Коши, которые он читал в Политехнической школе в Париже.

Коши, Огюстен-Луи (1789—1857), окончил в 1807 г. Политехническую школу в Париже. Это учебное заведение, открытое в 1794 г., во время Великой французской буржуазной революции для подготовки военных инженеров, сделалось впоследствии основным источником пополнения руководящих инженерных кадров страны. В течение двух лет питомцы Политехнической школы получали основательную подготовку по математике, механике и черчению. Затем их направляли для приобретения специальных инженерных знаний на два года в одно из четырех учебных заведений: Институт путей сообщения, Горный институт и в высшие военные училища: инженерное и артиллерийское. Лучшие из оканчивающих имели право выбора. Как правило, они попадали в первый из упомянутых институтов, пользовавшийся наиболее высокой репутацией. Дальнейшее распределение по институтам также происходило в соответствии с учебными успехами. Коши учился в Институте путей сообщения, а затем (до 1813 г.) работал инженером.

С 1816 г. Коши был назначен членом Академии и профессором Политехнической школы, где работал вместе с другими лучшими математиками Франции. Однако с 1830 до 1838 г. Коши вынужден был находиться в эмиграции в силу своих религиозно-монархических убеждений и оппозиции республиканскому строю. По возвращении во Францию он преподавал в иезуитском колледже и только в 1848 г. стал профессором Сорбонны — Парижского университета.

Научная продуктивность Коши была исключительной. Биографы насчитывают 789 опубликованных им работ. Наибольшее их число относится к различным областям математического анализа и его приложений. В последующем

О. Коши
1789—1857

(глава X) мы будем иметь возможность осветить вклад Коши в теорию функций комплексного переменного, систематическое построение которой является в значительной степени делом его рук. В настоящей главе, чтобы не нарушать цельности изложения, мы не остановимся также на заслугах Коши в области дифференциальных уравнений: постановка задачи Коши, основные теоремы существования решений для случая действительных и комплексных переменных, метод мажорант и метод характеристических полос для интегрирования уравнений с частными производными первого порядка (об этом см. в главе IX). По-видимому, в настоящей книге мы не сможем вообще дать характеристику работ Коши по геометрии, теории чисел, алгебре, теории упругости и оптике и воссоздать атмосферу интенсивного творчества Коши и его огромного авторитета среди ученых-математиков. Здесь, как и повсюду в тексте, мы вынуждены жертвовать персональным аспектом вопроса и ограничиваться лишь краткими биографическими сведениями, не претендуя на составление научной биографии.

В Политехнической школе Коши читал лекции по математическому анализу. Весь курс лекций был опубликован в трех книгах: «Курс анализа» (1821), «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823), «Лекции по приложениям анализа к геометрии» (2 тома, 1826, 1828). Эти книги имеют особое значение потому, что в них впервые математический анализ последовательно строится на основе теории пределов. Они знаменуют начало коренной перестройки основ этой науки — перестройки, непосредственно предшествующей ее современному состоянию.

«Курс анализа» Коши, называемый иногда «Алгебраическим анализом» (в соответствии с текстом подзаголовка), посвящен изучению элементарных функций как вещественного, так и комплексного переменного, включая учение о бесконечных рядах. В этом отношении Коши следовал установившимся в XVIII в. благодаря Эйлеру традициям: предпослать собственно дифференциальному и интегральному исчислению учение о функциях. Значение такого сочинения в структуре анализа очевидно. Классификация функций, разложение их в степенной ряд, в бесконечные произведения, частные приемы преобразования функций необходимы для успешного применения к ним операций дифференцирования и интегрирования. Последние два вида операций рассматривались как специфические для анализа бесконечно малых. Все предшествующие им преобразования функций, хотя и совершаемые как над конечным, так и над бесконечным числом объектов, получили поэтому специфически-смешанное название: *«Алгебраический анализ»*.

Алгебраический анализ Коши уже во многом напоминает современное изложение основ математического анализа. В нем впервые вводится бесконечно малая величина как переменная, предел которой равен нулю. Непрерывность функции рассматривается как наличие соответствия бесконечно малого приращения функции бесконечно малому приращению аргумента. С большой тщательностью изложен вопрос о сходимости бесконечных рядов, существование которой обусловливается наличием предела сумм конечного числа членов с обязательной строгой аналитической оценкой остаточного члена.

Чтобы распространить понятие сходимости на возможно более широкие классы рядов, Коши связал сходимость знакопеременных рядов со сходимостью рядов, составленных из модулей их членов. Относительно абсолютной сходимости, введенной таким образом, он доказал ряд теорем, например теорему о том, что сумма ряда, являющегося произведением двух абсолютно сходящихся рядов, равна произведению их сумм.

Коши поставил на достаточно прочную основу исследование признаков сходимости рядов. Этому предшествовали лишь немногие открытия: интегральный признак (Маклорен, 1742) и недостаточно строго сформулированный признак Даламбера (1768). В лекциях Коши указан ряд достаточных признаков сходимости.

За этими результатами Коши последовал длинный ряд исследований, имеющих целью выработать наиболее общие и чувствительные признаки сходимости рядов. Полное исследование условий сходимости ряда на комплексной плоскости дал в 1826 г. Абель. Новые достаточные признаки, вошедшие затем в учебные курсы, нашли Й. Раабе (1832), Н. Лобачевский (1834), Э. Куммер (1835), Бонне́ (1842), Бертран (1842), В. П. Ермаков (1870) и др. Определенный итог всем частным попыткам отыскания признаков сходимости подвел Н. В. Бугаев (1863 и 1888), введший теорию сопряженных рядов, позволившую охватить с единых позиций множество признаков.

Теория рядов обогатилась в лекциях Коши установлением области сходимости степенных рядов

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

как для действительных, так и для комплексных значений аргумента. Для последних определен (в 1844 г.) круг сходимости и выведена теорема, известная ныне как теорема Коши — Адамара: ряд сходится (соответственно, расходится), если

$$|z| \lessgtr \rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Разъяснено, что если $\lambda = 0$, то ряд сходится на всей плоскости; если $\lambda = \infty$, то область сходимости исчерпывается единственной точкой; наконец, условие $0 < \lambda < \infty$ означает, что ряд сходится внутри круга радиуса $|z - z_0| < \frac{1}{\lambda}$ и расходится вне его.

К сожалению, у Коши нет еще представления о равномерной сходимости ряда в интервале. Из-за этого в алгебраический анализ попала неправильная теорема: сходящийся ряд непрерывных функций в области сходимости представляет сам непрерывную функцию. Вскоре (1826) эту ошибку, впрочем, отметил и исправил Абель. Понятие равномерной сходимости было введено в 1848 г. Дж. Стоксом и Л. Зейделем.

То же стремление перестроить весь анализ на основе теории пределов выражено во второй книге Коши — «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823). В ней изложено дифференциальное и интегральное исчисление функций действительного переменного. Об особенностях структуры этой книги, вытекающих из поставленной цели, в книге говорится: «Моей главной целью было согласовать строгость, которую я вменял себе в обязанность в изложении моего курса анализа (имеется в виду алгебраический анализ. — *К. Р.*), с простотой, вытекающей из непосредственного рассмотрения бесконечно малых количеств. По этой причине я считал долгом отвергать разложения функций в бесконечные ряды во всех случаях, когда полученные ряды не сходятся, и я был вынужден отнести к интегральному исчислению формулу Тейлора, так как формулу эту можно считать общей лишь тогда, когда содержащийся в ней ряд сведен к конечному числу членов и дополнен определенным интегралом (речь идет об интегральной форме остаточного члена. — *К. Р.*).

Я знаю, что знаменитый автор Аналитической механики (Лагранж. — *К. Р.*) взял формулу, о которой идет речь, в качестве основы своей теории производных функций. Но, несмотря на все почтение, внушаемое таким большим авторитетом, большая часть геометров (так в ту пору называли всех математиков. — *К. Р.*) согласно признает теперь недостоверность результатов, к которым можно прийти, употребляя расходящиеся ряды; мы прибавим, что во многих случаях теорема Тейлора как бы дает разложение функции в сходящийся ряд, хотя сумма этого ряда существенно отличается от предложенной функции. Впрочем, я надеюсь, что читатели моего сочинения убедятся в том, что принципы дифференциального исчисления и его важнейших приложений могут быть легко изложены без помощи рядов» [1].

Далее следуют лекции по дифференциальному исчислению, весьма уже сходные с привычным нам изложением. Впечатление сходности усиливается, когда мы встречаем критерий сходимости последовательностей (критерий Больцано—Коши): члены сходящейся последовательности с достаточно большими индексами должны сколь угодно мало отличаться друг от друга. Здесь еще нет ε, δ-аппарата (для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ для всех $n, m > N$), но существо дела уже выражено. Для дифференциального исчисления Коши характерно также систематическое применение теоремы о среднем значении:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta h), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

эпизодические упоминания о которой были известны ранее и которую впервые применил Лагранж (1804) для вывода ряда с приближенным выражением остаточного члена. Мы не будем излагать здесь эту часть курса лекций Коши более подробно.

В области интегрального исчисления курс лекций Коши отличался коренным образом от курса Эйлера и других предшественников. Его своеобразие прежде всего проявилось в выборе основного понятия. Это было понятие определенного интеграла.

Новым было и появление в начале лекций аналитического доказательства существования определенного интеграла от непрерывной функции. Доказательство это носит все черты позднейших доказательств теорем существования. Ход мыслей здесь таков: задается функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[x_0, X]$. Этот отрезок делится на n частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Составляется сумма

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i),$$

---

[1] O.-L. Cauchy. Résumé des leçons donnés sur le calcul infinitesimal. Oeuvres, ser. 2, vol. IV. Paris, 1829, p. 263.

и относительно нее доказывается, что $S \to A$ при $n \to \infty$ и $\Delta x_i \to 0$. Величина интеграла A предстает как функция от крайних значений отрезка интеграции и функции $f(x)$.

Заметную часть лекций по интегральному исчислению заняли разложения функций в ряды Тейлора и Маклорена. Точной оценке остаточного члена и выводу его различных аналитических форм Коши уделил много места и в других своих исследованиях. В лекциях Коши приведен широко известный и ныне пример функции

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0;$$
$$f(x) = 0, \qquad x = 0,$$

соответствующий ряд для которой в точке $x = 0$ сходится, но не к данной функции. Тем самым он провел отчетливое различие между вопросами о сходимости рядов Тейлора вообще и о сходимости к данной функции.

Указанные лекции Коши (третья часть их посвящена геометрическим приложениям математического анализа) имели очень широкое последействие. Теория пределов через их посредство начала завоевывать положение основы всего анализа. Эта идея постепенно получала распространение.

Усовершенствование Б. Больцано основ теории функций. Более глубокое исследование основ математического анализа требует, как теперь известно, привлечения методов и фактов теории множеств и теории функций действительного переменного. Основы такого исследования были заложены также еще в первой половине XIX в. Главные заслуги в этой области (о чем стало известно позднее) принадлежат Бернарду Больцано (1781—1848), выдающемуся чешскому ученому. С 1805 до 1820 г. он преподавал богословские дисциплины в Пражском университете. За выступления в пользу национальной самостоятельности чешского народа и против владычества австрийской монархии он был отстранен от преподавания. Ему было запрещено поступать на государственную службу, выступать устно и в печати. Без средств к существованию Больцано прожил остаток жизни в деревне у друзей, продолжая любимые с юношеских лет занятия математикой и философией.

Философские и математические исследования Больцано всегда были тесно связаны. Он видел в выработке математического мышления необходимую предпосылку для более, как правило, сложных философских суждений. В работе

Б. Больцано
1781—1848

«К более обоснованному изложению математики» он так сформулировал цели своих математических исследований: «В течение примерно пятнадцати лет эта наука всегда была одним из моих излюбленных занятий; однако, преимущественно лишь в ее спекулятивной части, как ветви философии, и как средства упражнения в правильном мышлении. Сразу же, при первом ознакомлении с ней, что произошло по превосходному учебнику Кестнера, мне стали заметны один-два недостатка, устранением которых я стал заниматься в свои свободные часы, уверяю, не из тщеславия, а из-за внутреннего интереса, который я находил в таких спекуляциях. При более продолжительном размышлении число недостатков, которые я, как мне казалось, обнаружил, еще увеличилось» [1].

Более или менее полная характеристика математического творчества Больцано выходит за пределы поставленных перед настоящей главой задач. Обратим внимание лишь на логический анализ содержания основных понятий и методов доказательств, далеко продвинутую формализацию суждений, которые позволили Больцано в области анализа сделать ряд важных открытий, опередив современную ему науку. Исключительно неблагоприятные условия, в которых жил и работал Больцано, были причиной того, что почти все его работы увидели свет лишь после его смерти. Основные его результаты стали известны лишь в 70-х годах, а признание начали получать с 80-х годов. Рукопись его важнейшего сочинения — «Учения о функциях» — была обнаружена лишь в 1920 г., а опубликована, с примечаниями К. Рыхлика, лишь в 1930 г., т. е. ровно через сто лет со времени ее написания. Об этом обстоятельстве можно лишь пожалеть. Больцано в области обоснования анализа сделал многое раньше Коши и тем более Вейерштрасса. Будь его работы опубликованы, ход событий в этой области был бы, видимо, ускорен.

В самом деле, еще в 1817 г. Больцано сформулировал и доказал теорему, что если множество вещественных чисел ограничено сверху (соответственно, снизу), то оно имеет точную верхнюю (соответственно, нижнюю) грань. Тем самым он опередил Вейерштрасса, сформулировавшего эту теорему после 1860 г. Тогда же, за несколько лет до Коши, Больцано вывел критерий сходимости последовательностей и дал строгое определение непрерывности функций. Он глубоко изучил свойства непрерывных функций и доказал относительно них ряд

[1] Цит. по кн.: Э. Кольман. Бернард Больцано. Изд-во АН СССР, М., 1955, стр. 35.

замечательных теорем и, в частности, следующую: непрерывная функция принимает все промежуточные значения, лежащие между двумя ее различными значениями. Ему же принадлежит введение односторонней непрерывности.

Больцано опроверг общепринятое мнение, сформулированное в 1806 г. Ампером, что непрерывные функции имеют лишь, быть может, изолированные особенности. В геометрическом плане это означает, что всякая непрерывная кривая должна иметь касательные всюду, за исключением, быть может, отдельных точек. Больцано расширил класс непрерывных кривых, применив метод накопления особенностей, и получил на этом пути много своеобразных функций, в том числе функцию, не имеющую производной (соответственно, касательной) ни в одной точке и известную нам теперь как функция Больцано.

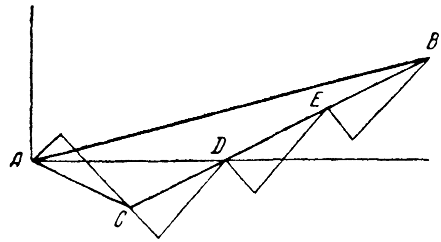

Рис. 10

В применении к построению функции Больцано $B(x)$ метод накопления особенностей состоит в следующем. Строится $B_0(x)$ — отрезок прямой между точками, например A (0, 0) и $B(a, h)$. Затем строится $B_1(x)$ — ломаная $ACDEB$, где

$$C\left(\frac{a}{4}, -\frac{h}{4}\right), \quad D\left(\frac{a}{2}, 0\right), \quad E\left(\frac{3a}{4}, \frac{h}{2}\right).$$

$B_2(x)$ получится повторением предыдущей операции на каждом из указанных четырех отрезков. n-Кратное повторение этой операции дает ломаную $B_n(x)$. Функция Больцано $B(x)$ в точках вида

$$x = \frac{ka}{4^n}$$

($0 \leqslant k \leqslant 4^n$, k — целое, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$) определяется как совпадающая с $B_n(x)$. На множестве $\{x\}$, отличных от $t=\frac{ka}{4^n}$,

$$B(x) = \lim_{t \to x} B(t).$$

Функция Больцано непрерывна, но не имеет конечной производной ни в одной точке. В самом деле, колебание $B_n(x)$ на отрезках

$$\left(\frac{ka}{4^n}, \frac{(k+1)a}{4^n}\right)$$

будет

$$\omega_n\left(\frac{ka}{4^n}, \frac{(k+1)a}{4^n}\right) = \frac{h}{2^n}.$$

Однако колебание $B_n(x)$ для любого отрезка $\frac{a}{4^n}$

$$\omega\left(x, x+\frac{a}{4^n}\right) > \frac{h}{2^n}, \tag{3}$$

так как внутрь этого отрезка попадет хоть один промежуток из числа полученных при делении промежутка $(0, a)$ на 4^{n+1} равных частей. Поэтому всегда можно выбрать такое $\Delta x > 0$, чтобы одновременно

$$\Delta x < \frac{a}{4^n}, \text{ и } |B(x+\Delta x) - B(x)| \geqslant \frac{h}{2^{n+1}}.$$

Действительно, пусть на сегменте $[x, x+\frac{a}{4^n}]$ наибольшее и наименьшее значения $B(x)$ будут: M и m. В соответствии с (3)

$$M - m > \frac{h}{2^n}.$$

Поэтому будет иметь место хотя бы одно из неравенств:

$$M - B(x) > \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2^n}$$

$$B(x) - m > \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2^n}.$$

Пусть, например,

$$M - B(x) > \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2^n}.$$

Тогда на отрезке $\left[x, x+\frac{a}{4^n}\right]$ найдется x' такое, что

$$B(x') = M,$$

и поэтому

$$B(x') - B(x) > \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2^n}$$

и одновременно

$$\Delta x = x' - x < \frac{a}{4^n}.$$

В таком случае

$$\frac{B(x+\Delta x) - B(x)}{\Delta x} \geqslant \frac{h}{a} \cdot 2^{n-1}$$

и $B(x)$ в отрезке $[0, a]$ не имеет конечной производной [1].

Кривая Больцано была найдена во всяком случае до 1830 г. Однако долгое время считалось, что первые примеры непрерывной недифференцируемой функции дали в 1875 г.: а) Вейерштрасс

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

$\left(0 < a < 1,\ b \text{ — целое нечетное число, } ab > 1 + \frac{3}{2}\pi\right)$,

б) Дарбу

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sin[(k+1)!\, \pi x].$$

В «Учении о функциях» Больцано построены и исследованы и другие сложные функции. Он изучил непрерывные функции, имеющие бесконечное множество экстремумов. Таковы, например: ломаная с угловыми точками

$$(0, 0),\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3}{4}, 0\right),\ \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{15}{16}, 0\right), \ldots,$$
$$\left(\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}}, \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}, 0\right), \ldots$$

непрерывная в $[0, 1]$ и имеющая в $x=1$ разрыв; функция

$$f(x) = \sin\log(1-x)$$

на $[0, 1]$ и др.

Исследованию у Больцано подверглись и разрывные функ-

---

[1] См., например, В. Ф. Бржечка. О функции Больцано. «Усп. матем. наук», **IV**, 2(30), 15—21, 1949.

ции. Он построил функцию $\Phi(x)$, которая на $[-1; +1]$ принимает все значения от -1 до $+1$ и имеет разрыв в каждой точке этого сегмента, определив ее следующим образом:

$$\Phi(x) = x \text{ для } x \text{ вида } \frac{2m+1}{2^n},$$

$$\Phi(0) = -1,$$

$$\Phi(-1) = 0,$$

$$\Phi(x) = -x \text{ для всех остальных } x.$$

Другим примером может служить монотонная функция, имеющая бесконечное множество разрывов. Она задана последовательностью отрезков, соединяющих точки:

$$(0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{6}{4}\right),$$

$$\left(\frac{7}{8}, \frac{13}{8}\right), \left(\frac{7}{8}, \frac{14}{8}\right), \left(\frac{15}{16}, \frac{19}{16}\right), \ldots$$

В сочинениях Больцано и в особенности в его «Учении о функциях» содержится большое число результатов, позднее вошедших в состав теории функций действительного переменного. Более того, в сочинении «Парадоксы бесконечного», написанном Больцано в последние годы жизни и увидевшем свет в 1851 г., мы встречаем существенные суждения позднейшей теории множеств. Так, дано обычно приписываемое Дедекинду определение бесконечного множества как такого, которое равномощно своей правильной части. Высказан принцип, что всякое бесконечное множество точек на сегменте имеет по меньшей мере одну предельную точку. В позднейшее время возобновилась (в переводах и с примечаниями К. Рыхлика) публикация материалов из научного наследия Больцано, что дает возможность полнее охарактеризовать его научные достижения.

Построение теории действительного числа и теории множеств. К половине XIX в. была разработана теория пределов, построены элементы современной теории функций и теории множеств. Однако теория пределов получила признание не сразу. Крупнейшие математики Европы не использовали этот метод в своих работах (например, Пуассон), предпочитая лейбницевское исчисление бесконечно малых. Английские математики в большинстве долго не воспринимали идей Коши, равно как и общепринятой теперь символики анализа бесконечно малых, введенной Лейбницем, видя в этом чуть ли не оскорбление памяти великого Ньютона. Не было недостатка и в критиках теории пределов (например, Курно).

При ближайшем рассмотрении этого кажущегося странным обстоятельства оказывается, что большинство критиков теории пределов принадлежало к математикам, чьи работы были посвящены, в основном или в большинстве, приложениям. Содержание критики с течением времени определилось в двух направлениях. Во-первых, было обращено внимание на то, что с понятием предела нельзя было связать никакого алгоритма его нахождения. Многие понятия не могли быть признаны из-за их описательности, отсутствия количественных оценок. Таковы, например: «приближаться неограниченно», «сколь угодно малое», «последнее отношение бесконечно малых приращений» и т. д. Основное для теории пределов понятие устремления означает апелляцию к интуиции движения. В силу этих недостатков применение теории пределов, особенно в задачах практического характера, было в глазах многих современников Коши необычайно и неоправданно затруднительно.

Во-вторых, в теории пределов были обнаружены логические пробелы, устранить которые ее защитникам не удавалось. Примером такого пробела может служить определение вещественного числа. Последнее определялось как предел последовательности рациональных чисел. Например, $\sqrt{2}$ рассматривался как предел последовательности его неполных извлечений: 1; 1,4; 1,41; 1,414 .... Но для того чтобы так определять это число, надо предполагать существование его, т. е. совершать логически порочный круг в суждениях. Неясным оставалось также понятие бесконечной совокупности элементов, к которому приходилось прибегать. Наконец, неразработанность теории функций, которую преодолевал неизвестный в то время Больцано, приводила математиков к ошибкам, вроде упоминаемых выше убеждений, что непрерывности функции достаточно для ее геометрической представимости и существования производной почти всюду или что сходящийся ряд непрерывных функций представляет сам непрерывную функцию.

Таким образом, в течение около 30 лет трудности в обосновании анализа сдвинулись. Они выражались теперь в острой необходимости: а) построения строгой теории действительного числа, б) разъяснения и включения в математику понятия бесконечного множества, в) выявления полного объема класса непрерывных функций и включения в общую классификацию возможно более широкого класса разрывных функций. От преодоления этих трудностей зависели дальнейшие успехи математического анализа.

И вот в 1872 г., в один и тот же год, появился ряд примечательных работ. В журнале «Mathematische Annalen» была опубликована первая из работ Г. Кантора об основаниях арифметики. Вышло в свет сочинение Р. Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа». Появились работы на эту тему Е. Гейне и Ш. Мерэ [1]. Все эти сочинения преследовали единую цель: дать строгую теорию действительного числа. Тот же вопрос в течение ряда лет разрабатывал Вейерштрасс в знаменитых лекциях об аналитических функциях.

В указанных многочисленных исследованиях появились разновидности теории вещественного числа, удовлетворяющие высоким требованиям строгости. Дедекинд определял действительные числа как сечения во множестве рациональных чисел, дав совокупности всех действительных чисел (линейному континууму) геометрическую интерпретацию в виде прямой линии. Свойство непрерывности прямой, по Дедекинду, состоит в том, что при сечениях будет находиться либо самая правая точка одного класса, либо самая левая точка другого. Совокупность всех рациональных чисел свойством непрерывности не обладает. Тогда вводится иррациональное число (точка), как такое сечение множества рациональных чисел, в классах которого нет ни самого правого, ни самого левого числа (точки). Так у Дедекинда была введена совокупность всех действительных чисел, уже обладающая свойством непрерывности.

Канторово определение действительного числа идентифицирует последнее со сходящейся последовательностью рациональных чисел [2]. Это определение, как и предыдущее, опирается на абстракцию актуальной бесконечности и основывается на анализе понятия непрерывности. Подход к определению непрерывности был различен. Дедекиндово определение базируется на упорядоченности множества рациональных чисел. Определение же Кантора включает рассмотрения разностей, расстояний между элементами, что соответствует природе понятия сходимости. Однако оба подхода к определению

[1] См. H. C. R. M e r a y. Ch. Nouveau précis d'ánalyse infinitesimal. Paris, 1872, éd Savy.

E. H e i n e. Die Elemente der Functionlehre, Brorchardt J., LXXIV, 172—188 («Journal für die reine und angewandte Math.», 1872).

[2] См. И. В. А р н о л ь д. Теоретическая арифметика. Учпедгиз, М., 1938, стр. 286.

непрерывности эквивалентны, поскольку вещественные числа строятся на основе системы рациональных чисел.

Воззрения берлинского профессора К. Вейерштрасса на природу действительного числа составляли часть его общего плана построения математического анализа, понимаемого в широком смысле, на возможно более строгих основах. Вейерштрасс ввел в математический анализ много важнейших результатов: систематическое использование понятий верхней и нижней грани числовых множеств, учение о предельных точках, обоснование свойства функции, непрерывной на отрезке, достигать своей верхней и нижней грани, построение функции, не имеющей производной ни в одной точке, доказательство возможности разложения непрерывной на отрезке функции в равномерно сходящийся ряд многочленов и др. В этой стройной и строгой системе математического анализа примерно к 1880 г. был выработан современный вид определений и аппарат доказательств, опирающийся на условно-дедуктивные суждения («пусть задано $\varepsilon > 0$, тогда можно выбрать такое $\delta > 0$, что ...») и соответствующий символизм. Теория действительного числа служит Вейерштрассу (как и другим ученым) основой для всего здания математического анализа.

Вейерштрасс исходит при этом из множества положительных рациональных чисел $\{a_\nu\}$, которое он называет агрегатом. Агрегат обладает тем свойством, что сколько бы и какие бы элементы агрегата ни суммировались (речь всегда идет о конечном, хотя и сколь угодно большом числе элементов), их сумма не превышает заданных границ. Примером агрегата может служить любая десятичная дробь. Пусть заданы два агрегата $\{a_\nu\}$ и $\{a'_\nu\}$, идентифицируемые с числами b и b'. Берем адекватные части единицы $\frac{1}{n}$ ($n = 1$, 2, 3, 4, ... или $n=1$, 10, 100, ... все равно!). Может осуществиться один из трех случаев: а) перебирая элементы агрегатов, мы найдем, что $\frac{1}{n}$ повторяется одинаково часто; б) и в) для некоторого n величина $\frac{1}{n}$ чаще повторяется в первом (соответственно, втором) агрегате. Эти три случая соответственно означают $b = b'$, $b > b'$, $b < b'$. Объединение агрегатов дает сумму соответствующих чисел. Составление агрегата $\{a_\nu \cdot a'_\mu\}$, элементами которого являются всевозможные произведения элементов вида $\{a_\nu \cdot a'_\mu\}$, служит для определения умножения.

Все виды теории действительного числа опирались на рассмотрение множеств рациональных чисел. Этим самым трудности, связанные с обоснованием анализа, вновь сдвинулись. Они переместились в область логического анализа ряда натуральных чисел и вообще множеств с бесконечным числом элементов. В самом же анализе к концу XIX в. установился в основном современный стандарт логической строгости в определениях и доказательствах.

Создание теории бесконечных множеств и трансфинитных чисел принадлежит Г. Кантору, профессору университета в Галле. Серия его работ на эту тему последовала вслед за работами по теории действительного числа. Он доказал (1874) неэквивалентность множеств рациональных и действительных чисел. Через несколько лет (1878) в его трудах было введено общее понятие мощности множества, разработаны основы отображения и сравнения множеств и доказана равномощность множества точек линейного континуума и точек n-мерного многообразия. Систематическая разработка теории множеств была завершена Кантором в последующие пять лет (1879—1884). При этом он ввел понятие предельной точки, производного множества, пример совершенного множества, получившего его имя (1883), высказал континуум — гипотезу и т. п.

Развитие теории функций Вейерштрасса, теории множеств Кантора протекало в последние годы XIX столетия в обстановке острой критики и борьбы. Особенно острыми были выступления берлинского профессора Л. Кронекера, ученика Куммера. В вопросах оснований математики Кронекер, основные работы которого относились к алгебре и теории групп, был приверженцем арифметизации математики. Это означало стремление свести все трудности, связанные с обоснованием любой области математики, к натуральному ряду. Эта позиция Кронекера нашла свое яркое выражение в утверждении, которое он неоднократно повторял, что целые числа создал господь бог, а все остальное есть дело рук человеческих.

Разумеется, апелляция к верховному существу не означает ничего иного, как проявление идеализма, метафизической ограниченности и других несовершенств в философских воззрениях Кронекера. Кстати заметим, что эта узость и ограниченность воззрений (а Кронекер с большой страстностью отстаивал их) наносила большой ущерб научному творчеству самого Кронекера. Пуанкаре правильно указывал на это обстоятельство, шутливо добавляя, что Кронекер добился выда-

К. Вейерштрасс
1815—1897

ющихся результатов в математике только потому, что он нередко забывал о своих философских убеждениях.

Построенная Кантором общая теория мощностей множеств, отображений, операций над множествами, свойств упорядоченных множеств составила впоследствии основное содержание абстрактной теории множеств. Понятие предельной точки и связанное с ним понятие замкнутости множества после введения в 1902 г. А. Лебегом понятия меры множеств и исследований Э. Бореля привели к созданию метрической теории множеств. Последняя послужила основой общей теории интегрирования и тригонометрических рядов. Позднее она привела к построению в работах А. Лебега, К. Каратеодори, Ф. Хаусдорфа и др. общей теории меры.

М. Фреше (1906) и Ф. Хаусдорф (1914), исследуя введенное Кантором понятие связности и другие примыкающие к нему, развили топологическую теорию множеств как теорию множеств, расположенных в общих метрических и топологических пространствах. Наконец, дискриптивная теория точечных множеств и связанная с ней весьма общая классификация разрывных функций (классификация Бэра) ведут свое начало примерно с 1900 г., от работ Р. Бэра и А. Лебега.

Теория множеств оказала огромное воздействие на развитие математики. Она явилась основой современной теории функций действительного переменного, топологии, алгебры и теории групп, функционального анализа и др. Методы теории множеств широко используются в большинстве математических наук современности. Это, однако, не означает сводимости всей математики к теории множеств. В самой этой теории еще при жизни Кантора обнаружились парадоксы, как, например, парадокс относительно существования множества всех множеств и др.

Вопросы обоснования теории множеств, исследования пределов ее применимости влились в XX в. в специальную науку — математическую логику, составляющую важную часть оснований современной математики. Эта часть математики (основания), включающая в себя совокупность философских, исторических и логических воззрений относительно содержания, формы и связей (в том числе внутренних взаимосвязей) математики, развивается в XX в. весьма бурно. Ее выводы получают практические приложения, отражая рост научной и технической практики человечества.