ГЛАВА IX

РАЗВИТИЕ АППАРАТА И ПРИЛОЖЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В XIX в.

Дифференциальные уравнения — основное оперативное средство анализа. Аппарат математического анализа к XIX в. представлял собой быстро разрастающуюся совокупность приемов и методов решения весьма уже многочисленных задач. Все эти методы можно еще было разделить на три большие группы, объединяемые в дифференциальном исчислении, интегральном исчислении и в быстро обособляющейся от последнего теории дифференциальных уравнений. Контуры формирующейся теории функций комплексного переменного, теории специальных функций и т. п. вырисовывались еще слабо.

Из многообразных приложений математического анализа мы выделим те, которые связаны с решением дифференциальных уравнений. Тем самым мы оставим в стороне сравнительно элементарные приложения, сводящиеся к дифференцированию или интегрированию функций, требуемому условиями задачи. Эти операции уже вошли в широкую, сравнительно доступную область практики. Однако возросшая сложность приложений нуждалась в более общих и мощных средствах. Таким средством явилась совокупность методов решения дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными. Решение дифференциальных уравнений являлось главным оперативным средством анализа, а проблемы, связанные с этим решением — основными научно-практическими проблемами.

В выделенной нами области математического анализа ярко проявляется определяющее влияние задач математического естествознания, в первую очередь механики и математической физики, и тесное взаимодействие теоретических и практических исследований. Вокруг решения проблем математической физики группируются сравнительно большие коллективы ученых, образуя научные школы. Крупнейшее из таких объединений сформировалось в Париже в Политехнической школе. Задачами математической физики здесь успешно занимались Пуассон, Фурье, Коши и др.

В Париже получили научную подготовку русские математики В. Я. Буняковский и М. В. Остроградский. Возвратившись в Россию, они явились зачинателями Петербургской математической школы, одним из главных направлений в которой была разработка методов решения задач математической физики.

Несколько значительных центров научного исследования в области прикладных методов анализа сформировалось в государствах Германского союза. В Берлине таким центром сделалась Берлинская политехническая школа, ведущая роль в которой принадлежала Л. Дирихле. С 20-х годов заметное место начал занимать Кенигсбергский университет, в связи с работами Ф. Неймана и его учеников по математической физике. Наконец, в Геттингене над созданием математического аппарата электромагнитных явлений много трудился К. Ф. Гаусс в сотрудничестве с Вебером.

Большая группа исследователей математических методов физики и механики имелась в Англии: Грин, Стокс, Томсон, Гамильтон, Максвелл и др. Усилиями столь большого количества ученых было достигнуто быстрое и значительное расширение области приложений математического анализа. Рассмотрим некоторые стороны этого процесса.

Создание аналитического аппарата для исследования электромагнитных явлений. Одной из первых успешно разрешенных задач была задача построения математической теории электромагнитных явлений. К XIX в. учение об электричестве и магнетизме выделилось в физике в самостоятельную область. В 1820 г. стало известным открытие Эрстедтом действия тока на магнитную стрелку, установившее общность разнородных, казалось бы, явлений. К тому же времени Био, Савар, Лаплас, Араго, Ампер, Кулон и др. ввели необходимые основные понятия: заряда, количества электричества, плотности электричества, законы взаимодействия неподвижных зарядов и т. д. Задачи электромагнетизма повлекли в математическом плане множество работ по исследованию притяжений точек по закону Ньютона и электростатических полей.

Методы решения задач небесной механики, в частности задач о притяжении небесных тел по закону Ньютона, получили новую область применения. Переход в исследованиях от точечных центров притяжения к непрерывному распределению материи привел от рассмотрения потенциалов дискретного точечного поля к силовым полям, образованным телами или непрерывно распределенной материей. Было введено понятие потенциала поля и определено его выражение для простейшего поля, образованного заряженной точкой $A(a, b, c)$ массы m:

$$V_p = V(x, y, z) = \frac{\gamma m}{r}$$

(где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, γ — постоянная притяжения, $p(x, y, z)$ — притягиваемая точка). Вскоре же были найдены выражения потенциала для системы притягивающих точек, а затем для поля с непрерывным распределением притягиваюших масс в объеме ω:

$$V_p(x, y, z) = \gamma \iiint\limits_{(\omega)} \frac{\rho(a, b, c)\, d\omega}{r}$$

($\rho(a, b, c)$ — плотность распределения потенциала).

Еще в 1787 г. Лаплас показал, что в пространстве вне тела потенциальная функция удовлетворяет уравнению

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Впрочем, это уравнение встречалось ещё у Эйлера, а понятие о силовой функции, дифференцирование которой по направлению давало бы ньютоновские силы притяжения, ввел в 1773 г. Лагранж, оформив тем самым идею силовой функции, которую высказывали еще Д. Бернулли, Эйлер и Клеро.

Математическая теория электрического потенциала сформировалась сравнительно быстро. Ряд задач о распределении электричества на поверхности проводников решил Пуассон, вообще основательно разработавший многие отделы современной ему математической физики: капиллярность, изгибание пластинок, электростатическую магнетостатику, теплопроводность. Около 1813 г. он распространил уравнение Лапласа на пространство, заключенное внутри притягивающего тела, и вывел широко известное теперь уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho.$$

Пуассон решил много задач магнетостатики. При этом он фактически опирался на понятие потенциала. Однако ввел это важное понятие не он. Общая постановка теории потенциала появилась в трудах двух ученых: Грина и Гаусса.

Грин изложил свою теорию в сочинении «Исследование по математической теории электричества и магнетизма» (1828). Здесь он исследовал центральную проблему электростатики того времени: задачу о распределении электричества на поверхности проводника, которое индуцируется воздействием внешних электрических сил. В основе рассуждений Грина лежало соображение, что электрические и магнитные силы могут быть определены через функцию координат, такую, что составляющие этих сил по осям суть ее частные соответствующие производные, взятые с обратным знаком. Потенциальная (как ее здесь впервые назвал Грин) функция определяется распределением зарядов. Грин вывел далее интегральную теорему, известную ныне как формула Грина, показал, что значение потенциала внутри или вне любой поверхности выражается через значение потенциальной функции и ее нормальной производной на этой поверхности.

Выражение поверхностной плотности ρ по Грину будет

$$\rho=-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\overline{v}}{\partial\omega}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial\omega'}\right],$$

где в скобках помещены нормальные производные потенциала на противоположных сторонах поверхности. Если речь идет о проводнике, поле внутри которого, а следовательно и нормальная производная, отсутствует, то

$$\rho=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\omega}$$

(теперь пишут: $E=4\pi\rho$, где E — напряженность поля). Наконец, Грин ввел так называемую функцию Грина, интерпретирующуюся как потенциал внутри замкнутой заземленной проводящей поверхности, если туда помещен единичный заряд.

В несколько более общей форме и, по-видимому, независимо от Грина построил общую теорию потенциала Гаусс.

Он сделал это в работе «Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания ... действующих обратно пропорционально квадрату расстояния» (1840). Функцию

$$v = \sum \frac{m}{r},$$

где m могут представлять как обычные массы, так и электрические или магнитные заряды, Гаусс назвал потенциалом. Он систематически исследовал свойства потенциальной функции и ее применение к физическим явлениям. Небезынтересно отметить появление в этой работе теоремы

$$\iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint (X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy).$$

Эту теорему М. В. Остроградский доказал еще в 1828 г. и истолковал ее как формулу гидродинамического баланса, устанавливающую равносильность учета протекающей жидкости в единицу времени: а) исходя из учета источников внутри объема; б) исходя из скоростей протекания через оболочку.

Теперь, через 11 лет после Остроградского, Гаусс использовал эту формулу для того, чтобы связать величину потока напряженности сил заданного потенциального поля с общей массой или зарядом, помещенным внутри поверхности. В наше время этой формуле присвоено название Гаусса—Остроградского (что, очевидным образом, несправедливо).

В истории физики [1] отмечается, что понятию потенциала физики долго не придавали какого-либо принципиального значения, рассматривая потенциал, или потенциальную функцию, лишь как удобное математическое понятие. Его физический смысл был раскрыт позже, после установления понятий: работы, энергии и закона сохранения энергии.

Иным было положение этого важного понятия в математике. Его введение облегчило расширение области приложений математического анализа. Помимо оптики и колебаний теперь возникала математическая теория электромагнитных явлений. Постановка задачи о потенциале побуждала к рас-

[1] См. Б. И. Спасский. История физики, ч. 1. Изд-во МГУ, 1956, стр. 352—353.

ширению понятия интеграла, к распространению интегрирования на сложные объекты. В анализе была начата разработка гармонических функций как решений дифференциального уравнения Лапласа: $\Delta v = 0$.

Оказалось, что гармонические функции могут служить для описания многих физических и механических проблем, отличительной особенностью которых является исследование разнородных состояний, зависящих от положения элементов, а не от времени. Так, например, гармоническими функциями оказались помимо потенциалов в полях притяжения и в электрических полях потенциал скоростей установившегося безвихревого движения несжимаемой жидкости, температура тел при установившемся распределении тепла, величина прогиба мембраны, натянутой на произвольный неплоский контур и др. Математический аппарат исследования гармонических функций, возникший при решении одной задачи или одного класса задач, получал постепенно новые приложения.

Гармонические функции получили применение в широком классе краевых задач. Такова задача Дирихле об отыскании значений гармонической функции в области по ее значениям на границе (например, определение температуры внутри тела по температуре на его поверхности, определение формы мембраны по виду контура). К этого рода задачам относится также задача Неймана, в которой гармоническая функция должна быть разыскана по величине нормальной производной на границе области (нахождение температуры внутри тела по заданному на поверхности температурному градиенту, определение потенциала движения обтекающей твердое тело несжимаемой жидкости из условия, что нормальные составляющие скоростей частиц, прилегающих к поверхности тела, совпадают с заданными нормальными составляющими скоростей точек поверхности тела).

Для решения краевых задач теории гармонических функций были разработаны методы, имеющие как практическое, так и большое теоретическое значение. Например, для решения задачи Дирихле Г. А. Шварц и К. Нейман изобрели около 1870 г. альтернирующий метод, Пуанкаре — метод выметаний (около 1880 г.), Фредгольм — метод фундаментальных решений, связанный с интегральными уравнениями, Перрон — метод верхних и нижних функций. Следует еще упомянуть метод сеток как основной метод при приближенном решении краевых задач. Эти методы давали возможность освободиться от того или другого ограничения, которое приходилось налагать на границу области. Но при сколько-нибудь общей постановке краевой задачи возникали проблемы условий существования решений и их устойчивости.

Большое значение в истории теории потенциала имеют исследования русского академика А. М. Ляпунова, выполненные в конце XIX — начале XX в.[1]. В них изучены: зависимость свойств потенциалов от равномерно распределенных по поверхности зарядов и диполей, потенциал двойного слоя в случае диполей, поведение производных решения задачи Дирихле при приближении к поверхности, на которой задано граничное условие. Решение задачи Дирихле Ляпунов выразил в виде интеграла по поверхности от произведения функции, входящей в граничное условие, на нормальную производную функции Грина.

Как и его предшественники, Ляпунов был вынужден использовать ряд ограничительных требований. Среди этих требований основным является выполнимость принципа Неймана. Ограничение выделяет также класс поверхностей, относительно которых рассмотрены указанные выше вопросы; за этими поверхностями сохранилось название поверхностей Ляпунова.

Проблемы математической физики, выросшие из первых работ по теории потенциала, приобрели, как мы видим, к концу XIX в. большую общность. Решение столь общих теоретических проблем, а затем бурное развитие методов численного решения краевых задач (ставшее возможным в связи с появлением вычислительных электронных устройств), целиком относятся к следующему, XX в. Равным образом к этому более позднему времени относится эффективная разработка важной и трудной обратной задачи теории потенциала: по распределению значений потенциала в силовом поле определить форму и плотность притягивающих масс — задача, актуальность которой (например, для электротехники и геофизики) очевидна.

Математическая теория теплопроводности. Наряду с приложениями математического анализа к электромагнитным явлениям получала развитие другая область приложений этой науки. Речь идет о создании математической теории теплопроводности, позднее развившейся в термодинамику — общую науку о закономерностях теплового движения. Побудительной причиной этого процесса было изобретение паровых машин, сделавшихся вскоре энергетической

[1] См. А. М. Ляпунов. Работы по теории потенциала. ГТТИ, М., 1949.

основой машинного производства. Теоретически исследовать работу паровых машин, найти способы повышения коэффициента их полезного действия — такова была одна из главных задач науки.

Требования, предъявляемые в связи с этим к математике, нашли свое выражение в условиях конкурса, объявленного в 1811 г. Парижской академией наук: дать математическую теорию законов распределения тепла и сравнить результаты этой теории с данными опытов. Победителем конкурса оказался парижский академик (с 1817 г.) Ж.-Б. Фурье (1768—1830). Подобно многим ученым — его современникам, Фурье был выходцем из небогатой семьи портного, окончил военную школу, преподавал в ней. Вскоре после организации Политехнической школы он стал одним из профессоров в ней (1796—1798). Однако в 1798 г. он был включен в число участников экспедиции Наполеона в Египет, а затем занялся организационно-административной деятельностью в качестве префекта департамента Изеры (главный город Гренобль). Лишь в 1817 г. Фурье смог переехать в Париж и целиком посвятить себя научной деятельности.

Основные научные заслуги Фурье связаны с решением задачи распределения тепла. Еще в 1807 г. он представил Академии мемуар, посвященный теории распространения тепла в твердом теле. В 1811 г. последовал второй мемуар на эту тему. Через 11 лет, в 1822 г., Фурье опубликовал «Аналитическую теорию тепла», оказавшую огромное влияние на развитие математики.

Фурье разделял убеждение во всеобщей значимости и всемогуществе анализа бесконечно малых. В его представлении анализ столь же обширен, как сама природа; он отражает ее главные законы, выделяясь ясностью и определенностью, а главное — возможностью доведения до численных приложений. Анализ физического явления по существу заканчивался, как только удавалось выразить его основные черты дифференциальным уравнением. Что же касается принципов построения математической теории, то, по указанию Фурье, они, подобно принципам механики, выводятся из небольшого числа фактов, о причине которых математика не спрашивает, рассматривая их как результаты наблюдений, подтверждаемых данными опыта.

Распространение тепла, как и света, Фурье представлял в виде потока элементарных частиц, свободно проникающих через среду. Элементарное количество тепла dQ, протекающее через пластинку Sdx за время dt с температурным перепадом dv удовлетворяет эмпирически подобранному соотношению:

$$dQ = -kS\frac{dv}{dx}dt$$

(k — коэффициент теплопроводности, зависящий от материала пластинки).

Исходя из этого выражения плотности теплового потока, подсчитывается баланс тепла на участке за элемент времени (в основном, это делается так же, как и в наше время в учебниках по уравнениям математической физики)[1] и приводится к уравнению

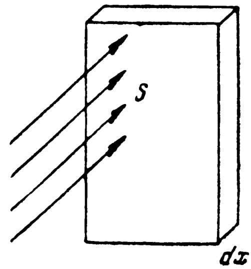

Рис. 11

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c^2\Delta v,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Это уравнение Фурье интегрирует при заданных различных краевых условиях. Задается либо распределение температуры v на границе, либо тепловой поток $\frac{dv}{dn}$, либо их отношение: $\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dn}$. Для решения уравнения теплопроводности при этих граничных условиях Фурье разработал метод разделения переменных, известный теперь под названием метода Фурье. Ему удалось решить задачи распространения тепла для частных случаев шара, кольца, куба, цилиндра. Характерной чертой метода Фурье является, как известно, разложение функций по найденным собственным функциям. Фурье систематически применял разложение функций в тригонометрические ряды вида

$$f(x) \sim \sum_{0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Хотя ряды такого вида были известны и ранее, но после появления «Аналитической теории тепла» они получили название рядов Фурье, сохранив это имя до сих пор. Фурье

---

[1] См. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский. Уравнение математической физики. ГТТИ, М., 1951, стр. 172 и далее.

применяет тригонометрические ряды не только при n целом, но и в более сложных случаях, когда n определяется трансцендентным соотношением: $\operatorname{tg} n\pi = an$ ($a = \text{const} > 0$). В работах Фурье встречаются даже разложения по бесселевым функциям.

Аппарат тригонометрических рядов дал возможность Фурье выразить с его помощью функции весьма общей природы. Фурье практически мог разложить в ряд любую из функций, которые ему могли в то время предложить. Поэтому он счел себя вправе утверждать, что с помощью указанного аппарата можно дать выражение «абсолютно произвольных» функций, понимая под этим функции, состоящие из произвольных частей известных анализу функций. Строгого доказательства он дать не смог, разумеется, равно как и устранить ряд нестрогостей. Метод Фурье был усовершенствован Пуассоном, Дирихле и особенно Остроградским. Последний в ряде мемуаров 1828—1836 гг. сформулировал этот метод в общем виде, — достаточно общем, чтобы решать задачу для любого твердого тела, ограниченного поверхностью без особенностей. В этих мемуарах им была впервые выведена (1828) упомянутая выше формула Остроградского — Гаусса, дано ее истолкование и обобщение (1834) на n-мерную область

$$\int\limits_{v_n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\right)dv_n=\int\limits_{s}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\,\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2}}\,ds.$$

Он же решил задачу о распространении тепла в жидкости и высказал в 1831 г., задолго до Римана, принцип локализации: сходимость ряда Фурье абсолютно интегрируемой функции в точке зависит лишь от значений ее в сколь угодно малой окрестности этой точки. Впрочем, внимательное исследование показывает, что принцип локализации рядов Фурье в не сформулированном явно виде употребляется в ряде работ современников М. В. Остроградского. Этот принцип можно обнаружить в сочинениях самого Фурье, а также у Дирихле (1829) и Лобачевского (1834).

Отнесение в историко-математических работах формулировки и доказательства принципа Фурье к числу заслуг Римана основано на работе последнего «О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда».

М. В. Остроградский
1801—1861

Она была представлена Риманом в 1853 г. Геттингенскому университету, но стала известной в 1867 г., после ее опубликования. Работа содержит интересный очерк истории вопроса, и мы поэтому с особым основанием отсылаем к ней читателя [1].

Математические исследования теплопроводности предварили создание более общей науки о теплоте—термодинамике, являясь одним из ее первых этапов. В дальнейшем для ее формирования потребовалось соединение математических методов, ведущих свое начало от Фурье, с соображениями С. Карно об идеальном цикле (1824) и с законом сохранения энергии, открытым в 40-х годах XIX в. Р. Майером, Г. Гельмгольцем и Дж. Джоулем. Это соединение произошло в середине столетия, когда Р. Клаузиус (1850) и У. Томсон-Кельвин (1851) дали формулировку второго начала термодинамики и ввели понятие энтропии. Дальнейшее усовершенствование математического аппарата термодинамики связано с выходом за пределы математического анализа и введением теоретико-вероятностных суждений в кинетическую теорию газов Дж. Максвелла (1860) и статистических представлений в теорию тепловых процессов Л. Больцмана (1871).

В результате исследований ряда ученых швейцарский физик Фик к 1885 г. смог развить количественную теорию диффузии. При этом выяснилось, что его первый закон о количестве диффундирующего вещества аналогичен закономерности, обнаруженной Фурье для теплоты. Именно, масса вещества dm, диффундирующего за время dt через площадку S (см. рис. 11 на стр. 200), перпендикулярную оси ox, выражается формулой

$$dm = -D \cdot S \cdot \frac{dc}{dx} dt,$$

где $\frac{dc}{dx}$ — градиент концентрации, а D — коэффициент диффузии, зависящий от природы частиц и состояния растворителя и диффундирующего вещества. Если коэффициент диффузии постоянен, получается второй закон Фика

$$\frac{dc}{dt} = D \frac{d^2c}{dx^2},$$

т. е. уравнение, эквивалентное уравнению теплопроводности.

В плане математического анализа «Аналитическая теория

---

[1] См. Б. Риман. Соч. ГТТИ, М., 1948, стр. 225—261.

тепла» послужила, после работ Эйлера и его современников, началом новой разработки теории тригонометрических рядов. Попытка Фурье доказать, что любую функцию можно разложить в тригонометрический ряд, повела к появлению исследований Дирихле, Лобачевского, Римана и др. относительно проблемы представимости функций тригонометрическими рядами. В этих исследованиях сложилась одна из предпосылок создания к концу XIX в. канторовой теории множеств и, более широко, теории функций действительного переменного.

О математическом аппарате механики. Мы привели примеры применений математического анализа в области электрических и магнитных явлений, а также теории теплоты. Этими примерами проблема, разумеется, не исчерпывается. Аналитические методы проникали во многие области естествознания, приобретая в них значение решающих оперативных средств. Едва ли не в первую очередь они проникли в механику, определяя ее содержание. Аналитическая механика приобретала свой классический облик именно как учение о дифференциальных уравнениях, выражающих свойства траекторий любых механических систем. Исследование свойств этих уравнений и их интерпретация для частных случаев приобрели значение главной задачи аналитической механики. Решающую же роль в построении системы этой науки стали играть общие положения, или, как их принято называть, принципы, или законы, механики.

Пусть задана система, положение которой для каждого заданного момента времени t определено значениями n независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_n$, т. е. система с n степенями свободы. Для описания ее движения вводится два понятия: а) живая сила, или кинетическая энергия, T; б) силовая функция, или потенциальная энергия, U. Понятия кинетической и потенциальной энергии противопоставляются друг другу, поэтому чаще всего рассматривается функция Лагранжа (ранее известная под именем кинетического потенциала, имевшего не столь общий смысл):

$$L = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Уравнения движения механической системы суть дифференциальные уравнения Лагранжа (введенные им в конце XVIII в.):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В качестве интеграла уравнения получается закон сохранения энергии, сформулированный в середине XIX в.

$$T + U = \text{const}.$$

В случае возмущенных движений вследствие применения внешних сил P справа добавляется соответствующий интеграл:

$$T + U = \text{const} + \int P\,dt.$$

Решение и исследование дифференциальных уравнений Лагранжа было одним из основных направлений аналитической механики XIX в.

Другой подход к формулированию основных принципов механики состоял в том, что исходили не из дифференциальных уравнений, но из некоторых интегралов, относительно которых решалась вариационная задача отыскания минимума. На этом пути получаются вариационные принципы механики; основным аппаратом при этом является аппарат вариационного исчисления. Первым вариационным принципом был принцип наименьшего действия. Его высказал впервые в 1744 г. Мопертюи. Математически строгая формулировка принципа принадлежала Эйлеру, последующие обобщения — Лагранжу, Якоби и Жуковскому. Позднее появились и другие вариационные принципы, например принцип Гамильтона—Остроградского, или, иначе, принцип стационарного действия [1].

Развитие общих методов интегрирования дифференциальных уравнений динамики, получившее начало в середине XIX в., составляет отдельную область приложений математического анализа. В этой области рассматривается сравнительно неширокий класс дифференциальных уравнений, который, однако, подвергается по возможности глубокому исследованию. Математические результаты здесь особенно тесно сплетены с прикладными интерпретациями их, образуя теоретическую основу всех механических дисциплин.

В этой обширной области приложений мы сможем упомянуть лишь о некоторых достижениях прикладной математики [2]. Так, например, задача приведения дифференциальных уравнений механики к канонической системе уравнений первого

---

[1] Богатый материал по истории вариационных принципов содержится в сб.: «Вариационные принципы механики». Физматгиз, М., 1959.

[2] В XIX в. было принято делить математику на чистую и прикладную.

порядка в случае стационарных связей была существенно продвинута уже в начале века (1809) Пуассоном и вскоре (1834) решена Гамильтоном. Остроградский обобщил эти уравнения на случай нестационарных связей. Он же свел интегрирование канонической системы к интегрированию одного нелинейного уравнения с частными производными. То же проделал и Гамильтон для частного случая стационарных связей, использовав оптико-механическую аналогию.

По установившейся традиции, математический аппарат механики, связанный с рассмотрением основных принципов этой науки, целиком включается в последнюю. Присоединимся к этому и мы, хотя в этой области водораздел между математикой и механикой провести едва ли возможно. Отметим лишь, что методы математического анализа были и остаются ведущими в решении крупнейших проблем механики: движения тяжелого твердого тела, теории устойчивости равновесия и движения, колебания материальных систем и т. п.

Усовершенствование оперативных средств теории дифференциальных уравнений. Приложения методов математического анализа образовывали важные части смежных научных дисциплин, раскрывая перед ними и перед всем математическим естествознанием новые перспективы развития и изменяя их состав и структуру. Особенно это было заметно в развитии математических методов механики и физики. В свою очередь процесс широкого развертывания прикладных частей оказывал влияние на структуру самого математического анализа.

Что касается классической основы математического анализа, т. е. дифференциального и интегрального исчисления и элементарной теории функций, то, как было показано в предыдущей главе, она подверглась коренной перестройке. В ней были строго сформулированы в терминах арифметики основные понятия: бесконечно малой, непрерывности, предела, дифференциала и др. Понятие функции приобрело современный, весьма общий, характер. Теоремы получили уточненные формулировки с обязательным указанием ограничительных условий: уточнение области значений аргумента, вида функций и т. п., при соблюдении которых они являются справедливыми. Оперативные возможности этой части анализа в результате перестройки значительно расширились, а выводы приобрели бо̀льшую степень достоверности.

В теории дифференциальных уравнений усиление их прикладной роли оказалось также связанным с постановкой более широких проблем и выработкой более общих понятий. Так, уже в первой половине XIX в. в теории обыкновенных дифференциальных уравнений практически прекратились попытки отыскания конкретных приемов интегрирования в квадратурах. Выяснилось, что отыскание таких приемов — явление редкое, а возможности — незначительные. Были добавлены лишь немногие факты, в частности относительно уравнения Якоби (1842):

$$(Ax + By + C)\,dx + (A_1x + B_1y + C_1)\,dy + (A_2x + B_2y + C_2)\times$$
$$\times\,(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

Среди многочисленных исследований в этой области заметное место занимают те, где изучаются возможности получения решения уравнения, если отправляться от известных в некотором числе его частных интегралов. Например, в 1878 г. Дарбу доказал, что уравнение

$$L\,dx + M\,dy + N\,(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

где L, M, N — целые многочлены, высшая степень которых m, может быть решено без применения квадратур, если известно не менее $\dfrac{m(m+1)}{2} + 2$ его частных алгебраических интегралов. Значительный вклад в разработку этого направления внесли, в частности, математики России: Ф. Г. Миндинг, А. Н. Коркин, В. П. Ермаков и др.

Видное место заняли также проблемы вывода условий интегрируемости и выделения классов уравнений, интегрируемых в квадратурах. Укажем в качестве примера вывод Лиувиллем условия интегрируемости специального уравнения Риккати. Характерным в этом плане являются и выведенные Чебышевым (1853) условия интегрируемости биномиального дифференциала.

Постановка и решение более общих проблем приводят, как правило, к расширению круга понятий. Примером может служить теория линейных дифференциальных уравнений. Частные виды этих уравнений с переменными коэффициентами: уравнение Бесселя (известное, впрочем, еще Даламберу и Эйлеру), гипергеометрическое уравнение

$$x(1 - x)\,y'' + [c - (a + b + 1)\,x]\,y' - abx = 0$$

(служившее, в частности, предметом исследований Эйлера в 1778 г. и Гаусса в 1812 г.), уравнения Лежандра, Ламе и др.— приводили к возникновению теории специальных функций: цилиндрических, шаровых и т. п. Работы Штурма и Лиувилля по решению уравнения

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + \lambda y(x) = 0$$

при заданных значениях некоторой линейной функции от y и y' в двух точках оси x положили начало исследованиям по теории краевой задачи, названной по имени ее исследователей. Оказалось, что решение этой задачи приводит к необходимости развить теорию интегральных уравнений и теорию разложения функции по фундаментальным функциям.

Дифференциальные уравнения с частными производными в своем развитии всегда сохраняли самый тесный контакт с задачами физики и техники. Как было показано выше, наибольшее прикладное значение имели уравнения второго порядка. Поэтому и в теоретическом плане они привлекали наибольшее внимание. Для них в первую очередь были выделены канонические типы уравнений: гиперболические, параболические и эллиптические. Накапливавшиеся методы решения отдельных типов уравнений подвергались систематизации и посильному обобщению. Эти методы в огромной степени вбирали в себя факты вариационного исчисления, теории функций комплексного переменного, тригонометрических рядов и других высших разделов анализа. Именно в силу их практической значимости эти уравнения оказывались центрами, где сосредоточивались результаты из различных областей математики. Тем самым, в частности, создавались предпосылки для широких аналогий, характерных для современного функционального анализа и общих теорий в области дифференциальных уравнений.

Необходимо также упомянуть, что в то же время выявилось практическое значение уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,d\,x_i = 0.$$

Эти уравнения привлекали внимание Эйлера. Ими же занимался Монж. В начале XIX в. их исследовал И. Ф. Пфафф. В 1814—1815 гг. он сумел показать, что решение этого уравнения (получившего с тех пор его имя) состоит из соотношений

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{и} \quad d\Phi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Возникшая отсюда проблема Пфаффа интегрирования этого уравнения при минимально возможном числе соотношений между аргументами x_i ($i=1, 2, \ldots, n$) вызвала и вызывает обильную литературу. Помимо огромной роли проблемы в создании геометрической теории дифференциальных уравнений и приложений последних к геометрии она получила большое значение для механики. Оказалось, что неголономные связи являются уравнениями Пфаффа между виртуальными перемещениями. Нашли приложение уравнения Пфаффа и в термодинамике.

Название проблем Пфаффа ведет свое начало от Якоби, получившего многочисленные важные результаты о характере интегральных многообразий этого уравнения. Коши (1819) разработал метод характеристик, вслед за чем появился ряд сочинений по теории характеристик для разных видов уравнений различных порядков.

В обстановке быстрого пополнения фактического состава и приложений теории дифференциальных уравнений решающее значение приобрела выработка общих идей, объединяющих и организующих по возможности бо́льшее число фактов. Формирование подобных общих идей вообще составляло характерную черту математического анализа XIX в. Особенно важное значение эта черта приобретала в теории дифференциальных уравнений. Здесь уже нельзя было исходить из интуитивной убежденности в существовании общих решений, которые остается только найти по возможности наиболее удачным способом. Надо было доказывать существование решений, исходя из известных элементов. Уже в начале века появились первые доказательства столь характерных для современного анализа теорем существования. Они принадлежали Коши. Эти теоремы были доказаны для дифференциальных уравнений с учетом условий начального состояния, т. е. для задач, известных ныне как задачи Коши.

В лекциях по анализу, которые Коши читал в Политехнической школе, он дал решение этой задачи в простейшей постановке. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка: $y'=f(x, y)$. Доказать существование и единственность его решения при заданных начальных условиях: $x=x_0$; $y=y_0$. Коши доказал это в области, где $f(x, y)$ и $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ непрерывны. При этом он отправлялся от эйлеровского способа приближенного интегрирования: на отрезке оси абсцисс (x_0, X) наметил точки с абсциссами $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = X$. Из этих точек восставил ординаты:

$$y_0;$$

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0);$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + \ldots + f(x_{n-1}, y_{n-1}) \times \times (x_n - x_{n-1}).$$

Вершины ординат определяют многоугольник, аппроксимирующий искомую интегральную кривую. Остается доказать существование предельной функции $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, удовлетворяющей условиям задачи Коши.

Это доказательство Коши усовершенствовал в 1844 г. его ученик Ф. Муаньо. Употребляемое ныне условие Липшица было введено последним в 1876 г. Вскоре Дж. Пеано доказал теорему существования хотя бы одного решения упомянутой задачи Коши в области, где $f(x, y)$ непрерывна.

Коши смог распространить свой метод доказательства теорем существования на случай уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$$

при заданных $x = x_0$, $y = y_0$ и соответственно y_0^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ путем сведения его к системе уравнений первого порядка. К 1842 г. Коши доказал теорему существования для линейной системы уравнений с частными производными, указав способ приведения к этому виду нелинейной системы. Окончательную, по выражению Пуанкаре, форму теоремам существования придала С. В. Ковалевская (1874), которая доказала теорему существования и единственности решений системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где

$$u_i = u_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

при заданных начальных значениях

$$t = t_0, \ u_i = \varphi_i (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

в случае голоморфности функций f_i и φ_i. При этих условиях С. В. Ковалевская доказала, что система имеет для достаточно малых $t - t_0$ голоморфное решение, однозначно определенное начальными условиями.

Наконец, Пикар в 1890 г. развил идею Коши и создал другой метод доказательства теорем существования и единственности, основанный на доказательстве сходимости последовательных приближений

$$y_0;$$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_k = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{k-1})\, dx.$$

Теоремы существования имели в истории дифференциальных уравнений принципиальное значение. Они решали вопрос о строгости, законности их применения. В то же время методы последовательных приближений, применяемые при доказательстве соответствующих теорем, создавали хорошую основу для разработки методов численного интегрирования дифференциальных уравнений.

К XX в. доказательства теорем существования сделались неотъемлемой частью многих теоретических исследований, вошли в норму математической строгости. В теории дифференциальных уравнений много работ было посвящено различным обобщенным постановкам теоремы Ковалевской: для случаев неаналитических функций, неаналитических решений, постановка проблемы единственности не локальной, а во всей области существования решения и т. п.

Проникновение в теорию дифференциальных уравнений методов других математических дисциплин. Начиная с 70-х годов прошлого века теория дифференциальных уравнений пополнилась двумя направлениями, не потерявшими своей актуальности и в наше время. Мы имеем в виду внедрение в эту область математики теоретико-групповых представлений и создание качественных методов.

В главе VII мы уже упоминали, что Ф. Клейн и С. Ли после обучения в Париже у Жордана задались целью распространить данные теории групп на возможно большее число областей математики. Клейн рассматривал непрерывные группы геометрических преобразований и, исследуя свойства этих групп, в особенности их инварианты, создал классификацию геометрических наук [1].

Ли в свою очередь связал (начиная с 1873 г.) теорию групп с исследованием дифференциальных уравнений.

Каждому дифференциальному уравнению Ли считал возможным соотнести непрерывную группу преобразований, относительно которой уравнение является инвариантом. Группы, рассматриваемые при этом, содержат преобразования, определяемые числовыми параметрами

$$x \to f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Такого рода взаимно однозначное соотнесение преобразований и систем параметров справедливо лишь для малых преобразований. В зависимости от соответствующих бесконечно малых преобразований Ли получил возможность составить классификацию дифференциальных уравнений. При этом он выделил группу преобразований, составляющих класс дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах.

Теоретико-групповая точка зрения, введенная Ли, доказала узость класса дифференциальных уравнений, решаемых в квадратурах, и бесперспективность попыток построения общей теории дифференциальных уравнений в этом направлении. Поэтому впредь до обнаружения возможностей приложений исследования непрерывных групп в дальнейшем производились в плане построения их общей теории. Из последней выделилась теория групп Ли как таких групп, в которых произведение двух преобразований имеет своими параметрами непрерывные функции параметров преобразований-сомножителей

$$\gamma_i = F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Точнее говоря, теория непрерывных групп преобразований появилась именно как теория групп Ли и приобрела близкий к современному уровень общности лишь позже.

Прикладное значение теоретико-групповых концепций для дифференциальных уравнений проявилось в математической физике. Уравнения классической механики, как известно, инвариантны относительно преобразований Галилея. Противоречия, обнаружившиеся в электродинамике движущихся

---

[1] См. об этом в гл. XI.

тел с результатами классической механики, разъяснились после введения лоренцовых преобразований. Эти преобразования

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \; y' = y; \; z' = z; \; t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \; \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

нашел в 1887 г. В. Фохт. Он же доказал инвариантность относительно этих преобразований волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

(Δu — оператор Лапласа).

Лоренц (1904) открыл, что если преобразования Галилея, т. е. повороты, переносы начала и преобразования вида

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t,$$

где использована идея мгновенной передачи взаимодействия тел, заменить преобразованиями Лоренца, то указанные противоречия могут быть устранены. Пуанкаре в свою очередь показал, что преобразования Лоренца образуют группу. Идея рассмотрения классов дифференциальных уравнений с различными группами преобразований получила тем самым практическое воплощение.

Под давлением прикладных задач, в частности задач небесной механики, возникла и развивалась качественная теория дифференциальных уравнений. Как ни велики были успехи в решении различных классов дифференциальных уравнений, ни один из методов не мог помочь в решении старых задач о движении трех тел, подчиненных законам ньютонианской механики. Работы Ли подтвердили невозможность решения соответствующих дифференциальных уравнений в квадратурах. Методы приближенного решения давали лишь частное решение заданной задачи, соответствующее заданным начальным условиям на конечном интервале. Поведение интегральных кривых во всей области существования, как того требовали проблемы небесной механики, ни один из методов не помогал выяснить.

Пуанкаре в серии мемуаров, начатых в 1878 г. и известных под общим названием: «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», исследовал проблему: можно ли и как охарактеризовать поведение семейства интегральных кривых уравнения $y'=f(x, y)$ или системы

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_1(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = \varphi_2(x, y)$$

на всей плоскости, исходя из свойств функций f, или φ_1 и φ_2.

Вообще многие из работ А. Пуанкаре посвящены дифференциальным уравнениям. Помимо проблем небесной механики он исследовал задачу о колебании трехмерных континуумов, изучил ряд задач теплопроводности, теории потенциала, электромагнетизма и т. д. В ходе этих исследований Пуанкаре существенно обогатил совокупность оперативных средств теории дифференциальных уравнений. Он изучал разложения решений дифференциальных уравнений по малому параметру, доказал асимптотичность некоторых рядов, выражающих решения дифференциальных уравнений с частными производными, исследовал особые точки. По-видимому, практические задачи послужили для него толчком и к разработке качественных методов.

В математике качественными называют методы, дающие возможность выявить особенности искомого решения задачи, существование и количество решений и их особенности, не проводя ее численного решения.

Методы Пуанкаре были в основном геометрическими, точнее, топологическими. Рассматривая семейство интегральных кривых, Пуанкаре выделил особые точки и дал их классификацию. Он исследовал специально характер поведения интегральных кривых в окрестности особых точек. Для особого вида интегральной кривой — замкнутой, к которой приближаются по спиралям близкие кривые семейства, Пуанкаре ввел название предельного цикла. В качестве одной из задач, решаемых качественными методами, он изучил интегральные кривые, заданные на торе. Пуанкаре дал первые приложения качественных методов к задаче трех тел. Позднее его исследования о предельных циклах получили применение в радиотехнике (работы А. А. Андронова).

Успех топологических методов Пуанкаре был облегчен наличием предпосылок в виде развитых геометрических идей в теории функций комплексного переменного и в дифференциальной геометрии, а также идей теории множеств Г. Кантора. Своеобразие примененных Пуанкаре методов состояло в том, что они соединили теорию дифференциальных уравнений с топологией. Это вело в свою очередь к формированию топологии как особой отрасли математики, в первую очередь в упомянутых нами выше работах Пуанкаре. Внутри же теории дифференциальных уравнений за качественными методами укоренилось название топологических.

Почти одновременно с Пуанкаре качественные методы были введены в работах А. М. Ляпунова (1857—1918). Воспитанник Петербургского университета и ученик П. Л. Чебышева, он приступил в 1882 г. по совету своего учителя к решению конкретной, но трудной астрономической задачи: исследовать возможность существования фигур равновесия вращающейся жидкой массы, отличных от эллипсоидальной. Вскоре круг его исследований расширился, охватив проблему устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров, теорию потенциала и др.

Общую проблему устойчивости, о которой мы только что упомянули, Ляпунов свел к исследованию качественными методами поведения решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где F_i — при малых x_i разложимы в сходящиеся ряды по целым степеням x_k и

$$F_i(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Ляпунов отказался от введения линеаризации уравнений путем отбрасывания всех нелинейных членов для выяснения вопроса об устойчивости движения. Устойчивость, по Ляпунову, связывалась с поведением по отношению к возмущениям начальных данных. В докторской диссертации 1892 г. «Общая задача об устойчивости движения» Ляпунов строго определил основные понятия теории устойчивости, выделил случаи, когда линеаризация дает решение вопроса об устойчивости, исследовал ряд случаев, где линеаризация была недостаточной. В связи с этим Ляпунов решил многие вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений: о существовании и эффективном построении периодических решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений, поведение интегральных кривых уравнений в окрестности положения равновесия и др.

В ряде работ (1903—1918) Ляпунов дал решение задачи, указанной ему Чебышевым, о форме фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости в условиях ньютонианского тяготения. Он установил существование близких к эллипсовидным фигур равновесия однородной и слабонеоднородной жидкости. Оказалось, что невозможно отделить неэллипсоидальные фигуры равновесия от эллипсоидальных. Ляпунов доказал неустойчивость принятых в астрономической теории грушевидных фигур равновесия. Не перечисляя всех результатов, укажем лишь, что работы Ляпунова по устойчивости до сих пор содержат большую часть полученных в этой области фактов. Они продолжают быть основоположными в развитии теории дифференциальных уравнений и приложений ее к исследованию колебаний физических и механических систем.

В современной математике любая физическая система, поведение которой вблизи каждого состояния описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \text{ — время}),$$

носит название динамической системы. Общая теория динамических систем изучает совокупность всех их движений, соответствующих всевозможным начальным состояниям. Теория дифференциальных уравнений ко времени работ Ляпунова и Биркгофа (последний начал разрабатывать общую теорию динамических систем в 1912 г.) оказывалась не в состоянии изучать ни решения задачи о движении динамических систем во всей области определения, ни поведение решений вблизи особых точек. Поэтому в общей теории динамических систем большое значение приобретают качественные методы.

Применение качественных методов при этом облегчается геометрическими представлениями динамических систем. Совокупность возможных состояний последних трактуется как n-мерное многообразие, называемое фазовым пространством системы. Точками этого пространства служат отдельные состояния P динамической системы. Совокупность всех движений динамической системы представляется как непрерывная группа преобразований фазового пространства. Отдельное движение характеризуется движением точки P по ее траектории. Роль теории групп для теории динамических систем настолько велика, что в настоящее время динамическую систему часто задают именно как группу преобразований.

Общая теория динамических систем — актуальная область математики, выросшая из практических приложений теории дифференциальных уравнений.

История теории дифференциальных уравнений в XIX в. и ее приложений еще слабо разработана. Известно много фактов этой истории, правда весьма разнородных. Однако общетеоретические закономерности прослеживаются еще с трудом. Настоящая глава представляет одну из немногих попыток выяснения исходных пунктов и главных закономерностей развития этой области математики. В ней: а) показано возрастающее воздействие быстро усложняющихся задач практики на математический анализ в его классической постановке; б) указаны пути преобразования аппарата анализа, в особенности теории дифференциальных уравнений и расширения области его приложений; в) выяснены некоторые черты процесса появления и развития элементов общей теории дифференциальных уравнений (теоремы существования, качественные методы, идеи теории групп); г) отмечено налаживание связей теории дифференциальных уравнений с другими областями математики (топологией, теорией групп, геометрией, теорией функций), появление общих элементов и взаимопроникновение методов.