ГЛАВА XI

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ В XIX в.

Геометрические науки к началу XIX в. Геометрия к началу XIX в. представляла уже большой комплекс дисциплин, выросших из анализа и обобщения данных о пространственных формах тел, использующих методы других областей математики и в силу этого тесно переплетенных с ними. Помимо элементарных частей в геометрию входили почти все те части, которые и ныне составляют структуру ее высших областей, развитие которых является актуальной задачей современной математики.

Аналитическая геометрия, возникшая еще в XVII в., завершила большой путь развития и определила свое место как часть геометрии, изучающая фигуры и преобразования, задаваемые алгебраическими уравнениями с помощью координатного метода и использующая методы алгебры. Помимо ее учебной и прикладной роли в ней самой наметились тенденции развития, состоящие в усовершенствовании и обобщении координатного метода, а также в усилении аналитичности при исследовании геометрических образов, что особенно важно для приложений. Первая из этих тенденций нашла, как известно, воплощение во введении различных избыточных координат. Мы имеем в виду однородные координаты, представляющие отношения двух переменных к третьей, проективные, т. е. линейные, комбинации однородных координат, введенные Г. Дарбу тетрациклические и пентасферические координаты и др. Вторая из тенденций привела к включению в аналитическую геометрию векторных методов.

Дифференциальная геометрия заняла, как было показано в главе V, видное место в геометрии к концу XVIII в. Характерное для этой части геометрии использование понятий и методов дифференциального исчисления обусловило прочные и далеко идущие связи ее с математическим анализом и с многочисленными прикладными задачами. В начале XIX в. для дифференциальной геометрии раскрылись новые возможности развития, благодаря введению Гауссом (1824) внутренней геометрии поверхностей. В процессе создания общей теории поверхностей дифференциальная геометрия приобрела новые связи, преимущественно с неевклидовыми геометриями.

Казалось бы, приостановившиеся в своем развитии со времен Дезарга и Паскаля методы изучения свойств фигур, инвариантных относительно проектирования, в 20-х годах XIX в. сформировались в работах Ж. Понселе и др. в новую область геометрии — проективную геометрию. Выделение проективных свойств фигур в отдельный класс и установление соответствий между метрическими и проективными свойствами явились предметом многих исследований, осуществлявшихся как синтетическими методами (Штейнер, Шаль, Штаудт и др.), так и аналитическими (Мёбиус, Штуди, Картан и др.). В систему современной геометрии проективная геометрия вошла как часть, обладающая высокой общностью, могущая включить в единую систему многие геометрические теории. Такому положению проективная геометрия обязана влиянию геометрии Лобачевского и последующих исследований А. Кэли и Ф. Клейна.

Изменения, внесенные в геометрию со стороны указанных ее областей, весьма значительны. Однако коренная перестройка всего содержания геометрии и ее структуры определялась не этими изменениями. Принципиально новое содержание было внесено в нее геометрией Лобачевского. Поэтому мы в основном и посвятим дальнейшее изложение истории открытия геометрии Лобачевского и вообще неевклидовых геометрий, а также их влиянию на формирование современной геометрии.

Открытие геометрии Лобачевского и ее некоторые характерные особенности. Создатель неевклидовой геометрии Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) родился в Нижнем Новгороде (ныне г. Горький) в семье бедного чиновника. Он окончил Казанский университет (1811) и работал в нем много лет. Вскоре (с 1816 г.) он был уже профессором, а еще через несколько лет — ректором (с 1827 до 1846 г.) этого университета. Благодаря его усилиям Казанский университет превратился, невзирая на неблагоприятную обстановку того времени, в первоклассное учебное заведение. Много сил Н. И. Лобачевский потратил на улучшение деятельности школ.

Мировоззрение Лобачевского было материалистическим. Во взглядах на основные понятия математики, в частности геометрии, он твердо подчеркивал их материальное происхождение, рассматривая их как отражения реально существующих отношений вещей действительного мира. Математические абстракции не могут рождаться по произволу, они появляются как результат взаимоотношений человека с материальным миром. Научное познание имеет единственную цель: изучение реального мира. Критерием истинности научного познания является, по Лобачевскому, практика, опыт.

Математиком он был широким. Его научное наследие включает в себя серьезные работы по алгебре («Алгебра или вычисление конечных», 1834 и др.) и математическому анализу («Об исчезновении тригонометрических строк», 1834; «О сходимости бесконечных рядов», 1841; «О значении некоторых определенных интегралов», 1852 и др.). Он первый ввел различие между непрерывностью и дифференцируемостью функций, нашел метод численного решения алгебраических уравнений, известный под его именем, и др. Однако наивысшую, можно сказать бессмертную, славу Лобачевский заслужил своими работами по геометрии.

Отправным пунктом исследований Лобачевского по неевклидовой геометрии была аксиома о параллельных. Как известно, дедуктивно построенная система евклидовой геометрии опирается на некоторую совокупность аксиом. Как показал позднее Д. Гильберт, эти аксиомы вводят различные аспекты понятий: соединения или принадлежности, порядка, движения или конгруэнтности, непрерывности и параллельности [1]. Последняя из этих аксиом (фигурирующая в «Началах» Евклида в качестве пятого постулата) стоит как бы особняком. За ней в силу сложности формулировки не было признано свойство очевидности, и в течение многих веков предпринимались попытки дать ее доказательство, разумеется, безуспешные.

Геометрия, в зависимости от того, используется ли аксиома о параллельных или нет, делится на две части. Та часть, куда входят предложения, не опирающиеся на эту аксиому,

[1] См. К. А. Рыбников. История математики, ч. 1, стр. 41—42.

Н. И. Лобачевский
1792—1856

носит название абсолютной геометрии. Лобачевский, который вначале пытался дать доказательство упомянутой аксиомы, вскоре убедился в возможности расчленения геометрии на абсолютную и неабсолютную и осуществил его. Вслед за этим он попробовал заменить аксиому о параллельных ее отрицанием: он предположил, что через точку, не лежащую на данной прямой, может проходить более чем одна прямая, лежащая в одной плоскости с прямой и не пересекающаяся с ней при продолжении. При этом он обнаружил, что формального противоречия не получается, а система выводов складывается в новую геометрию, отличную от евклидовой, но столь же логически строгую и последовательную, несмотря на непривычность, странность ее утверждений.

День рождения неевклидовой геометрии настал. 11(23) февраля 1826 г. на заседании отделения физико-математических наук Казанского университета Лобачевский доложил о своем сочинении: «Сжатое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». Через три года, в 1829 г., он издал это сочинение в расширенном виде под названием: «О началах геометрии». В последующем, в течение всей жизни, Лобачевский развивал свою новую геометрию, опубликовав ряд работ: «Воображаемая геометрия» (1835; немецк. 1837), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836), «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1838; немецк. 1840), «Пангеометрия» (1855).

Попытки доказать аксиому о параллельных приведением к противоречию имели место и до работ Лобачевского. Саккери (1733) даже получил ряд предложений, которые затем ошибочно признал противоречивыми, а следовательно, аксиому о параллельных — доказанной. И. Ламберт около 1766 г. (опубликовано в 1786 г.), следуя по тому же пути, не смог ни примириться с получающейся системой выводов, ни опровергнуть ее. Аналогичные исследования предпринимали Ф. Швейкарт (1818) и Ф. Тауринус (1825). Однако только венгерский математик Я. Больяи (1802—1860) ясно выразил ту же мысль, что и Лобачевский, и к 1832 г., независимо от последнего, развил систему неевклидовой геометрии, выпустив сочинение: «Аппендикс, т. е. приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную». После смерти Гаусса (1855) выяснилось, что он тоже открыл начальные факты геометрии Лобачевского, но молчал о них, из боязни уронить свою научную репутацию. Он даже не решился поддержать молодого Я. Больяи, когда тот прислал ему свою работу. Подлинное мужество ученого, свойственное Лобачевскому, особенно ярко проявилось в обстановке непризнания и нападок, созданной вокруг его работ, и не преодоленной им до самой смерти.

Геометрия Лобачевского в абсолютной своей части не отличается по существу от геометрии Евклида. В той же части, которая использует аксиому о параллельных, дело обстоит иначе. К этой части относятся теоремы о: а) расположении параллельных прямых; б) сумме углов в треугольниках и многоугольниках; в) площадях; г) вписанных в окружность и описанных многоугольниках; д) подобии и конгруэнтности фигур; е) тригонометрии; ж) теореме Пифагора; з) измерении круга и его частей. В этих пунктах двумерная геометрия Лобачевского отличается от евклидовой планиметрии. Рассмотрим конкретнее некоторые особенности геометрии Лобачевского.

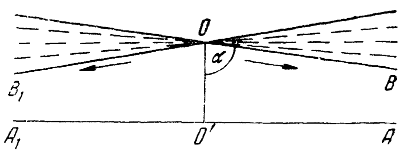

Рис. 14

Допущение, что через точку O вне прямой можно провести больше одной прямой, не встречающейся с данной, приводит к выводу, что таких прямых бесконечно много. Они образуют пучок. В пучке этих прямых есть две крайние прямые: OB и OB_1. Они и называются параллельными прямой O_1A. Теперь возникает необходимость ввести направление параллельности. В направлении параллельности прямые сближаются, в противоположном — удаляются. Угол параллельности α зависит от расстояния между параллельными, т. е. от длины соответствующего перпендикуляра x, следующим образом:

$$\alpha = \pi(x); \quad \operatorname{tg}\frac{\pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}},$$

где k — постоянная, зависящая от выбора единицы длины. Если $x \to 0$, то $\pi(x) \to \frac{\pi}{2}$; в случае же $x \to \infty$ $\pi(x) \to 0$. Наконец, прямые, имеющие общий перпендикуляр, расходятся в обе стороны.

Вслед за тем оказывается, что сумма углов треугольника меньше $2d$. При увеличении сторон треугольника эта сумма уменьшается. Аналогичные суждения справедливы и для многоугольников. Вследствие этого стало необходимым выдвинуть еще один признак равенства треугольников, исходя из равенства трех пар соответствующих углов.

Площади всех треугольников образуют множество с верхней гранью $c \cdot \pi$, где c — постоянная, зависящая от выбора единицы измерения площадей, равная отношению площади треугольника к его дефекту (разности суммы внешних углов треугольника и $4d$). В геометрии Лобачевского не существует подобных треугольников и многоугольников. Допущение подобия эквивалентно постулату Евклида о параллельных. Длина окружности l растет быстрее радиуса r и равна

$$l = \frac{\pi}{k}(e^{kr} - e^{-kr}).$$

Дальнейшее развитие геометрии Лобачевского связано с введением пучков прямых: сходящихся, расходящихся и параллельных. Относительно пучков прямых вводятся циклы

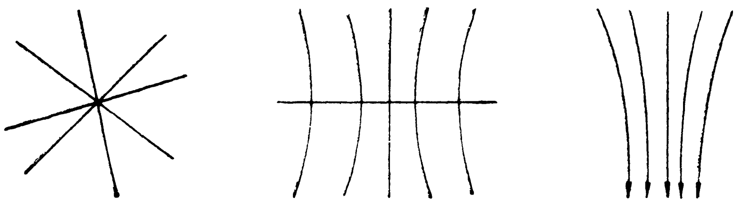

Рис. 15

(иначе называемые c-линиями, или основными линиями). Это — геометрические места точек, являющиеся ортогональными траекториями пучка прямых. Их положение определяется начальной точкой, выбранной на одной из прямых пучка. Эти циклы для трех видов пучков соответственно называются: окружность, эквидистанта (или гиперцикл) и орицикл (образ предельной окружности при $R \to \infty$). Соответствующие пространственные образы, образованные вращением циклов вокруг избранной прямой, соответственно будут: сфера, гиперсфера, орисфера. Лобачевский установил, что на орисфере, если прямые заменить орициклами, осуществляется планиметрия Евклида и тригонометрия.

Во все соотношения геометрии Лобачевского входит единица длины (масштаб), а углы и длины зависят друг от друга. Единицей длины является OR — длина абсолютной дуги орицикла (рис. 16). Это — дуга, отсчитываемая от избранной точки О на одной из параллельных прямых пучка до R —

пересечения орицикла с прямой пучка, параллельной касательной к орициклу в точке O. В настоящее время отрезок, равный по длине абсолютной дуге, называют также радиусом кривизны пространства Лобачевского.

Аппарат вычислений в геометрии Лобачевского основывается на оперировании с гиперболическими функциями. Например, теорема, аналогичная теореме синусов для треугольника, в геометрии Лобачевского приобретает вид:

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh} ka} = \frac{\sin\beta}{\operatorname{sh} kb} = \frac{\sin\gamma}{\operatorname{sh} kc}.$$

Вся тригонометрия оказалась в основном тригонометрией гиперболических функций. Совокупность ее формул оказалась подобной совокупности формул сферической тригонометрии в системе Евклида, но для сферы мнимого радиуса Ri. Вслед за тригонометрией Лобачевский разработал в своей системе аналитическую и дифференциальную геометрии.

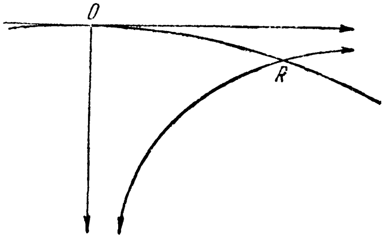

Рис. 16

В сочинениях Лобачевского была построена система, не содержащая логических погрешностей и столь же богатая фактами, как и геометрия Евклида. Тем самым было показано, что мыслима не только одна система геометрии и что другие системы можно получать путем видоизменений и обобщений основных положений геометрии Евклида. Однако прием, оказанный геометрии Лобачевского, был более чем обескураживающим. На его сочинения академики (в том числе Остроградский) давали отрицательные отзывы, в печати появились пасквили на Лобачевского. Требовалось незаурядное мужество и вера в научную достоверность и значимость своих исследований, чтобы противостоять этому. Лобачевский проявил необходимые качества, боролся настойчиво, но умер в 1856 г. непонятым и непризнанным.

Проблема интерпретации геометрии Лобачевского и геометрических систем вообще. Задача, которую не смог решить Лобачевский, — это задача обоснования новой геометрии. Можно сколь угодно далеко идти по пути накопления ее фактов, но не получить уверенности: а) в строгости ее логической основы; б) в ее значимости для практических приложений; в) относительно ее места в науке. Лобачевский заметил, что для бесконечно малых размеров его геометрия превращается в евклидову. Кроме того, сходство тригонометрических соотношений в обеих геометриях позволяло надеяться на скорое открытие связей между ними.

Путь Лобачевского в решении проблемы обоснования — поиски материальных объектов, для которых осуществлялась бы его геометрия. Вспомогательный путь приложения фактов геометрии к математическому анализу, в особенности к вычислению трудных интегралов, был также использован Лобачевским). Но вернемся к основным попыткам. Требуется, скажем, измеряя углы треугольников, обнаружить, отличается ли их сумма δ от $2d$, т. е. обнаружить дефект $\delta=2d-\sigma$. Лобачевский доказал, что этот дефект должен быть прямо пропорционален площади треугольника S и обратно пропорционален квадрату радиуса кривизны пространства, т. е.

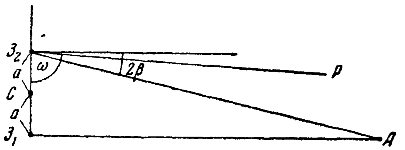

Рис. 17

$$\delta = \frac{S}{r^2}.$$

Чтобы дефект был заметен, надо выбирать треугольники самых больших размеров. Поэтому Лобачевский занялся непосредственным измерением космических треугольников.

С положения $З_1$ земли на орбите фиксируется некоторая звезда A, которая выбрана так, чтобы

$$\angle CЗ_1A = \frac{\pi}{2}.$$

Если фиксировать ту же звезду A из противоположной точки $З_2$ орбиты, то $\angle CЗ_2A = 2d - 2\beta$. Величина β есть параллакс звезды, измеряемый обычно с большой точностью. Если космическое пространство имеет геометрию Лобачевского, то угол параллельности ϖ будет возможно определить. Однако все измеренные отклонения неизменно оказывались в пределах точности наблюдения, и эксперимент Лобачевского не удался.

Это теперь не представляется удивительным. Известно, что в 1931 г. Шиллинг доказал, что современные средства астрономической техники не могут ни доказать, ни опровергнуть предположения Лобачевского о геометрии космического пространства, если допустить, что радиус кривизны пространства превышает 60 световых лет. Неутешительные данные наблюдательной астрономии дополняет общая теория относительности, которая для изотропного мира дает значение радиуса кривизны $1{,}8 \cdot 10^9$ световых лет. Если же учесть, что геометрия космического пространства тесно связана с распределением и движением масс, заполняющих его и обладающих свойствами притяжения, то эта геометрия примет весьма сложную форму.

Тем не менее, несмотря на неудачи с экспериментом, Лобачевский находился на верном пути. Его идея — это идея интерпретации: данные всякой теории должны проверяться опытом. Геометрия Евклида возникла как обобщение многовекового опыта людей и подтверждена практикой. Возможная конструкция, созданная Лобачевским, должна опереться на систему реально существующих объектов, чтобы быть признанной непротиворечивой.

Как это часто бывает в истории математики, разгадка находилась рядом; математики уже имели все необходимое, чтобы решить проблему интерпретации геометрии Лобачевского. Необходимо было лишь привлечь данные теории поверхностей.

Мы уже упоминали, что дифференциальная геометрия в начале XIX в. получила новую область распространения в теории поверхностей. В трудах Гаусса, особенно в его «Рассуждении о кривых поверхностях», была построена внутренняя геометрия поверхностей. Для этого Гаусс использовал криволинейные координаты u и v на поверхности. Линейный элемент (дифференциал дуги)

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

и гауссова кривизна $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ дали возможность найти все элементы поверхности. Факты внутренней геометрии оказались инвариантными относительно изгибания поверхностей, т. е. таких деформаций последней, при которых линейный элемент остается инвариантным. С тех пор более столетия проблемы изгибаний и внутренней геометрии поверхностей являются важнейшими проблемами дифференциальной геометрии.

Около 1840 г. Ф. Миндинг, профессор университета в Дерпте (Тарту), изучал поверхности постоянной гауссовой кривизны. Среди поверхностей постоянной отрицательной кривизны он особо выделил поверхность вращения трактрисы

$$y = \pm \left[\sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right],$$

т. е. кривой, у которой длина отрезка a касательной от точки касания до базы OY постоянна. Кривизна этой поверхности:

$$K = -\frac{1}{a^2},$$

за что она названа псевдосферой.

Миндинг показал, что для любого треугольника, сторонами которого являются геодезические линии на поверхности постоянной кривизны K, имеет место соотношение:

$$\operatorname{ctg} A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos \sqrt{k} \cdot b = \operatorname{ctg} \sqrt{k}\, a \cdot \sin \sqrt{k}\, b.$$

В случае $K>0$ это одна из формул сферической тригонометрии. Если же $K<0$, то после подстановки $\sqrt{K} = \frac{1}{ri}$ вследствие

$$\sin ix = i \operatorname{sh} x, \quad \cos ix = \operatorname{ch} x$$

формула получает вид

$$\operatorname{ctg} A \cdot \sin C + \cos C \cdot \operatorname{ch} \frac{b}{r} = \operatorname{cth} \frac{a}{r} \cdot \operatorname{sh} \frac{b}{r}.$$

Из этой формулы можно вывести остальные формулы гиперболической тригонометрии. Тригонометрия геодезических треугольников на поверхности постоянной отрицательной кривизны оказалась гиперболической тригонометрией.

За пять лет до выхода этой работы Миндинга, в 1835 г., Лобачевский в «Воображаемой геометрии» показал, что требование аксиомы параллельности можно свести к вопросу о справедливости соотношений гиперболической тригонометрии. Результат Миндинга означал по существу, что внутренняя геометрия псевдосферы изоморфна планиметрии Лобачевского. Однако ни Миндинг, ни Лобачевский этого не заметили.

Обнаружил этот факт впервые итальянский геометр Е. Бельтрами. Он внимательно изучал сочинения Лобачевского по французским и итальянским переводам. При этом он увидел, что результаты одного его дифференциально-геометрического исследования содержат искомую интерпретацию геометрии Лобачевского.

Бельтрами исследовал задачу картографии: отобразить поверхность на плоскость таким образом, чтобы все геодезические линии на поверхности изображались прямыми на плоскости. Он установил, что такое отображение можно установить для сфер и для поверхностей постоянной отрицательной кривизны, а также обнаружил среди последних

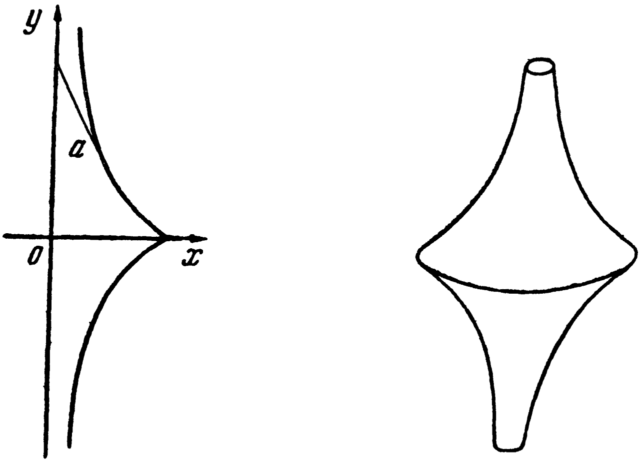

Рис. 18

псевдосферу. Линейные элементы (основные метрические формы) плоскости Лобачевского и псевдосферической поверхности оказались выраженными одной и той же формулой. Это означало, что внутренняя геометрия псевдосферы изоморфна внутренней геометрии гиперболической плоскости Лобачевского. Образом прямых Лобачевского явились геодезические на поверхности, а движения интерпретировались изгибаниями поверхности на себя.

Бельтрами опубликовал свои результаты в 1868 г. в статье: «Опыт истолкования неевклидовой геометрии». Это была первая интерпретация геометрии Лобачевского. Она произвела большое впечатление. После нее положение этой части геометрии изменилось. Сомнения в ее непротиворечивости отпали, так как плоскость Лобачевского интерпретировалась на поверхности евклидова пространства. Однако интерпретация была неполной, так как поверхность псевдосферы отображает лишь часть плоскости Лобачевского, что легко заметить на рисунке. Очевидно также, что никакие комбинации бельтрамиевых поверхностей не устраняют неполноту.

Бельтрами смог таким образом доказать непротиворечивость геометрии Лобачевского лишь для некоторой ограниченной части плоскости. Остался открытым вопрос об интерпретации всей плоскости Лобачевского. Только в 1901 г.

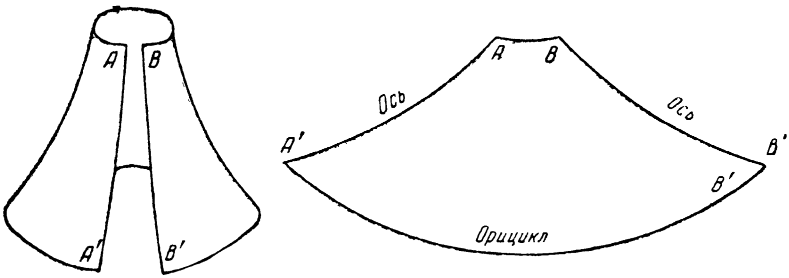

Рис. 19

Д. Гильберт доказал, что в трехмерном пространстве не существует аналитической поверхности постоянной отрицательной кривизны, не имеющей нигде особенностей и повсюду регулярной. Поэтому осуществить интерпретацию типа Бельтрами всей плоскости Лобачевского невозможно.

Следующая по времени интерпретация, проведенная в 1871 г. Ф. Клейном в работе «О так называемой неевклидовой геометрии», основывается на введенном Кэли проективном мероопределении на плоскости. Кэли ввел это понятие в 1859 г. в «Шестом мемуаре о формах» следующим образом: Формы — это однородные многочлены. Для геометрического истолкования теории форм Кэли привлек аналитическую геометрию проективного пространства, построенную Плюккером. С бинарной формой он связал систему точек прямой, однородные координаты которых обращают эту форму в нуль. Аналогично, тернарная форма представляется кривой проективной плоскости; если эта форма квадратична, соответствующая кривая есть коническое сечение. Затем Кэли фиксирует одну из бинарных квадратичных форм и пару точек, соответствующую ей на прямой. Его определение абсолюта по существу вводит его как образ, относительно которого рассматриваются автоморфизмы. Для определения расстояния между двумя точками Кэли строит ангармоническое отношение этих двух точек и точек абсолюта. Логарифм ангармонического отношения и есть, по Кэли, расстояние. На плоскости абсолютом является кривая второго порядка; ее пересечение с любой прямой плоскости определит на ней абсолют проективной метрики.

Клейн в упомянутой выше работе доказал, что проективная метрика Кэли, определяемая действительной кривой второго порядка, совпадает с метрикой пространства постоянной отрицательной кривизны. Теперь Клейн может (и он именно это делает) отобразить плоскость Лобачевского на внутренность абсолюта, например, внутрь круга. Точки плоскости отображаются во внутренние точки абсолюта, прямые переходят в хорды без конечных точек, параллельные прямые — в хорды с общим концом. Движение — проективное преобразование, переводящее круг сам в себя и хорды — в хорды. Расстояние, как и у Кэли,

$$AB = \ln\left(\frac{AN}{AM} \cdot \frac{BM}{BN}\right).$$

В пространстве используется проективное отображение на внутренность сферы. Геометрия Лобачевского интерпретируется через посредство абсолюта Клейна (рис. 20). Напри-

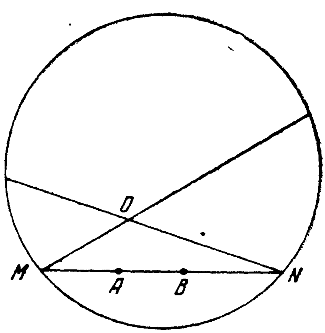

Рис. 20

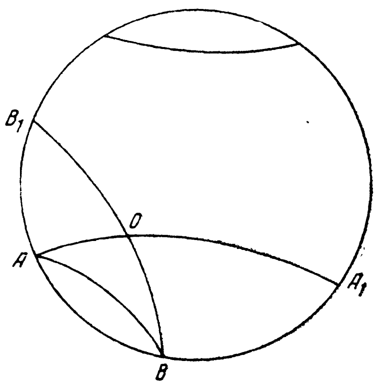

Рис. 21

мер, из точки O оказывается возможным провести две прямые OM и ON, не пересекающиеся с данной прямой MN и тем самым параллельные ей в смысле Лобачевского. Геометрия Лобачевского оказывается с этих позиций геометрией подгруппы всех проективных преобразований, при которой абсолют отображается сам в себя. Модель Клейна явилась долгожданным полным доказательством непротиворечивости геометрии Лобачевского и наличия у нее реального смысла.

После этой работы Клейна появились и продолжают появляться новые интерпретации, обнаруживая новые связи геометрии Лобачевского с другими областями математики. Приведем для примера модель А. Пуанкаре, предложенную им в 1882 г. в связи с задачами геометрической теории функций комплексного переменного. Плоскость Лобачевского изображается тоже внутренностью круга (рис. 21), прямые — дугами окружностей, перпендикулярными данной окружности, и диаметрами. Движения интерпретируются комбинациями инверсий. Мы здесь имеем в виду гиперболическую инверсию, т. е. такие преобразования точек плоскости относительно окружности с центром O и радиусом r, когда каждой точке M на луче OM ставится в соответствие точка M', такая, что $OM \cdot OM' = r^2$ [1].

Разработка принципов классификации геометрических теорий. Наличие интерпретаций означало доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Точнее говоря, этим была доказана возможность сведения указанной проблемы к вопросу о непротиворечивости геометрии Евклида, а через нее к данным опыта. В свою очередь определившаяся равноправность по крайней мере двух геометрий —евклидовой и Лобачевского — повела: а) к появлению других различных геометрических систем; б) к необходимости выработать единые принципы классификации этих систем; в) к разработке аксиоматического метода и укреплению его положения как важнейшего метода всей геометрии и вообще математики современности.

Ф. Клейн внес в классификацию систем геометрии идеи теории групп. Коротко говоря, он отметил, что все движения, рассматриваемые в геометрии, образуют группу: произведение двух движений есть движение, каждое движение можно сопоставить с обратным ему движением. Геометрия Евклида и геометрия Лобачевского имеют разные группы движений. Если поставить вопрос более общим образом, то оказывается, что геометрия пространства характеризуется свойствами группы движений этого пространства. Именно: движение есть такое преобразование, которое позволяет сравнивать фигуры с одинаковыми свойствами. Таким об-

[1] См. Б. А. Розенфельд. Интерпретация геометрии Лобачевского. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. IX. Гостехиздат, М., 1956, стр. 169—208.

разом, выделяется совокупность свойств пространственных объектов, инвариантных относительно движения. Наука об этих свойствах и является геометрией.

Эти воззрения были изложены и развиты Ф. Клейном в речи, прочитанной им в 1872 г. при вступлении на кафедру в немецком городе Эрлангене. При опубликовании она носила название «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» Однако в дальнейшем она сделалась гораздо более известной математикам как «Эрлангенская программа Ф. Клейна».

По Ф. Клейну, для построения геометрии необходимо задать: а) некоторое многообразие элементов; б) группу преобразований, дающую возможность отображать элементы заданного многообразия друг на друга. Геометрия должна будет изучать те отношения элементов, которые инвариантны при всех преобразованиях данной группы.

С этих позиций возможны, например, следующие геометрии: а) геометрия Евклида, изучающая инварианты перемещений; б) аффинная геометрия, объектом изучения которой являются инварианты так называемых аффинных преобразований:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1;$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2$$

при условии:

$$\det = \begin{vmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(в частном случае, когда $\det = \pm 1$, получаются ортогональные преобразования метрической геометрии); в) проективная геометрия, т. е. наука об инвариантах дробно-линейных преобразований

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3};$$
$$y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3},$$

$$\det = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

При такой постановке вопроса геометрия Лобачевского трактуется как часть проективной геометрии, где изучаются инварианты подгруппы проективных преобразований, переводящей в себя точки некоторой окружности.

В классификацию Клейна помимо указанных входят многие другие геометрические системы. Например, конформная геометрия, охватывающая группу таких преобразований, которые переводят круги в круги, а также сохраняют углы. Другим примером может служить топология — геометрия групп непрерывных преобразований, т. е. таких, при которых сохраняется бесконечная близость точек.

Скоро будет сто лет, как идея Клейна о том, что геометрию можно строить на любом многообразии, в котором установлена группа преобразований, является руководящей не только в целях классификации геометрических теорий, но и для построения новых систем геометрии. Однако она не является единственной. В середине XIX в. появился еще один общий принцип рассмотрения геометрических теорий. Это был принцип, который мы условимся впредь называть метрическим. Впервые он изложен в общем виде в 1854 г. Риманом в ставшей впоследствии знаменитой лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (опубликовано в 1867 г.).

Исходные идеи геометрических исследований Римана в первом приближении таковы. Для построения геометрической теории необходимо задать: а) многообразие элементов; б) координаты этих элементов (в общем случае n); в) закон измерения расстояний между бесконечно близкими элементами многообразий. Последний задается исходя из предпосылки, что геометрическое пространство в бесконечно малых частях евклидово. Это означает, что в самом общем виде задан линейный элемент дуги, определяемый дифференциальной квадратичной формой

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Здесь

$$g_{ik} = g_{ik}(x_1, \ldots, x_n);$$

$$g_{ik} = g_{ki}; \quad ds^2 \geqslant 0.$$

Указанная форма, очевидно, является обобщением гауссовой квадратичной формы во внутренней геометрии поверхностей:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Движения определены как преобразования, относительно которых линейный элемент ds инвариантен. Отсюда:

$$\sum_{i,k} g_{ik}\,dx_i\,dx_k = \sum_{i,k} g'_{ik}\,dx'_i\,dx'_k.$$

Вслед за ds остаются в этом случае инвариантными длина кривой и другие соотношения, относящиеся к так называемой метрике пространства. Само понятие пространства, вслед за столь широким обобщением понятия расстояния между двумя точками, приобрело весьма общую трактовку (например, пространство цветов, фазовое пространство и т. д.). Это понятие быстро эволюционировало вплоть до современного представления о римановых пространствах как общих дифференциально-геометрических многообразиях с необходимыми уточнениями. Теория римановых пространств носит в настоящее время название римановой геометрии.

Риман не создал аналитического аппарата, адекватного столь широко задуманной на основе метрического принципа геометрии. Лишь к началу XX в., когда в трудах итальянских математиков Р. Риччи-Курбастро и Т. Леви-Чивита оформилось тензорное исчисление как синтез теории алгебраических форм и теории квадратичных дифференциально-геометрических форм, оказалось, что оно является наиболее удобным аппаратом для разработки проблем римановой геометрии. Широкие обобщения понятия расстояния между двумя элементами и соответственно всех метрических суждений привели к введению понятия метрического пространства. Более узкая постановка вопроса в плане выяснения возможных разновидностей неевклидовой геометрии — геометрии пространств постоянной положительной кривизны — получила название геометрии Римана.

Становление аксиоматического метода в геометрии. Идея Лобачевского о том, что логически мыслима не одна геометрия Евклида, получила во второй половине XIX в. подтверждение; возникли многочисленные геометрические системы. Воплотилась в жизнь в виде разнообразных интерпретаций, а затем и приложений и другая его идея — что истинность геометрии проверяется лишь опытом и что расширяющийся опыт потребует введения не только евклидовой геометрии. Истинная природа пространства может оказаться и неевклидовой.

Третья большая идея Лобачевского, как было указано, состояла в том, что новые геометрии могут быть построены путем видоизменения и обобщения системы аксиом и вообще исходных положений евклидовой геометрии. Эта идея повлекла целую серию исследований по основаниям геометрии. Еще в 1866 г. Г. Гельмгольц ввел движение в качестве основного понятия геометрии. Г. Кантор (1871) и Р. Дедекинд (1872) исследовали аксиому непрерывности. Паш (1882), добиваясь решения проблемы включения метрической геометрии в проективную, глубоко исследовал две группы аксиом: порядка и принадлежности (по позднейшей классификации аксиом, осуществленной Д. Гильбертом). Вслед за Пашем эти группы аксиом исследовали Д. Пеано (1889) и Пиери (1899). Наконец, в 1899 г. появилось первое издание «Оснований геометрии» Д. Гильберта, в котором впервые была изложена полная и достаточно строгая система аксиом геометрии.

Таким образом, к концу XIX в. в геометрии укоренился аксиоматический метод. С того же времени аксиоматический метод распространился и на другие области, сделавшись одним из основных методов современной математики. Геометрические теории оказались едва ли не самой удобной частью математики для становления аксиоматического метода. Вместо громоздкой системы определений, аксиом и постулатов, принятой в «Началах» Евклида, теперь сделалось возможным ввести лишь совокупность аксиом, которая и служит описанием основных понятий и их свойств. В геометрии же сложились первые требования логической строгости, которым должны удовлетворять аксиомы: требования их совместности и полноты. Совместность включила в себя требования независимости и непротиворечивости. Последняя доказывается построением интерпретаций и по существу эквивалентна этому построению. Независимость какой-либо аксиомы устанавливается заменой ее отрицанием с последующим построением интерпретаций с целью доказать непротиворечивость новой системы. Полнота системы аксиом получила общепринятое понимание как свойство определять систему объектов с точностью до изоморфизма. В отличие от геометрии, аксиоматика теории групп, например, не может быть полной, так как существуют группы с неизоморфной структурой.

Аксиомы геометрии, как и вообще математические аксиомы, не являются вечными априорными истинами. Критерий их истинности лежит в практике; на каждом этапе исторического развития математики выявляется их относительность. Большая роль аксиоматического метода не может затенить реальное происхождение аксиом, не может служить основанием для их идеалистических оценок. По справедливому выражению Ф. Энгельса, «выведение математических величин друг из друга, кажущееся априорным, доказывает не их априорное происхождение, а только их рациональную взаимную связь» [1].

Развитие геометрии в XX в. из-за громадного фактического объема и сложности связей не оказалось возможным включить в состав настоящей главы. Первоначальное представление об этом предмете читатель может получить, например, из статьи А. Д. Александрова «Геометрия» [2], к которой приложена хорошо подобранная библиография.

---

[1] Ф. Энгельс. Анти-Дюринг. Госполитиздат, М., 1950, стр. 37.

[2] А. Д. Александров. Геометрия. БСЭ, изд. 2, т. 10, стр. 533—550.