ГЛАВА X

СОЗДАНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

О предпосылках создания общей теории функций комплексного переменного. Современная теория функций комплексного переменного охватывает чрезвычайно обширную область математики. Этим именем называют большую и разветвленную совокупность математических дисциплин — теоретических и прикладных. Перечислить все эти дисциплины, тем более охарактеризовать их, — дело трудное и громоздкое, даже если ограничиться одними аналитическими функциями. Привлечение к исследованию функций не аналитических, но обладающих некоторыми свойствами аналитических функций (мы имеем в виду теории функций квазианалитических и моногенных, отображений внутренних и квазиконформных и т. п.) весьма расширяет область рассматриваемой нами здесь теории и усиливает трудности анализа путей ее формирования.

Для рассмотрения в настоящей главе мы выберем вопросы, связанные с вхождением в математику мнимых и комплексных объектов, обращая меньше внимания на свойство аналитичности функции, т. е. представимости ее степенным рядом

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots$$

Мы считаем себя вправе поступить так потому, что об истории класса аналитических функций и связанного с этим классом аппарата степенных рядов выше мы уже приводили некоторый материал.

Рассмотрим вначале вопрос о предпосылках создания теории функций комплексного переменного, накопившихся к XIX в.

Понятие мнимого, а затем комплексного числа известно в математике и используется с давних времен. История его появления отражает ту общую черту развития математических исчислений, что введение и использование обратных операций ведет, как правило, к необходимости расширения числовой области. Так, введение вычитания вынудило в конце концов дополнить натуральный ряд отрицательными числами, деление привело к расширению целочисленного ряда до множества рациональных чисел. В свою очередь операция извлечения корня явилась оперативной причиной введения общего понятия действительного числа. Частный случай, когда речь шла об извлечении корня четной степени из отрицательного числа, требовал введения мнимых чисел.

Только в XVI в. в связи с алгебраическим решением кубических уравнений Р. Бомбелли (1572) отошел от трактовки мнимых чисел как таинственных или нелепых и выработал правила арифметических операций с мнимыми числами. Однако еще в течение очень долгого времени, несмотря на некоторые удачные мысли (например, Валлиса) относительно интерпретации мнимых и комплексных чисел, их природа не была разгадана и к ним относились как к некоторому сверхъестественному явлению в математике. Еще в 1702 г. Г. В. Лейбницу приходилось писать, что мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием. Не было в истории недостатка в подобных утверждениях о мистических свойствах мнимых и со стороны других ученых.

Неразъясненность понятия комплексного числа не могла заслонить их полезности в решении конкретных задач. Большое количество накопленных фактов дало повод математикам XVIII в. перенести понятие мнимости и в область переменных величин. Поскольку этот перенос осуществлялся для конкретных случаев, то в зависимости от характера задачи мнимые величины представали перед исследователями в разном «обличье»: физическом, геометрическом или же в аналитическом. Задача научной интерпретации комплексных чисел решалась сразу в разных планах, вместе с общим развитием математического анализа.

По-видимому, наиболее ранними в этом столетии были попытки Лейбница и И. Бернулли ввести операции с комплексными числами с целью достичь возможно более общих результатов в интегрировании. Используя в этих целях разложение подынтегральных функций на элементарные дроби, они широко пользовались аналогиями. Например, в 1704 г. И. Бернулли утверждал в одной из своих работ, что, поскольку применение к дифференциалу

$$\frac{adz}{b^2 - z^2}$$

подстановки

$$z = b\,\frac{t-1}{t+1}$$

преобразует его в так называемый логарифмический дифференциал

$$\frac{adt}{2bt},$$

то применение к

$$\frac{adz}{b^2 + z^2}$$

мнимой подстановки

$$z = \sqrt{-1}\,b\,\frac{t-1}{t+1}$$

даст «дифференциал мнимого логарифма»

$$\frac{adt}{2\sqrt{-1}\,bt}.$$

Еще одна мнимая подстановка

$$t = \frac{b\sqrt{-1} + \sqrt{\frac{1}{r} - b^2}}{b\sqrt{-1} - \sqrt{\frac{1}{r} - b^2}},$$

и помимо установленной только что связи между $\operatorname{arctg}\frac{z}{b}$ и

$$\operatorname{Ln} t = \operatorname{Ln}\frac{b - z\sqrt{-1}}{b + z\sqrt{-1}}$$

И. Бернулли находит еще одно соотношение:

$$d\,(\arcsin b\sqrt{r}) = d\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\operatorname{Ln} t\right).$$

Подобные методы способствуют накоплению фактов о мнимых количествах, но не проясняют их природы. Поэтому понятно, что каждая из попыток ввести комплексные числа формально оперативным путем приводила к спорам, порою весьма ожесточенным.

В качестве примера таких споров упомянем спор о природе логарифмов отрицательных и мнимых величин. Этот спор начался в 1712 г. между Лейбницем, считавшим логарифмы отрицательных чисел мнимыми, и И. Бернулли, настаивавшем на том, что они действительны. При этом И. Бернулли опирался на «доказанный» им факт, что

$$\ln y = \ln(-y).$$

В спор включились ряд ученых, в том числе Даламбер и Эйлер. Однако спор не утих даже после того, как в 1749 г. Эйлер открыл многозначность логарифма и предложил убедительное для того времени доказательство.

Эйлер исходил из уравнения

$$x = e^y = \left(1 + \frac{y}{i}\right)^i,$$

т. е. в современной форме записи

$$x = e^y = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n.$$

Здесь, как мы уже упоминали, i — «бесконечно большое» число[1]. Разрешая это уравнение относительно y, Эйлер получил

$$y = \ln x = i\left(x^{\frac{1}{i}} - 1\right),$$

т. е.

$$y = \ln x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Здесь $x^{\frac{1}{i}}$ — корень с бесконечно большим показателем. Он бесконечнозначен. Все его значения различны; вообще говоря, они мнимые. Следовательно, логарифм тоже имеет бесконечное множество различных значений, которые отличаются на числа, кратные $2\pi\sqrt{-1}$. В самом деле,

[1] См. стр. 24.

$$x = a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) =$$
$$= e^c(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi).$$

Отсюда

$$y = \ln x = c + (\varphi \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Одно из значений логарифма действительного положительного числа будет действительно, остальные — мнимые. Значения логарифмов отрицательных и мнимых чисел — все мнимые.

Решающий толчок введению мнимых чисел в математический анализ был дан тогда, когда выяснилась их полезность в решении дифференциальных уравнений математической физики. Это проявилось в сочинениях Даламбера (1752) и Эйлера (1755) по гидродинамике. В этих работах были использованы результаты Эйлера (1734) и Клеро (1739), эквивалентные утверждению, что выражение

$$P\,dx + Q\,dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции $\varphi(x, y)$, если

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Даламбер решал задачу обтекания твердого тела жидкостью (однородной и без учета веса). Обозначив p и q — составляющие по осям скоростей частиц, протекающих через точку $M(x, y)$, он нашел из сравнения их полных дифференциалов уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

которые интерпретируются как условия того, что

$$p\,dx + q\,dy \qquad \text{и} \qquad p\,dy - q\,dx$$

суть полные дифференциалы. Эти уравнения были получены также Эйлером.

Теперь уже нетрудно определить пару сопряженных гармонических функций, являющихся решениями системы уравнений Даламбера — Эйлера. Следовало лишь применить метод, предложенный Даламбером в случае уравнения колебания струны. Пусть

$$p\,dx + q\,dy = du, \quad p\,dy - q\,dx = dv.$$

Тогда

$$d(u+\sqrt{-1}v)=(p+\sqrt{-1}q)\,d(x+\sqrt{-1}y),$$

$$d(u-\sqrt{-1}v)=(p-\sqrt{-1}q)\,d(x-\sqrt{-1}y).$$

Отсюда

$$p+\sqrt{-1}q=\frac{d(u+\sqrt{-1}v)}{d(x+\sqrt{-1}y)}=\varphi(x+\sqrt{-1}y),$$

$$p-\sqrt{-1}q=\frac{d(u-\sqrt{-1}v)}{d(x-\sqrt{-1}y)}=\psi(x-\sqrt{-1}y).$$

Сопряженные гармонические функции, как нетрудно теперь увидеть, представляют действительную и мнимую часть функции комплексного переменного.

Эйлер, получив аналогичный результат и не имея возможности дать ему подходящую интерпретацию, выразил сопряженные гармонические функции в виде рядов по однородным гармоническим полиномам, представляя при этом комплексные числа как в алгебраической, так и в тригонометрической форме.

К середине XVIII в. в математическую практику вошли различные аспекты понимания комплексного числа, как переменного, так и постоянного. Наибольшие заслуги в этом деле принадлежат Эйлеру. Он же в серии монографий, посвященных общему построению анализа («Введение в анализ бесконечно малых», тт. 1—2. «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление», тт. 1—3), счел возможным включить в общую систему и аналитические функции комплексного переменного. Во «Введении в анализ бесконечно малых» (1748) Эйлер ввел комплексную переменную в качестве наиболее общего понятия переменной величины, использовав комплексные числа при разложении функций на линейные сомножители. Он ввел впервые формулы (приведем их в привычной нам символике):

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n;\quad \ln z=\lim_{n\to\infty}n\left(z^{\frac{1}{n}}-1\right);$$

$$(\cos z\pm i\sin z)^n=\cos nz\pm i\sin nz,$$

а также формулы связи между тригонометрическими и показательными функциями

$$\cos v=\frac{e^{+iv}+e^{-iv}}{2};\quad \sin v=\frac{e^{+iv}-e^{-iv}}{2i};$$

$$e^{iv}=\cos v+i\sin v.$$

Если рассмотреть всю совокупность фактов, установленных Эйлером и его современниками, то можно прийти к выводу, что основные факты теории элементарных функций комплексного переменного были в большей части уже выявлены.

Что касается дифференцирования и интегрирования функций комплексного переменного, то Эйлер, полагая

$$f(x+iy)=u(x, y)+iv(x, y),$$

действовал с ними, как с парами функций вещественного переменного. Кроме того, в серии работ (1776—1783) он использовал комплексные числа при вычислении интегралов. Не формулируя явно, он выделил класс аналитических функций комплексного переменного, высказав относительно них принцип симметрии, состоящий в том, что всякая функция $Z\ (z)$, где $z=x+iy$, имеет вид

$$Z(x+iy)=M+iN,$$

а при $z=x-iy$

$$Z(x-iy)=M-iN.$$

Если теперь рассмотреть интеграл

$$\int Z\,dz=V,$$

где

$$z=x\pm iy, \quad V=P+iQ,$$

то

$$P+iQ=\int(M+iN)(dx+i\,dy),$$

$$P-iQ=\int(M-iN)(dx-i\,dy),$$

откуда

$$P=\int M\,dx-N\,dy, \quad Q=\int N\,dx+M\,dy.$$

Как указывалось выше, условие, что подынтегральные выражения есть полные дифференциалы, ведет к известным условиям Даламбера — Эйлера

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial x}.$$

В других случаях Эйлер использует

$$z = v(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Полагая здесь $\varphi=\mathrm{const}$, он таким образом интегрирует вдоль луча, выходящего из начала координат.

Работа Эйлера «О представлении сферической поверхности на плоскости» (1777) не только содержит идею, но и практически вводит конформное отображение областей сферы на плоскость. Эйлер называл эти отображения «подобными в малом». Термин «конформный» был впервые употреблен, по-видимому, петербургским академиком Ф. Шубертом в 1789 г. Рассматривая долготу t и широту u сферической поверхности и соответствующие декартовы координаты x и y точек плоскости, Эйлер вывел общие условия конформного отображения в виде

$$dx = p\,du + r\,dt\cos u,$$

$$dy = r\,du - p\,dt\cos u,$$

откуда

$$dx + i\,dy = (p + ir)(du - i\,dt\cos u).$$

С помощью подстановки

$$s = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right), \quad z = \ln s - it$$

это преобразуется в

$$dx + i\,dy = (p + ir)\cos u\,dz.$$

Геометрически это соответствует: стереографической проекции сферы на плоскость

$$\zeta = s(\cos t + i\sin t),$$

преобразованию плоскости ζ посредством логарифма

$$\varepsilon = \ln\zeta = \ln s + it,$$

зеркальному отражению в действительной оси $z=\bar{\varepsilon}$. Такое конформное отображение сферы (без полюсов) на плоскость

$$z = \ln s - it = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) - it$$

называется проекцией Меркатора в картографии [1].

---

[1] См. А. И. Маркушевич. Очерки по истории теории аналитических функций. Гостехиздат, М., 1951, стр. 33.

Поэтому

$$x + iy = 2\Gamma(z) = 2\Gamma(\ln s - it),$$
$$x - iy = 2\Gamma(\ln s + it),$$

$\Gamma(z)$ — аналитическая функция с действительными значениями при z — действительном,
откуда

$$x = \Gamma(\ln s - it) + \Gamma(\ln s + it),$$
$$iy = \Gamma(\ln s - it) - \Gamma(\ln s + it).$$

Таким образом, еще Эйлер сумел практически решить общую задачу о конформном отображении областей сферы на плоскость.

Математическая литература XVIII в. в интересующем нас здесь плане представляет пестрое переплетение важных результатов, проливающих свет на природу комплексных величин, не менее важных приложений последних к гидродинамике, картографии и другим наукам, и обильных ошибок и неясностей в пользовании мнимыми объектами. Различные интерпретации комплексных чисел еще не сформировались в единую концепцию, тем более это относится к комплексным переменным. Однако все необходимые элементы общей теории, могущей охватить свойства функций комплексного переменного, в основном сложились; наступила пора создания этой теории. Эта пора совпала с наступлением XIX в.

Введение основных понятий теории функций комплексного переменного. Очередной этап истории теории функций комплексного переменного был характерен введением уточненных определений основных понятий. Прежде всего, речь идет о появлении геометрических интерпретаций понятия комплексного числа. Эти интерпретации были первыми выделены в явном виде из массы накопленных фактов в качестве предмета специального систематического изучения. Начиная с 1799 г. появилась серия работ, в которых были даны более или менее удобные интерпретации комплексного числа и определены правила действий. Общим во всех работах было введение плоскости, на которой комплексные числа изображены либо в виде точки, либо направленного отрезка.

Геометрическим представлением мнимых чисел и операций над ними владели К. Вессель (в 1799 г.), Бюе (Buée) и Арган (в 1806 г.), Гаусс, а вскоре и многие другие ученые. Однако они сочетали этот вопрос с конкретными задачами в других областях математики. Достаточно же общая теоретическая трактовка вопроса появилась вначале у Гаусса, а затем в сильной степени в работах Коши.

Землемер по специальности, К. Вессель в работе «Об аналитическом представлении направления» (1799) поставил задачу отыскать аналитическое выражение длины и направления отрезка на плоскости. Для этого он использовал комплексные числа

$$z = x + \sqrt{-1}\, y = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

попутно выяснив их сущность и отношение к действительным числам, для изображения которых достаточно одной прямой. На осях координат он ввел единичные отрезки:

$$+1, \quad -1, \quad +\varepsilon(=\sqrt{-1}), \quad -\varepsilon,$$

обобщив затем этот прием добавлением третьей пространственной единичной координаты $\pm\eta$. Числа изображены были векторами из начала координат, над ними определены операции и решен ряд задач, вплоть до аналитического выражения вращения.

Написанная на датском языке, работа Весселя оставалась долгое время незамеченной. Более широкую известность, впрочем тоже не сразу, получили вышедшие в 1806 г. работы Аргана и Бюе. В них была реализована та же идея изображения мнимого числа путем откладывания отрезка, перпендикулярного действительной оси. Идеей изображения комплексного числа как элемента двухразмерного пространства полностью владел Гаусс, первоначально, в течение длительного времени, не посвящая ее изложению специальной работы, так как, по его мнению, необходимо было считаться с убеждениями современников. Лишь в 1831 г. он опубликовал работу по теории биквадратичных вычетов, где изложил теоретическое обоснование и геометрическую интерпретацию комплексных чисел, дав им впервые это сохранившееся до наших дней имя. Чтобы лучше понять, сколь глубоко Гаусс проник в теорию комплексных чисел, достаточно привести отрывок из письма Гаусса астроному и математику Бесселю (1811 г.; опубликовано лишь в 1880 г.). В этом письме по поводу вводимого им интегрального логарифма $\mathrm{li}(x) = \int \frac{dx}{\ln z}$ Гаусс писал: «Что нужно понимать под $\int \varphi x \cdot dx$ для $x=a+bi$?

Очевидно, если хотят исходить из ясных понятий, нужно принять, что x, отправляясь от значения, для которого интеграл должен равняться нулю, посредством бесконечно малых приращений (каждое вида $a+bi$) переходит к $x=a+bi$, и тогда сложить все $\varphi x \cdot dx$.

Итак, смысл (интеграла) вполне установлен. Но переход можно осуществить бесконечно многими способами: так же как совокупность всех действительных величин можно мыслить в виде бесконечной прямой линии, так и совокупность всех величин, действительных и мнимых, можно осмыслить посредством бесконечной плоскости, каждая точка которой с абсциссой a и ординатой b будет представлять величину $a+bi$. Непрерывный переход от одного значения x к другому $a+bi$ представляется тогда посредством линии и возможен бесконечным множеством способов. Я утверждаю теперь, что интеграл $\int \varphi x \cdot dx$ при двух различных переходах всегда сохраняет одно и то же значение, если внутри части плоскости, заключенной между двумя линиями, представляющими переход, φx нигде не обращается в бесконечность. Это прекраснейшая теорема, нетрудное доказательство которой я дам при удобном случае. Она связана с другими прекрасными истинами, относящимися к разложению в ряды».

В этом отрывке содержится многое: отчетливая интерпретация мнимых чисел, определение интеграла в комплексной плоскости, интегральная теорема (известная теперь как теорема Коши), разложимость аналитической функции в степенной ряд. В этом же письме Гаусс рассмотрел $\int \frac{dx}{x}$ и его значение в точке $x=0$. При обходах вокруг этой точки к первообразной $y=\log x$ будут добавляться постоянные слагаемые $\pm 2\pi i$.

Выяснение смысла интегрирования на комплексной плоскости имело особенно большое значение потому, что использование комплексных переменных при вычислении трудных определенных интегралов оказывало, по-видимому, наибольшее в то время влияние на развитие теории функций комплексного переменного. Лаплас (1749—1827) в серии работ 1782—1812 гг. неоднократно прибегал к помощи мнимых при интегрировании функций. Он развивал метод решения линейных уравнений, разностных и дифференциальных, известный под названием преобразования Лапласа: неизвестная функция $y(s)$ заменяется интегралом вида $\int \varphi(x) x^s dx$, или $\int \varphi(x) e^{-sx} dx$, где φx — новая неизвестная функция. Это преобразование переводит, как мы теперь говорим, функцию-оригинал $f(t)$, $0 < t < \infty$ в функцию

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

комплексного переменного $p = \sigma + it$. Необходимые преобразования (замена переменной при интегрировании, интегрирование по направлениям, отличным от действительной оси) Лаплас еще рассматривает как «орудия открытия», удобный метод, подобный своеобразной индукции. Его действительное значение, конечно, больше: с помощью преобразования Лапласа и аналогичных методов эффективно решаются многие задачи электротехники, гидродинамики, механики, теплопроводности, так как при этом в соответствующих линейных дифференциальных уравнениях с частными производными число переменных сокращается. Особенно широко оно применяется в операционном исчислении.

Результаты Лапласа и других ученых, занимавшихся аналогичными проблемами, получаются, таким образом, на пути изучения свойств степенных рядов с помощью перехода от вещественных членов ряда к комплексным. Интегрирования в комплексной области, пожалуй, еще нет; интегрируются мнимые функции по вещественному аргументу. Новая идея в этом направлении была высказана Пуассоном (около 1820 г.): выбирать пути изменения переменной между вещественными пределами по последовательности комплексных значений. Целью этого являлось преодоление затруднений, связанных с несобственностью интегралов из-за обращения подынтегральной функции в бесконечность. По выражению Пуассона,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$$

«не является суммой дифференциалов», так как

$$\left.\frac{1}{x}\right|_{x=0} = \infty.$$

Но если ввести подстановку

$$x = -e^{iz} = -(\cos z + i \sin z)$$

и интегрировать по z от 0 до $(2n+1)\pi$, то интеграл окажется равным $-(2n+1)\pi i$. Таким же способом

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^m} = \frac{(-1)^m}{m-1}\left[\cos(m-1)(2n+1)\pi - 1\right].$$

Под давлением практических задач затруднения, связанные с применением комплексных переменных, были в основном преодолены рядом ученых. Назрела необходимость в систематической разработке теории функций комплексного переменного и ее связей с остальными частями анализа бесконечно малых. Выполнение этой задачи выпало в значительной части на долю Коши.

В «Алгебраическом анализе» и «Резюме лекций по дифференциальному и интегральному исчислению» Коши, как известно, стремился построить цельную и строгую систему анализа бесконечно малых. В этой его системе нашли отражение усилия по систематизации фактов, относящихся к использованию в анализе комплексных чисел и переменных количеств. Принципиально нового по сравнению с предшественниками и современниками лекции Коши в этой области не содержат. Комплексное переменное здесь в основном еще только вспомогательное средство для решения трудных задач интегрального исчисления; при введении операций велик элемент аналогии.

Однако сама попытка построения системы анализа, естественно, вынудила Коши к разъяснению смысла основных понятий и операций с мнимыми. Первые существенные результаты Коши опубликовал в 1825 г. в двух работах: «Мемуар о теории определенных интегралов» и «Мемуар об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами». Первый из них был написан еще в 1814 г. В нем и цель еще осталась прежняя: применить мнимые величины к вычислению определенных интегралов. Исходный пункт Коши — соотношение

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx\,dy,$$

известное еще от Эйлера (1769). Затем Коши выбирает две функции S и V, удовлетворяющие уравнениям Даламбера — Эйлера:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x}; \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Этому требованию удовлетворяет, как известно, действительная и мнимая часть аналитического выражения

$$F(x+iy) = S + iV.$$

Подставляя в правую и левую части исходного соотношения вместо $f(x, y)$ соответственно правые и левые части уравнений Даламбера—Эйлера, получим:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial V}{\partial y}\, dy\, dx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} \frac{\partial S}{\partial x}\, dx\, dy;$$

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial S}{\partial y}\, dy\, dx = -\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} \frac{\partial V}{\partial x}\, dx\, dy,$$

откуда

$$\int_{x_0}^{X} [V(x, Y) - V(x, y_0)]\, dx = \int_{y_0}^{Y} [S(X, y) - S(x_0, y)\, dy;$$

$$\int_{x_0}^{X} [S(x, Y) - S(x, y_0)]\, dx = \int_{y_0}^{Y} [V(X, y) - V(x_0, y)]\, dy$$

Лишь незадолго перед опубликованием Коши догадался свести эти две формулы в одну, чтобы получить соотношение относительно функции комплексного переменного. Первое из соотношений он умножил на i и сложил со вторым соотношением. Получилось:

$$\int_{x_0}^{X} F(x+iY)\, dx - \int_{x_0}^{X} F(x+iy_0)\, dx =$$

$$= \int_{y_0}^{Y} F(X+iy)\, i dy - \int_{y_0}^{Y} F(x_0+iy)\, i dy,$$

или

$$\int_{y_0}^{Y} F(x_0+iy)\, i dy + \int_{x_0}^{X} F(x+iY)\, dx =$$

$$= \int_{x_0}^{X} F(x_0+iy_0)\, dx + \int_{y_0}^{Y} F(X+iy)\, i dy,$$

что является интегральной теоремой Коши для интегрирования по прямоугольному контуру:

$$\int\limits_{ADC} F(z)\,dz = \int\limits_{ABC} F(z)\,dz.$$

При этом Коши, независимо от Гаусса, указал на необходимость требования, чтобы $f(x, y) \neq \infty$ на сторонах прямоугольника и внутри его.

Во втором из упомянутых выше мемуаров Коши выясняет смысл интеграла

$$\int\limits_{x_0+iy_0}^{X+iY} f(z)\,dz.$$

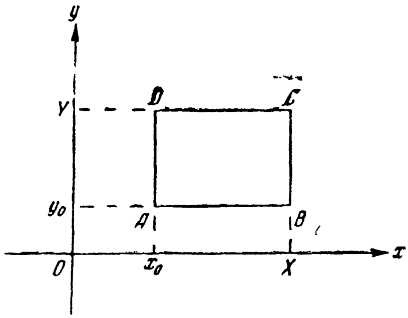

Рис. 12

Чтобы соблюсти аналогию с интегралами от функций действительного переменного и иметь возможность трактовать заданный интеграл как предел интегральной суммы, Коши указал, что следует установить для $z = x + iy$ соотношения:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Эти функции должны быть монотонны и непрерывны в области $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и удовлетворять условиям:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad x(T) = X, \quad y(T) = Y.$$

Иначе говоря, исследуемый интеграл Коши заменил интегралом вдоль некоторой кривой, соединяющей на комплексной плоскости точки (x_0, y_0) и (X, Y). Посредством уравнений кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ он сводится к интегралу

$$\int\limits_{t_0}^{T} (x' + iy')\, f(x + iy)\,dt.$$

После этого следует формулировка интегральной теоремы: если $f(x + iy)$ конечна и непрерывна в прямоугольнике $x_0 \leqslant x \leqslant X$ и $y_0 \leqslant y \leqslant Y$, то значение интеграла не зависит от пути интегрирования. Для ее доказательства Коши привлек методы вариационного исчисления. Именно он заменил $x(t)$ и $y(t)$ на близкие значения $x(t)+\varepsilon u(t)$, $y(t)+\varepsilon v(t)$, вычислил вариацию интеграла и установил, что она равна нулю. Современный вид доказательство интегральной теоремы получило в 1883 г. у Фалька и в 1884 г. у Гурса.

Совершенно естественный переход к анализу случаев, когда $f(z)$ обращается в бесконечность внутри или на границе прямоугольника, привел Коши к необходимости ввести понятие вычета. Еще в мемуаре 1814 г. он пришел к нему, отыскивая разность между двумя интегралами с общими пределами, но взятыми по разным путям, между которыми оказываются полюсы функции. В 1826 г. появляется и самый термин: вычет, который Коши вводит следующим образом: «Если, после того как найдены значения x, обращающие $f(x)$ в бесконечность, прибавить к одному из этих значений, обозначаемому через x_1, бесконечно малое количество ε и далее разложить $f(x_1+\varepsilon)$ по возрастающим степеням того же количества, то первые члены разложения будут содержать отрицательные степени ε и один из них будет произведением $\frac{1}{\varepsilon}$ на конечный коэффициент, который мы назовём вычетом функции $f(x)$, относящимся к частному значению x_1 переменной x». Сумма таких вычетов называлась у Коши интегральным вычетом.

В большом числе (16) работ Коши создал теорию вычетов. В основном эта теория оформилась в 1826—1829 гг., но Коши продолжал ее развивать и в последующие годы, отыскивая новые и новые приложения этой теории к решению различных задач интегрального исчисления (преимущественно к вычислению определенных интегралов), алгебраических, трансцендентных и дифференциальных (речь идет о системах линейных уравнений с постоянными коэффициентами) уравнений, теории разложения функций в ряды и математической физики. Интересно, что при этом Коши настойчиво подчеркивал наличие идеи о вычетах у Эйлера и не отстаивал свой приоритет.

В работах Коши впервые появилась интегральная формула — весьма важная для последующего развития теории функций комплексного переменного и ее приложений. Она была введена в серии работ Коши, посвященных разложению аналитических функций в ряды. В наиболее явной форме она впервые появилась в мемуаре «О небесной механике и о новом исчислении, называемом исчислением пределов» (1831).

Вначале интегральная формула Коши была получена как условие разложения функции в ряд. Отметив, что

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{npi}\,dp = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{-npi}\,dp,$$

а при $n=0$

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} dp = 2\pi,$$

Коши рассматривает сначала полином

$$f(\overline{x}) = a_0 + a_1\overline{x} + a_2x^2 + \ldots + a_n\overline{x}^n,$$

где $\overline{x} = xe^{pi}$, и получает

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\overline{x})\,dp = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{1}{\overline{x}}\right) dp = 2\pi a_0 = 2\pi f(0).$$

Эта формула оказывается верной и для любой (по словам Коши) функции $f(\overline{x})$, конечной и непрерывной, при удовлетворении условия

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{ix}\,\frac{df(\overline{x})}{dp}.$$

Если $f(0) = 0$, то очевидно

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\overline{x})\,dp = 0.$$

Подставив в эту формулу вместо $f(\overline{x})$ выражение

$$\frac{\overline{x}\,[f(\overline{x}) - f(x)]}{\overline{x} - x},$$

где $|x| < |\overline{x}|$, Коши получил

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\overline{x}f(\overline{x})\,dp}{\overline{x} - x} = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\overline{x}f(x)}{\overline{x} - x}\,dp = f(x)\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(1 + \frac{x}{\overline{x}} + \frac{x^2}{\overline{x}^2} + \ldots\right)\times$$

$$\times\,dp = 2\pi f(x).$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\overline{x}f(\overline{x})}{\overline{x} - x}\,dp.$$

Если использовать имеющееся у Коши соотношение

$$dp = \frac{d\bar{x}}{i\bar{x}},$$

то получим интегральную формулу в современной форме

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\bar{x})}{\bar{x} - x} \, d\bar{x}.$$

Но упомянутое выражение для dp имеет место лишь, если модуль $\bar{x}$ постоянен. Таким образом, контур интеграции здесь — окружность. Результат получился у Коши еще недостаточно общий. В настоящее время известно, что теорема справедлива для любой взятой в качестве контура замкнутой спрямляемой жордановой кривой.

В других мемуарах Коши рассматривал применения этой теоремы: к теории сходимости рядов, для вывода остаточного члена ряда Тейлора и оперирования с рядами. Вслед за Коши многие математики XIX и XX вв. посвящали свои работы его интегральной теореме. Последняя

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} \, d\varsigma,$$

как известно, дает выражение $f(z)$ для z любого, находящегося в области аналитичности функции, через ее значение на контуре C. Широкая применимость интеграла Коши в теории специальных функций, аналитической теории дифференциальных уравнений, аналитической теории чисел, теоретической физике, различных областях механики определила в последующем его актуальность, сохранившуюся до наших дней.

Наряду с мемуарами Коши и вслед за ними появилось много работ по теории функций комплексного переменного. Их трудно перечислить, тем более охарактеризовать. Здесь мы упомянем прежде всего замечательную работу Абеля «Исследования ряда

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots,$$

где m и x — любые комплексные числа», содержащую вывод двух замечательных теорем. Первая теорема: если ряд $f(\alpha) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \ldots$ сходится для некоторого $\alpha = \alpha_0$, то он сходится для α, меньшего α_0 по модулю (понятие модуля у Абеля еще отсутствует, что утяжеляет язык изложения). Вторая теорема: $f(\alpha - \beta) \to f(\alpha)$, если $\beta \to 0$, $\alpha \leqslant \alpha_0$, т. е. сумма сходящегося степенного ряда есть непрерывная функция аргумента. Здесь же Абель отметил ошибку Коши, утверждавшего, что сумма сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна. Общий же вклад Абеля в теорию функций, в которой он заложил основы теории алгебраических функций и (одновременно с Якоби) теории эллиптических функций, настолько значителен, что заслуживает специального сочинения.

40-е годы XIX в. отмечены в истории теории функций комплексного переменного крупнейшими открытиями, по существу завершившими период ее формирования. В 1843 г. Лоран нашел и опубликовал ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

носящий ныне его имя. В эти же годы Лиувилль применил теорию Коши к теории эллиптических функций. Среди доказанных им теорем имеется, например, такая: если аналитическая функция $f(x)$ на всей комплексной плоскости ограничена по модулю, то $f(x) \equiv \mathrm{const}$. Пюизё разработал теорию алгебраических функций и осуществил разложение многозначных алгебраических функций по дробным степеням. Характер новых открытий и их уровень делались уже весьма близкими к современным.

Одним из признаков того, что теория уже сформировалась, является появление монографий, содержащих ее систематическое изложение в стиле, близком к аксиоматическому, и имеющих также учебные цели. В теории функций комплексного переменного этот момент наступил в середине XIX в. Профессор Петербургского университета Н. И. Сомов в 1850 г. опубликовал «Основания теории эллиптических функций». Через шесть лет, в 1856 г., Брио и Буке издали небольшой мемуар «Исследование функций мнимого переменного», являющийся по существу первым учебным пособием. С 1861 г. в Берлинском университете начались курсы лекций Вейерштрасса по теории аналитических функций.

Создание геометрической теории функций комплексного переменного. В 40-х годах прошлого века, одновременно с завершением формирования основ теории аналитических функций, в эту теорию были внесены новые идеи, существенно изменяющие ее состав, характер и цели. Большая группа идей вошла с работами Б. Римана (1826—1866).

Исследования Римана в области теории функций комплексного переменного характерны наличием широких аналогий, связавших эту теорию со многими другими областями математики. Тем самым была в значительной мере преодолена изолированность представлений о функциях комплексных переменных. Одновременно в рамках самой этой теории сформировались новые отделы, тесно связанные с другими дисциплинами. Основные результаты Римана содержатся в его диссертации «Основы общей теории функций комплексного переменного» (1851) и в «Теории абелевых функций» (1857). Известно, что аналитическая функция $w = u + iv$ от комплексного аргумента $z = x + iy$ удовлетворяет (помимо ставших само собой разумеющимися требований дифференцируемости по совокупности действительных переменных и непрерывности) уравнениям Даламбера—Эйлера:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отсюда, очевидно, следуют условия

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Во времена Римана появилось много интерпретаций этого замечательного факта. Гельмгольц трактовал u как потенциал скорости движения несжимаемой жидкости в плоскости (x, y); при этом v была функцией тока. В электротехнике, когда речь шла о стационарном течении тока, Кирхгоф вводил функцию u и называл ее электростатическим потенциалом. Ом определял ее как напряжение, а Фурье интерпретировал u как температуру в решении задачи о стационарном движении тепла. Наконец, у Гаусса отмеченный факт трактовался как условие, что значение

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d(u + iv)}{d(x + iy)}$$

зависит лишь от точки $x + iy$, а не от направления $dx + idy$, т. е. отображение плоскости (x, y) на плоскость (u, v) есть конформное отображение.

Риман также исходил из того, что действительная и мнимая часть функции удовлетворяют уравнениям Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0,$$

т. е. являются гармоническими. Если известна функция u, то сопряженная функция v определяется с точностью до аддитивного постоянного:

Г. Б. Риман
1826—1866

$$v = \int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right).$$

Риман решил, что создаются условия для переноса идей математической физики в теорию функций. К тому же методы решения уравнения Лапласа были к тому времени достаточно хорошо разработаны. Соответствующая краевая задача, называемая проблемой Дирихле, формулируется так: найти значения функции в точках области по ее значениям на границе области. Решения задачи Дирихле для ряда специальных случаев были разработаны Гауссом (1813 и 1840 гг.), Грином (1828), Кирхгофом, Дирихле и др. В этих исследованиях позднее выкристаллизовалась теорема существования: если на границе односвязной области G задана непрерывная функция $u(x, y)$, то существует аналитическая внутри области G функция $f = u + iv$, действительная часть которой непрерывно приближается к заданным граничным значениям.

Риман в этом круге задач исследовал проблему: в какой мере аналитические функции определяются по краевым условиям. Быстро выяснилось в то время, что в случае конечной области, ограниченной единственной замкнутой кривой, для определения функции $w = u + iv$ от $z = x + iy$ достаточно задать граничное распределение значений u и значение v в одной точке области. Можно, наоборот, задать граничное распределение v и значение u в точке; можно, наконец, задать в каждой точке контура соотношение $\varphi(u, v)$ или для каждой пары граничных точек два соотношения, связывающие значения u и v в этих точках.

Во всех рассуждениях Риман опирался на так называемый принцип Дирихле: среди всех возможных функций, имеющих одинаковые граничные распределения в области G, та функция, которая доставляет

$$\min I = \min \iiint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz,$$

будет гармонической в заданной области. Это предложение Риман узнал, по-видимому, из лекций Дирихле. Однако оно было известно также Гауссу, Томсону, Кирхгофу в связи с решением задач математической физики (теория потенциала). Ему был придан вполне определенный физический смысл: интеграл I выражает кинетическую энергию установившегося течения однородной несжимаемой жидкости, где u — потенциал скоростей.

Пусть, например, задан двумерный случай: интеграл

$$\iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

определен для площади круга, причем задано непрерывное граничное распределение u. Этот интеграл неотрицателен. Тогда существует, по мнению Римана, неотрицательная нижняя грань значений интеграла, которая достигается. Тем самым утверждается существование функции u с заданным граничным распределением, сообщающей минимум данному интегралу. Для этой функции:

$$\delta \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = 0,$$

откуда как необходимое условие вытекает

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Однако Риман не смог дать доказательство существования функции u, обращающей интеграл I в минимум. Более того, Вейерштрасс, узнав о вышеуказанных рассуждениях Римана, привел пример множества допустимых (непрерывных, дифференцируемых, принимающих на границе заданные значения) функций, не включающего в себя функцию, соответствующую нижней грани. Таково будет, например, множество всех кривых с непрерывной кривизной, соединяющих точки A, C, B. Кратчайшей линией является ломаная ABC, не входящая в рассматриваемое множество, так как непрерывность кривизны нарушается в точке C (см. рис. 13 на стр. 239).

Римановы теоремы существования, возникшие из физических аналогий, сделавшись объектом споров, надолго повисли в воздухе. Они были доказаны Шварцем (1870) и Нейманом (1884) иными путями, а обоснованность суждений Римана удалось доказать лишь Д. Гильберту (1901—1909), применившему для этой цели прямые методы вариационного исчисления. В более общей форме этот вопрос был исследован Р. Курантом и Г. Вейлем.

Другая группа аналогий, введенных Риманом, имеет своим исходным пунктом геометрическую интерпретацию комплексных чисел и функций комплексного переменного. К тому времени уже было известно, что аналитические функции комплексного переменного определяют конформное отображение одной плоскости на другую, причем не обязательно взаимно однозначное. С этим пересекается представление об аналитической функции, получающейся из начального элемента непрерывными продолжениями, определяемыми уравнениями Даламбера—Эйлера. Возможное разнообразие продолжений, а также стремление преодолеть неоднозначность конформных отображений, по-видимому, привели Римана к идее специальных поверхностей, в необходимых случаях многолистных; за этими поверхностями укрепилось и до сих пор существует название римановых.

Факты теории функций комплексного переменного, будучи распространены на римановы поверхности, приобретают большую общность. Кроме того, Риман установил связь между обоими типами аналогий, использовав физическую интерпретацию для получения теорем существования для функций на замкнутых многолистных римановых поверхностях. Эти поверхности рассматриваются как однородные проводники. При подключении к ним батареи возникает поле, потенциал которого u однозначен, непрерывен и удовлетворяет уравнению $\Delta u=0$ на всей поверхности. Точки подсоединения батареи являются точками разрыва функции u, которая ведет себя в этих точках как $\ln r_1$ и $\ln r_2$ соответственно. Так, получается теорема существования: на всякой замкнутой римановой поверхности существует потенциальная функция u, всюду непрерывная, кроме двух заранее выбранных точек, где u делается логарифмически бесконечной. Мнимая часть v на данной римановой поверхности находится после соответствующих разрезов, обеспечивающих однозначность ветвей функции $u+iv$, что приводит к необходимости подсчета модулей периодичности.

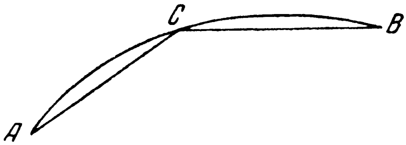

Рис. 13

Тот цикл работ Римана, который мы здесь рассматриваем, положил начало большой и важной области современной теории функций, известной ныне под объединяющим названием — геометрической. В этих работах содержится глубоко разработанная теория конформных отображений, в том числе основная теорема о существовании и единственности (при подходящих условиях) конформного отображения на круг произвольной односвязной области (граница которой содержит более одной точки).

В этих работах содержится ряд топологических по существу результатов, вроде теоремы, что число разрезов поверхности, необходимых для превращения ее в односвязную, не зависит от выбора системы разрезов. Через несколько десятков лет, на рубеже XIX и XX вв., топологические идеи Римана, не получившие у своего автора достаточно строгого оформления, влились в формирующуюся топологию.

Риману принадлежит другая замечательная идея о применении функции комплексного переменного

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

(широко теперь известной под названием: дзета-функция Римана) к определению количества простых чисел на заданном отрезке натурального ряда. Вместе с исследованиями Чебышева[1] результаты, полученные здесь Риманом, кладут начало аналитической теории чисел. Гипотезы Римана о свойствах дзета-функции, в особенности гипотеза, что все ее нетривиальные нули лежат на прямой $x = +\frac{1}{2}$, несмотря на огромные усилия, остались до сих пор недоказанными.

Наконец, мы не можем не обратить внимание читателей еще на один цикл работ Римана, идейно близких к его геометрической теории функций комплексного переменного. Речь идет об исследованиях различных классов функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с алгебраическими коэффициентами. Рассматривается семейство функций

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i.$$

Функции y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — аналитические во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа точек a_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$. При обходе около этих точек заданные функции подвергаются линейному преобразованию, тоже определенному для каждой точки. Затем рассматривается совокупность всевозможных замкнутых путей, не проходящих через точки a_j. Ей соответствует множество линейных преобразований заданного семейства функций — его группа монодромии. Задача состоит в том, чтобы, опираясь на эти соображения, построить дифференциальное уравнение, решениями которого были бы все функции заданного семейства.

---

[1] См. о них в главе XII.

Эти исследования Римана, хотя также незавершенные (их сумел завершить лишь в XX в. Д. Гильберт), дают основание считать его одним из основателей аналитической теории дифференциальных уравнений. Других идей и работ Римана мы здесь не сможем коснуться, чтобы не отойти слишком далеко от основного замысла настоящей главы.

Геометрическая теория функций комплексного переменного получила быстрое развитие тотчас после безвременной смерти Римана. Уже к концу 60-х годов прошлого века появилось большое количество работ, авторы которых разрабатывали отдельные аспекты теории функций комплексного переменного, отправляясь от идей Римана. Появившаяся в связи с этим необходимость возможно более полного изучения научного наследия Римана привела к появлению в 1876 г. собрания его сочинений, изданного Г. Вебером и Р. Дедекиндом. В 1902 г. появились важные добавления к этому собранию сочинений, подготовленные В. Виртингером и М. Нетером. На русском языке том сочинений Римана вышел в свет в 1948 г. Он был подготовлен В. Л. Гончаровым. К его содержательному обзору научных работ Римана и комментариям мы и отсылаем читателя.

Аналитическое направление развития теории функций комплексного переменного. Другое направление развития теории функций комплексного переменного в XIX в., за которым закрепилось в истории название «аналитическое», сформировалось в работах К. Вейерштрасса (1815—1897). В сферу научных интересов последнего входили преимущественно проблемы математического анализа: его классических основ, теории функций комплексного переменного, вариационного исчисления, дифференциальной геометрии. Для этой широкой области К. Вейерштрасс всю жизнь разрабатывал систему логического обоснования, опирающуюся на строгую теорию действительного числа как среды, в которой функционируют все основные понятия и методы. Именно в его лекциях был построен в основном современный стандарт строгости в математическом анализе и ставшая традиционной структура.

Те же цели строгого и систематического построения преследовал К. Вейерштрасс, создавая последовательно и настойчиво теорию функций. Уже в 1841 г. он сумел обобщить теорему Коши о разложении в степенной ряд функции комплексного переменного, непрерывной и дифференцируемой в кольце, образованном двумя концентрическими окружностями. Искомый ряд содержал члены с положительными и отрицательными степенями и был по существу рядом Лорана. Последний, как было отмечено выше, отыскал этот ряд в 1843 г., и историческая традиция сохранила за этим рядом его имя. Результаты же К. Вейерштрасса, долго не попадавшие в печать, были известны меньше. Они распространялись преимущественно через посредство слушателей его лекций. Около 1842 г. К. Вейерштрасс овладел идеей аналитического продолжения.

Однако в эти годы главные интересы К. Вейерштрасса сосредоточивались на изучении конкретных классов функций: эллиптических, гиперэллиптических и абелевых функций и сопредельных с ними вопросов. Общие концепции в теории функции комплексного переменного начали вырабатываться в лекциях, которые К. Вейерштрасс в течение долгих лет читал в Берлинском университете. Помимо лекций об эллиптических функциях, их приложениях к геометрическим и механическим задачам об абелевых функциях и вариационном исчислении начинают появляться его курсы по теории аналитических функций. С 1856 г. К. Вейерштрасс читал лекции о представлении функций сходящимися рядами, а с 1861 г. — об общей теории функций. Наконец, появились специальные сочинения К. Вейерштрасса: «К теории однозначных аналитических функций» (1876) и «К учению о функциях» (1880), в которых его теория аналитических функций приобрела известную завершенность.

В основе теории К. Вейерштрасса лежит понятие степенного ряда. Для него определяется круг сходимости и вводится определение равномерной сходимости. Далее рассматриваются лишь равномерно сходящиеся ряды. Относительно них последовательно доказаны теоремы: а) если ряд сходится равномерно в окрестности каждой точки, лежащей внутри или на границе данной области, то он сходится равномерно во всей области; б) если дана последовательность степенных рядов

$$P_0(x), \quad P_1(x), \quad P_2(x), \ldots$$

и две вещественные величины R и R', такие, что $0 \leqslant R \leqslant R'$ и $R \leqslant |x| \leqslant R'$, то для этих значений x ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)$$

равномерно сходится и существует

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k.$$

Затем вводится понятие элемента функции

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Для этого в области сходимости ряда К. Вейерштрасс выбирает точки a_0. В ее окрестности как функции f_k (x), так и F (x), выражаются степенным рядом.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x-a_0)^k = P_0(x-a),$$

который и получил у Вейерштрасса название элемента функции $F(x)$.

Пусть затем точка a_1 лежит в окрестности a_0 и $P_1(x—a_1)$ — соответствующий элемент функции $F(x)$. Для тех x, которые лежат как в окрестности a_0, так и в окрестности a_1, имеет место

$$P_1(x-a_1) = P_0(x-a_0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_0^{(\mu)}(a_1-a_0)\frac{(x-a_1)^{\mu}}{\mu!},$$

где

$$P_0^{(\mu)}(a_1-a_0) = \left[\frac{d^{\mu}P_0(x-a_0)}{dx^{\mu}}\right]_{x=a_1}.$$

Если a — произвольная точка в области сходимости, то между a_0 и a можно вставить последовательность точек: a_1 из окрестности a_0, a_2 — из окрестности a_1 и т. д. вплоть до a_n, попадающей уже в окрестность a. Для соответствующих элементов функции $F(x)$ имеют место:

$$P_1(x-a_1) = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_0^{(\mu)}(a_1-a_0)\frac{(x-a_1)^{\mu}}{\mu!};$$

$$P_2(x-a_2) = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_1^{(\mu)}(a_2-a_1)\frac{(x-a_2)^{\mu}}{\mu!};$$

. . . .

$$P(x-a)=\sum_{\mu=0}^{\infty} P_n^{(\mu)}(a-a_n)\frac{(x-a)^{\mu}}{\mu!}.$$

Таков же алгоритм образования по произвольному элементу в области сходимости всякого другого элемента $F(x)$ в той же области.

Может случиться, что область сходимости ряда $P(x-a)$ будет выходить из первоначальной. Тогда из $P_0(x-a_0)$, применяя указанный алгоритм, можно образовать множество рядов, область сходимости которых выходит за пределы первоначальной. Так строится полная аналитическая функция $F(x)$, как совокупность всех продолжений какого-либо элемента. Затем проводятся исследования: особых точек на границах круга сходимости, однозначности и многозначности функций, поведения целой функции в бесконечности, разложения функции в произведение и других конкретных вопросов теории. Аппарат отличается единообразием; это — степенные ряды, операции с ними, оценки, зачастую весьма тонкие.

Вслед за работами К. Вейерштрасса, в течение последней четверти XIX в., появилось большое количество работ по аналитической теории функций комплексного переменного. Среди них видное место занимают работы учеников Вейерштрасса — С. В. Ковалевской и Миттаг-Леффлера, а также Ш. Эрмита, Э. Пикара, Э. Лагерра, А. Пуанкаре и др. Лекции Вейерштрасса послужили на много лет прообразом учебников по теории функций комплексного переменного, которые начали появляться с тех пор довольно часто.

Превращение теории функций комплексного переменного в комплекс аналитических дисциплин. В конце XIX в. теория функций комплексного переменного чрезвычайно разветвилась, превратившись в обширный комплекс дисциплин. В нее теперь входит геометрическая теория функций, основанная на теории конформных отображений и римановых поверхностей. Получили цельную форму теории различных видов функций: целых и мероморфных, эллиптических и модулярных, автоморфных, гармонических, алгебраических. В тесной связи с последним классом функций развилась теория абелевых интегралов. К этому комплексу примыкала создающаяся аналитическая теория дифференциальных уравнений и аналитическая теория чисел. Теория аналитических функций установила и укрепила связи с другими математическими дисциплинами.

Изменился за это время и характер научных исследований в области теории функций комплексного переменного. Вначале, как было показано выше, большинство этих исследований проводилось в плане развития одного из трех направлений: теории моногенных или дифференцируемых функций Коши, геометрических и физических идей Римана, аналитического направления Вейерштрасса. Лишь постепенно различия и связанные с ними споры преодолеваются. На рубеже XX в. появляется и быстро растет число работ, в которых осуществляется синтез, казалось бы разнородных, идей и методов. Создается единая, общая концепция теории функций комплексного переменного, находящая свое выражение в структуре монографий, учебников и в характере методов исследования. Одним из основных понятий, на котором явно обнаружились связь и соответствие геометрических представлений и аппарата степенных рядов, было понятие аналитического продолжения. Из многочисленных примеров, которые можно было бы привести в подтверждение этого тезиса, наиболее ярким является работа Адамара — «Ряд Тейлора и его аналитическое продолжение» (1901). В ряде работ Пуанкаре, Клейна и Кёбе была показана связь геометрии Лобачевского с римановыми поверхностями и значение неевклидовой геометрии в изучении этих поверхностей и свойств связанных с ними аналитических функций.

Ф. Клейн развил физические интерпретации функций комплексного переменного в работе «О римановой теории алгебраических функций и их интегралах» (1881). Огромную роль в истории аналитических функций сыграли труды Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, открывшие необозримую область ее приложений в аэро- и гидромеханике. Аналитическая теория дифференциальных уравнений явилась своеобразным поставщиком различных специальных функций, разрабатываемых средствами теории аналитических функций: модулярные функции Эрмита, автоморфные — Клейна и Пуанкаре, функции Шварца и т. д. При построении аналитической теории дифференциальных уравнений широко использовались материалы из разных областей теории аналитических функций. Так поступал, например, Фукс — ученик Вейерштрасса.

В теорию аналитических функций в качестве элементов единой основы был внесен ряд понятий из теории множеств Кантора, из теории функций действительного переменного (К. Жордан, Э. Борель, А. Лебег, Т. Стильтьес, Р. Бэр), теории групп и топологии. Совокупность основных понятий, таких, как область, ее граница, предел, связность, сходимость аналитичность, непрерывность и др., подверглась глубокому логическому анализу и уточнению, что укрепляло единство воззрений на все вопросы теории.

Общая теория функций комплексного переменного проникла и в педагогическую практику, породив два типа учебников: а) книги, специально посвященные этому вопросу; б) общие курсы математического анализа, куда эта теория входит как составная часть. Учебники второго типа к началу XX в., по-видимому, преобладали. Примером могут служить курсы Бертрана, Пикара и, наконец, Гурса, который в «Курс математического анализа» (1902) включил теорию аналитических функций (второй том, первая часть).

Позднее, с расширением учебных программ в части, относящейся к рассматриваемой теории, оба типа учебной литературы получили равные права и применяются в зависимости от общих задач данного учебного заведения.

17 Зак. 335