ГЛАВА XII

О РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ

Состояние научных исследований по математике к началу XIX в. В предшествующих главах приведено сравнительно много сведений о наиболее важных вкладах в науку, внесенных выдающимися математиками России. Эти материалы свидетельствуют о возрастании объема и удельного веса научных исследований наших отечественных ученых и могут дать некоторое представление об уровне и характере развития математики в России в XVIII и XIX вв.

Однако приведенные сведения оказались отрывочными, потому что выбор их был подчинен целям общего характера, стоявшим перед автором при написании той или иной главы. Представилось необходимым дополнить указанные сведения кратким, по возможности связным очерком развития математики в России. При этом мы будем стремиться избегать повторений ранее приведенных материалов.

В XVIII в. в России существовало только два учебно-научных центра: Петербургская академия наук (основана в 1725 г.) и Московский университет (открыт в 1755 г.). Научная деятельность в области математики и смежных дисциплин полностью исчерпывается трудами Л. Эйлера и его немногочисленных учеников. Гигантские по количеству и важности результаты Эйлера оставались все же изолированным явлением, не находили широкого научного отклика в России, где слой образованных людей был еще весьма невелик. Также не нашли непосредственного развития многие замечательные мысли М. В. Ломоносова о математике, ее значении и характере ее методов. Московский же университет выполнял в XVIII в. по преимуществу учебные функции.

Положение начало изменяться в первой половине XIX в., когда под натиском нового, капиталистического производства в России, несмотря на сопротивление царизма, были проведены некоторые реформы. Возросшая при этом роль науки и образования для экономики России нашла свое выражение, в частности, в основании ряда университетов. Начало XIX в. было ознаменовано появлением университетов: Тартусского (1802), Вильнюсского (1803), Казанского (1804), Харьковского (1805), Петербургского (1819) и Киевского (1834). Во второй половине XIX в. к ним примкнули еще три университета: Одесский (1865), Варшавский (1869) и Томский (1888). Ко времени Великой Октябрьской социалистической революции в России насчитывалось всего 11 университетов (в 1909 г. был открыт Саратовский университет).

В каждом из университетов с момента его организации учреждались физико-математические факультеты и кафедры математики (в Саратовском университете это произошло лишь в 1918 г.).

Деятельность университетов, руководивших в то время также всеми средними и низшими учебными заведениями, была важнейшей частью создания основ для развертывания научных исследований по математике. Другими частями этого важного для истории науки процесса были: повышение уровня преподавания математики в средних учебных заведениях, издание специально математической литературы, в том числе журналов, появление научных математических обществ.

В университетах к середине XIX в. начала разворачиваться серьезная научная деятельность. Этому сопутствовало объединение в ряде городов ученых-математиков на основе общей тематики, приведшее к образованию научных школ. Этот термин мы будем применять к сравнительно многочисленным группам ученых, поддерживающих научные связи и объединяемых общностью научного направления, выделяющегося либо классом решаемых теоретических проблем или задач, либо своеобразием применяемых методов.

Первым научным центром в области математических исследований оказался Петербург, точнее Петербургская академия наук. Вслед за тем вокруг университетов стали складываться другие математические центры и школы: в Казани, Москве, Киеве, Харькове и других городах.

В дальнейшем мы сможем уделить основное внимание развитию лишь Петербургской и Московской математических школ. В отношении других центров мы будем вынуждены ограничиться краткими замечаниями.

Петербургская математическая школа. После смерти Л. Эйлера (1783) наступило снижение уровня математических исследований в Петербурге. Новый подъем обозначился лишь в 20-е годы XIX в. Он был связан с деятельностью М. В. Остроградского и В. Я. Буняковского. Оба они являлись уроженцами Украины, оба получили серьезную научную подготовку в Париже — самом значительном в то время центре математической науки. Это обстоятельство определило идейное родство и связь работ петербургских математиков с ведущими идеями лучших математиков того времени.

Михаил Васильевич Остроградский (1801—1861) окончил Харьковский университет в 1820 г. Он был учеником прогрессивного ученого, ректора университета Т. Ф. Осиповского. Борьба последнего с реакционным большинством профессоров, окончившаяся изгнанием Осиповского из университета, отразилась и на судьбе Остроградского, который не получил диплома. Остроградский продолжал свою подготовку в Париже (1822—1828) и возвратился на родину уже ученым с высокой научной репутацией. Он обосновался в Петербурге, будучи вначале (1828) избран адъюнктом, а затем (с 1830 г.) академиком. Кроме того, Остроградский вел преподавание в ряде технических и военных высших учебных заведений.

Научные интересы Остроградского развивались в тесной связи с актуальными для парижских математиков проблемами. Он даже большинство работ написал и опубликовал на французском языке.

Собрание сочинений М. В. Остроградского на русском языке было издано только в 1959—1961 гг. Академией наук УССР.

Так же как и его современники (Фурье, Лаплас, Коши, Пуассон и др.), Остроградский основные усилия направлял на решение прикладных проблем. Большинство его работ относилось к области механики, математической физики и связанных с ними проблем математического анализа. Кроме того, он оставил после себя первоклассные работы по алгебре, теории чисел и теории вероятностей.

Центральное место в научной деятельности Остроградского занимают его работы по математической физике. Построение математической теории разных явлений физики было в центре внимания крупнейших парижских математиков того времени, когда в Париже учился Остроградский. В 1822 г. появилась «Аналитическая теория тепла» Фурье, в 1825 г. завершен выход в свет пятитомной «Небесной механики» Лапласа, в 1826 г. была издана «Теория электромагнитных явлений» Ампера. В 1826 г. была написана и первая работа Остроградского (опубликована в 1832 г.). Она была посвящена задаче о распространении волн на поверхности жидкости в цилиндрическом бассейне. Несколько позже (1829) Остроградский решил ту же задачу для бассейна, имеющего форму кругового сектора.

Вернувшись в Петербург, Остроградский опубликовал «Заметку об интеграле, встречающемся в теории притяжения», где он дал оригинальный вывод уравнения Пуассона, которое он нашел и сообщил Коши еще в 1826 г. Вслед за тем он посвятил несколько мемуаров математической теории тепла. Здесь он развил метод Фурье для твердых тел в общей форме, а также впервые дал строгое решение задачи о распространении тепла в жидкости. Его заметка о теории тепла (1828 г., опубликовано в 1831 г.) содержит обобщение метода Фурье. Это обобщение состоит в основном: а) в определении характеристических чисел краевой задачи и соответствующих им фундаментальных функций (вообще говоря, не тригонометрических); б) в исследовании разложимости функций в ряд по фундаментальным функциям. При этом Остроградский открыл свойство попарной ортогональности фундаментальных функций, а также нашел формулу разложения по фундаментальным функциям:

$$f(x, y, z) = \sum \frac{u \int f(x, y, z)\, u'\omega}{\int uu'\omega}\,.$$

Здесь у Остроградского интегралы, разумеется, тройные по области, ω — дифференциал объема, u — фундаментальная функция, соответствующая данному слагаемому суммы, а отношения интегралов — обобщенные коэффициенты Фурье.

Особенностью этой работы Остроградского является также то, что он опирается на (упоминавшийся нами в главе IX) [1] принцип локализации. Доказательство общего разложения по фундаментальным функциям не проведено строго. Впрочем, последующие обобщения метода Фурье, достигнутые в работах Ламе и Дюгамеля, обладали еще

[1] См. стр. 201.

меньшей общностью и доказательностью, чем у Остроградского.

Многие сочинения Остроградского посвящены решению других задач математической физики: о намагничивании разобщенных брусков, о притяжении сфер и сфероидов, об интегрировании уравнений малых колебаний упругих сред и т. п.

С исследованиями по математической физике связана также большая группа работ Остроградского в различных областях механики. Н. Е. Жуковский, знаменитый русский математик и механик, делит эти исследования Остроградского на три части: относящиеся к анализу принципа виртуальных перемещений и вариационных принципов механики, к решению дифференциальных уравнений механики и посвященные частным задачам механики. В частности, среди обобщений принципа Лагранжа находятся: распространение этого метода на системы с освобождающимися связями, общий метод нахождения скоростей упругих точек при ударе о жесткую связь и др. Имеются и работы чисто прикладного характера по баллистике и артиллерийской технике.

В области математического анализа Остроградскому принадлежат большие открытия. По бо̀льшей части эти открытия связаны с его прикладными работами и возникли как усовершенствования, необходимые для достаточно общей постановки задачи. Так, например, знаменитая формула Остроградского

$$\iiint\limits_{v}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iint\limits_{s} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dy\,dx$$

была выведена впервые в 1828 г. в «Заметке по теории теплоты». Ее обобщение на случай n-кратного интеграла было в 1834 г. найдено Остроградским для определения вариации кратного интеграла. В статьях по вариационному исчислению находится также важная формула дифференцирования кратного интеграла по параметру

$$\frac{d}{d\alpha}\int\limits_{L} U\,dx\,dy\,dz\ldots=\int\limits_{L}\frac{\partial U}{\partial \alpha}\,dx\,dy\,dz\ldots-$$

$$-\int\limits_{S} U\frac{\partial L}{\partial \alpha}\,\frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\ldots}},$$

где параметр входит как в подынтегральную функцию U, так и в уравнения, определяющие границу S области интегрирования L.

В статье «О преобразовании переменных в кратных интегралах» (1836, опубликовано в 1838 г.) дан метод, употребляющийся и в наше время.

Ряд статей Остроградского посвящен теории интегрирования алгебраических функций. Например, в них доказано, что алгебраический интеграл от рациональной функции может быть только рациональной функцией. Это вытекает (при $n=1$) из более общего результата, доказанного Остроградским: пусть дана рациональная функция $R(x, y)$, где

$$y = \sum_{k=0}^{n} A_k(x) y^k, \quad A_n = 1.$$

Если при этом $\int R(x, y)\, dx$ есть алгебраическая функция, то он является целой рациональной функцией от y степени $n-1$, коэффициенты которой — рациональные функции от x. Доказано также, что интеграл от алгебраической функции не может содержать ни показательных, ни тригонометрических функций. Найден способ отделения алгебраической части интеграла от рациональной дроби, без оснований называемый теперь в учебниках «правилом Эрмита».

Эти и многие другие результаты Остроградского в области теории интегрирования помимо их связи с прикладными задачами отразили новый этап развития интегрального исчисления. Мы уже указывали, что выделение класса функций, интегрируемых в элементарных функциях, в основном было завершено во времена Эйлера и в значительной части благодаря его усилиям. Новая проблематика состояла из более общих проблем относительно природы классов функций, получающихся при интегрировании того или иного класса функций: рациональных, алгебраических, элементарных, трансцендентных и т. д. Помимо Остроградского в этой области работали Абель, Лиувилль и др. Их результаты временами были близки, а иногда даже перекрывались. В последующем общая теория интегрирования была успешно продвинута П. Л. Чебышевым.

В плане обзора работ Остроградского по математическому анализу укажем еще на некоторые его результаты в области теории дифференциальных уравнений. В 1838 г. он опубликовал «Заметку о линейных дифференциальных уравнениях», где для уравнения вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0$$

вывел определитель, называемый теперь детерминантом Вронского[1],

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

(y_1, y_2, ..., y_n — частные интегралы уравнения).

Ранее (1835) Остроградский внес улучшения в метод Ньютона приближенного решения системы дифференциальных уравнений.

В связи с задачей интегрирования рациональных дробей Остроградский нашел новый способ выделения кратных корней многочленов. Его «Лекции по алгебраическому и трансцендентному анализу» (1837) сыграли большую роль в развитии математического образования в России.

В сфере научных интересов Остроградского находилась и теория вероятностей, которой он посвятил шесть статей в разные времена своей жизни (от 1834 до 1859 г.). В них он исследовал вопросы теории страхования, азартных игр, статистического контроля качества продукции, производящие функции и другие актуальные для его времени вопросы теории вероятностей, подходя к ним с позиций практических приложений. Не избежал он в одной из своих работ и характерных для математиков того времени (в первую очередь Лапласа) заблуждений, состоящих в необоснованном приложении соображений теории вероятностей к решению вопросов судебной практики и других специальных проблем. Другой определенной его ошибкой было пренебрежительное отношение к работам Лобачевского. Эта ошибка замечательного математика учит, как недопустимы в науке проявления теоретической ограниченности, невнимательности или самомнения, как вредят они развитию науки. Их нельзя оправдать никакими, даже самыми большими, заслугами, ни теоретическими, ни практическими.

Виктор Яковлевич Буняковский (1804—1889) также получил высшее математическое образование в Париже, где в 1825 г. ему была присуждена ученая степень доктора математики. Возвратился он в Россию в 1827 г. Долгие годы

[1] Вронский Г. (1775—1853) ввел этот детерминант в 1812 г.

был профессором университета и других высших учебных заведений Петербурга. Вскоре после приезда Буняковский был избран (1828) адъюнктом, а затем (1830) академиком. С 1864 г. и почти до самой смерти он являлся вице-президентом Академии наук.

В большом и разнородном научном наследии Буняковского (ему принадлежит около 130 работ) имеются важные научные результаты. В работах по теории чисел (их более 40) мы встречаем доказательства квадратичного закона взаимности, решение ряда задач диофантова анализа, учения о простых числах и т. д. Более 20 работ Буняковский посвятил теории вероятностей и ее приложениям. Им решены многие важные задачи, возникшие при организации страхового дела, ссудных касс, анализа народонаселения России (таблицы и эмпирическая формула смертности, подсчеты призывных контингентов и др.), промышленности. В качестве государственного эксперта по статистике и страхованию (с 1858 г.) Буняковский оказал большое содействие проникновению математических методов в практику хозяйственного строительства. Написанные им «Основания теории вероятностей» (1846) охватили все отделы теории вероятностей и ее приложений и явились первым большим руководством по этой науке в России.

В работах Буняковского по анализу решено большое число конкретных задач в части теории интегрирования, сходимости рядов и т. д. Ему, в частности, принадлежит (1859) честь открытия известного неравенства:

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x)\,dx,$$

которое иногда называют неравенством К. Шварца, хотя последний нашел и опубликовал его лишь через 16 лет после Буняковского. Геометрические исследования Буняковского в основном посвящены проблемам оснований геометрии. Он тщательно исследовал историю доказательств постулата о параллельных, тонко обнаружил несовершенства всех этих доказательств. Однако к работам Лобачевского Буняковский отнесся отрицательно, разделив ошибку Остроградского, и продолжал искать логически строгое доказательство постулата. Неевклидова геометрия представлялась ему логически немыслимой.

Работы Буняковского, как и подавляющего большинства математиков XIX в., оказались забытыми, влившись и трансформировавшись в некоторый обобщенный опыт науки. Освоение и обобщение этого опыта для математиков нашего века является еще далеко не полностью решенной задачей. Но в то время (к середине XIX в.) деятельность Остроградского и Буняковского, их учеников, многие из которых стали крупными специалистами в различных областях математики и техники, определила новый подъем математики в России, особенно в Петербурге. Начал складываться коллектив творчески работающих математиков, ведущее место в котором к концу жизни Остроградского занял приехавший из Москвы П. Л. Чебышев.

Чебышев (по его собственному указанию, надо произносить: Чебышо̀в) Пафнутий Львович (1821—1894) окончил в 1841 г. Московский университет. На конкурсе студенческих работ за сочинение на тему «Вычисление корней уравнений» он был награжден серебряной медалью. Будучи оставлен при университете, защитил в 1846 г. магистерскую диссертацию: «Опыт элементарного анализа теории вероятностей». В следующем году Чебышев переехал в Петербург и начал работать в университете. При этом университете он защитил в 1849 г. докторскую диссертацию «Теория сравнений» и работал в течение многих лет (1850—1882) профессором. Деятельность Чебышева в Академии наук началась в 1853 г., когда его избрали адъюнктом. Рост научного авторитета Чебышева был в дальнейшем отмечен избранием в число академиков (в 1856 г. — экстраординарным, в 1859 г. — ординарным).

В научном наследии Чебышева насчитывается более 80 работ. Оно оказало огромное влияние на развитие математики, и в особенности на формирование Петербургской математической школы. Для работ Чебышева характерна тесная связь с практикой, широкий охват научных проблем, строгость изложения, экономность математических средств в достижении крупных результатов.

Более конкретное изучение творчества Чебышева в настоящее время облегчается тем, что Академия наук издала полное собрание его сочинений. Помимо этого, в 1945 г. был выпущен в свет сборник «Научное наследие П. Л. Чебышева». Два тома этого сборника составлены из обзорных статей, в которых характеризуются труды Чебышева по математике (1-й том) и кинематике механизмов (2-й том).

Математические результаты Чебышева в основном распространяются на четыре области: теорию чисел, теорию вероятностей, теорию наилучшего приближения функций и общую теорию полиномов, теорию интегрирования.

Деятельность Чебышева в области теории чисел началась в 40-х годах прошлого века. Академик Буняковский привлек молодого ученого к комментированию и изданию сочинений Эйлера по теории чисел. Одновременно Чебышев готовил монографию по теории сравнений и ее приложениям в качестве докторской диссертации. К 1849 г. обе эти задачи были выполнены и соответствующие книги опубликованы.

Монография Чебышева была замечательной книгой и обладала большой долговечностью. Однако еще более примечательными были приложения к ней. В качестве приложения к «Теории сравнений» Чебышев опубликовал, в частности, мемуар: «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины». Вскоре появилось еще несколько статей Чебышева на эту тему.

Проблема распределения простых чисел в ряду натуральных чисел — одна из самых старых в теории чисел. Она известна со времен древнегреческой науки. Первый шаг к ее решению сделал Евклид, доказав теорему, что в натуральном ряду имеется бесконечно много простых чисел. До тех пор, пока Эйлер не привлек средства математического анализа, ее решение практически не продвигалось. Эйлер сумел дать новое доказательство этой теоремы, исходя из определения дзета-функции:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

(n — натуральные, p — простые) и соображений, что сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ при $s > 1$ и $s \to 1$ неограниченно возрастает. Следовательно, произведение

$$\prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

имеет неограниченно большое число сомножителей. Лишь в 1837 г. Дирихле обобщил теорему Евклида, доказав, что в любой арифметической прогрессии $\{a + nb\}$, где a и b взаимно просты, содержится бесконечно много простых чисел. В 1798—1808 гг. Лежандр, изучив таблицы простых чисел до 10^6, вывел эмпирически, что число простых чисел в отрезке $[2, x]$ выражается формулой

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1{,}08366}.$$

Чебышев доказал, что формула Лежандра неверна, глубоко исследовал свойства функции $\pi(x)$ и показал, что истинный порядок роста этой функции тот же, что и функции $\frac{x}{\ln x}$. Более того, им были даны точные оценки

$$0{,}92129 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} < 1{,}10555.$$

Это открытие Чебышева произвело огромное впечатление. Многие математики работали над усовершенствованием его методов и улучшением результатов. Сильвестр в статьях 1881 и 1892 г. сузил вышеупомянутое неравенство:

$$0{,}95695 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} < 1{,}04423.$$

Дальнейшие приближения получили Шур (1929) и Брейш (1932).

Чебышев нашел также интегральные оценки $\pi(x)$. Ему удалось доказать, что с ростом x значение функции $\pi(x)$ колеблется около $\int\limits_2^x \frac{dz}{\ln z}$, удовлетворяя бесконечно много раз неравенствам

$$\pi(x) > \int\limits_2^x \frac{dz}{\ln z} - \frac{\alpha x}{\ln^n x} \quad \text{и}$$

$$\pi(x) < \int\limits_2^x \frac{dx}{\ln x} + \frac{\alpha x}{\ln^n x} \quad (\alpha > 0, \quad n \geqslant 1).$$

Только в 1896 г. Адамар и Валле-Пуссен доказали предельную теорему:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\int\limits_2^x \frac{dz}{\ln z}} = 1.$$

Уже в наши дни А. Сельберг нашел (1949) элементарное доказательство этого асимптотического закона. В 1955 г. А. Г. Постников и Н. П. Романов упростили громоздкий вывод Сельберга.

Исследование расположения простых чисел в натуральном ряде привело к появлению работ Чебышева о теории квадратичных форм. В 1866 г. появилась его статья «Об одном арифметическом вопросе», посвященная диофантовым приближениям, т. е. приближенному целочисленному решению диофантовых уравнений, что он проделал с помощью аппарата непрерывных дробей.

Идеи Чебышева в области теории чисел разрабатывали его ученики: А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной и др.[1]. Советскую школу теории чисел, весьма авторитетную и многочисленную, ныне возглавляет академик И. М. Виноградов. Кроме того, на посту директора Математического института АН СССР (с 1932 г.) И. М. Виноградов руководит самым крупным и значительным коллективом советских ученых-математиков.

К теории вероятностей Чебышев обратился еще в молодые годы, посвятив ей магистерскую диссертацию. В те времена теория вероятностей переживала своеобразный кризис. Ее основные закономерности: закон больших чисел и предельная теорема Муавра—Лапласа

$$G\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

[предельный закон вероятностей для уклонения числа x появлений случайного события от математического ожидания a этого числа x при n опытах с постоянной вероятностью p; дисперсия $\sigma^2 = np(1-p)$] были в основном найдены еще в XVIII в. Осознание общезначимости этих законов привело к широкому их применению вплоть до попыток приложения их в области социальной практики людей. Это вызвало столь большое число необоснованных и ошибочных суждений, что

[1] См. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. Изд-во АН СССР, М., 1947.

это сказалось на научной репутации самой теории вероятностей. Без солидного обоснования понятий и результатов дальнейшее развитие этой науки было невозможно.

Чебышев написал по теории вероятностей всего четыре работы (в 1845, 1846, 1867 и 1887 гг.), но, по всеобщему признанию, эти работы вывели теорию вероятностей снова в ранг математических наук, послужили основой для создания целой математической школы.

Исходные позиции автора проявились уже в его магистерской диссертации, где он ставил перед собой цель — дать такое построение теории вероятностей, которое в наименьшей степени привлекало бы аппарат математического анализа. Этого он достигал, отказываясь от перехода к пределу и заменяя этот переход системой неравенств, в которые заключены все соотношения. Числовые оценки погрешностей и отклонений остались характерной чертой и для последующих работ Чебышева по теории вероятностей.

В дальнейшем Чебышев расширил аппарат теории вероятностей. Для этого он привлек алгебраические непрерывные дроби, свойства которых он вначале изучил в связи с задачами об интегрировании алгебраических функций. На базе алгоритма непрерывных дробей он построил общую теорию разложения произвольной функции в ряд по ортогональным полиномам. Дополнив аппарат строгим определением свойств математических ожиданий и других определений и рассуждений, Чебышев в 1866 г. нашел доказательство закона больших чисел в самой в то время общей классической формулировке: если математические ожидания величин x, y, z, ..., x^2, y^2, z^2, ... будут соответственно a, b, c, ..., a_1, b_1, c_1, ..., то вероятность, что среднее арифметическое N величин x, y, z, ... от среднего арифметического математических ожиданий этих величин разнится не более как на

$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N}-\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}},$$

при всяком t, будет превосходить $1-\dfrac{t^2}{N}$.

Достаточно общее и строгое доказательство центральной предельной теоремы Чебышеву удалось найти лишь к 1887 г. Для того чтобы доказать, что «если математические ожидания величин u_1, u_2, u_3, ... равны нулю, а математические ожидания всех их степеней имеют числовую величину ниже какого-либо конечного предела, вероятность того, что сумма n величин $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, деленная на квадратный корень из удвоенной суммы математических ожиданий их квадратов, заключается между двумя какими-нибудь величинами t и t', с возрастанием числа n до ∞ имеет пределом величину интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{t}^{t_1} e^{-x^2}\, dx \text{»}$$

Чебышеву пришлось найти метод, известный в современной литературе как метод моментов.

В доказательстве последней теоремы Чебышев допустил логический пробел. Оказалось, что помимо условия независимости случайных величин нужно предположить, что среднее арифметическое дисперсий при $n \to \infty$ стремится к некоторому положительному пределу. Этот недостаток был исправлен его учеником А. А. Марковым.

Ученики Чебышева — Марков и Ляпунов — развили своими работами его направление в теории вероятностей до такой степени, что, по словам А. Н. Колмогорова, теперь эти работы всюду воспринимаются как исходный пункт всего дальнейшего современного развития теории вероятностей. В их трудах получили развитие метод моментов (Марков) и метод характеристических функций (Ляпунов). Среди достижений Петербургской школы теории вероятностей особенно заслуживает быть отмеченной теория цепей Маркова. Работы Чебышева, Маркова и Ляпунова составляют, по классификации А. Н. Колмогорова, целый этап в истории теории вероятностей. Этот этап охватывает вторую половину XIX в. В течение этого периода теория вероятностей в Западной Европе столь активной разработке не подвергалась. Следующий этап — современный — открывается работами С. Н. Бернштейна и Р. Мизеса. Удельный вес советской школы теории вероятностей, руководимой А. Н. Колмогоровым, исключительно велик. Она занимает ведущее место в мировой науке.

Значительная группа работ Чебышева посвящена теории приближения функций. Эта группа работ примечательна как своим непосредственным происхождением из практики, так и огромным теоретическим последействием, приведшим к возникновению современной конструктивной теории функций. Последняя изучает, как известно, зависимости между свойствами различных классов функций и характером их приближения другими, более простыми, функциями в конечной или бесконечной области.

Во время заграничной научной командировки 1852 г. Чебышев заинтересовался различными видами шарнирных механизмов, с помощью которых осуществляется преобразование прямолинейного поступательного движения поршня паровой машины в круговое движение маховика. Одной из разновидностей подобных механизмов является широко известный параллелограмм Уатта. Чебышев вообще построил большое количество механизмов и посвятил им много исследований. Возьмем, например, механизм, где вокруг O и O_1 могут вращаться OA и O_1A_1. Движение точки M, передающей толчки поршня на вращающиеся части, не будет прямолинейным. Оно будет носить характер биений. Задача рассчитать механизм так, чтобы отклонения точки M от вертикали были минимальными (чтобы избежать вредного влияния на работу машины), приводит к математической задаче: определить движение точки M функцией, наименее отклоняющейся от нуля на данном промежутке. Наиболее удобной для оперирования функцией является полином.

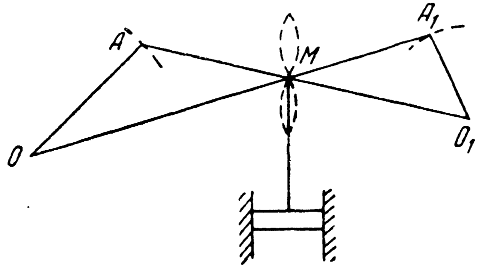

Рис. 22

Отсюда вытекают задачи определения полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, а также аппроксимирования функций полиномами. Последняя задача, по Чебышеву, ставится так: на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция. Рассматривается для этого же отрезка множество всех полиномов $P_n(x)$ степени не выше N. Рассматриваются

$$\max |f(x) - P_n(x)|$$

для всех данных полиномов, и из них выбирается тот, который дает наименьшее значение данного выражения.

Чебышев исследовал свойства и нашел вид целого класса специальных полиномов, носящих его имя и в наши дни. Полиномы Чебышева, Чебышева—Лагерра, Чебышева—Эрмита и их разновидности играют большую роль в математике, имея многообразные приложения. Не говоря о кинематике механизмов, послужившей исходным пунктом чебышевской теории наилучшего приближения, последняя прилагается к решению алгебраических уравнений, интерполяции, приближенным квадратурам, геодезическим и картографическим задачам и т. д.

В теории Чебышева наилучшего приближения функций содержатся идеи общей теории ортогональных многочленов, теории моментов и методов квадратур. Ортогональные многочлены с весом получаются у него при разложении интеграла

$$\int_a^b \frac{P(x)}{z-x}\,dx \qquad (p(x) \geqslant 0)$$

в ряд вида

$$\frac{S_0}{Z} + \frac{S_1}{Z^2} + \frac{S_2}{Z^3} + \ldots,$$

а затем в соответствующую этому ряду непрерывную дробь

$$\cfrac{b_0}{z-a_1 + \cfrac{b_1}{z-a_2 + \cfrac{b_2}{z-a_3 + \ldots}}}$$

Если составить последовательность подходящих дробей

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)},$$

то знаменатели образуют систему многочленов, ортогональных на (a, b) с весом $p(x) \geqslant 0$.

Ортогональные многочлены Чебышев связал со способом наименьших квадратов. Он нашел, что многочлен $P_n(x)$, обращающий в минимум

$$\int_a^b p(x)\,[f(x) - P_n(x)]^2\,dx,$$

может быть представлен в виде суммы

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k P_k(x),$$

где $P_k(x)$ — указанные выше ортогональные многочлены, а коэффициенты

$$A_k = \frac{\int\limits_a^b f(x) P_k(x) p(x) dx}{\int\limits_a^b p_k^2(x) P(x) dx}.$$

Ряд статей Чебышева посвящен теории интегрирования. В них речь идет об интегрировании алгебраических иррациональностей и методах приближенного вычисления определенных интегралов. Здесь ему принадлежит окончательное решение вопроса об условиях интегрируемости дифференциального бинома

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

(m, n, p — рациональные числа) в элементарных функциях. Именно, он установил, что найденные еще в XVIII в. случаи интегрируемости: p — целое число; $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n} + p$ — целые числа, являются единственно возможными. Настоящий цикл работ Чебышева связан с работами его старшего товарища И. И. Сомова. И в этой области, как и во всех предыдущих, идеи Чебышева разрабатывали его ученики и другие ученые: Е. И. Золотарев, И. П. Долбня, И. Л. Пташицкий, Д. А. Граве и др.

Научной деятельности Чебышева мы уделили сравнительно много места потому, что она является основой, началом быстрого развития математики во второй половине XIX в. в Петербурге. Чебышев и его ученики: А. А. Марков, А. М. Ляпунов, Е. И. Золотарев, А. Н. Коркин, Г. Ф. Вороной и др. образовали ядро научного коллектива математиков, за которым в литературе упрочилось название Петербургской математической школы. Коллектив этот приобрел в 1890 г. организационную форму в виде Петербургского математического общества, функционировавшего до 1905 г.

Петербургские математики оказали решающее влияние на формирование научных школ в других городах. Так, А. М. Ляпунов, проработавший ряд лет (1885—1902) в Харькове, во многом способствовал развертыванию научной деятельности и объединению математиков. Уезжая в Петербург, он оставил своего ученика В. А. Стеклова на посту председателя Харьковского математического общества. Д. А. Граве, переехав в 1902 г. из Петербурга в Киев, создал там через несколько лет научную алгебраическую школу, откуда вышли О. Ю. Шмидт, Н. Г. Чеботарев и др.

Научные интересы петербургских математиков, да и самого Чебышева, в частности, не ограничивались теорией чисел, теорией вероятностей и отдельными проблемами математического анализа (теория интегрирования, теория приближения функций). Из других областей математики наиболее интенсивно разрабатывались дифференциальные уравнения (Ляпунов, Имшенецкий, Сонин и др.) и теория функций комплексного переменного (Сохоцкий). Об основных направлениях подобных исследований мы уже упоминали в главах IX и X.

Петербургская математическая школа в конце прошлого века и в начале нынешнего превратилась в совокупность нескольких математических научных школ, оказавших большое влияние на развитие математики в России. Связи ленинградских (петербургских) математиков с другими научными школами России после Великой Октябрьской социалистической революции настолько укрепились, а научные интересы настолько переплелись, что сам термин «Петербургская школа» потерял свой обособляющий смысл.

Математическое творчество С. В. Ковалевской. Прежде чем перейти к характеристике других математических коллективов, осветим научную деятельность первой в мире женщины — профессора математики, составившей славу русской науки, но оставшейся трагически одинокой, — Софьи Васильевны Ковалевской (1850—1891).

С. В. Ковалевская выросла в семье богатого генерала, сделавшегося после отставки помещиком. Образование она получила домашнее, но ее учили хорошие педагоги. Рано обозначился у нее интерес к математике. Так как доступ в университеты в России для женщин был закрыт, она последовала примеру передовых женщин того времени и уехала для получения образования за границу. Получить заграничный паспорт ей помог брак с В. О. Ковалевским, ставшим широко известным впоследствии своими работами по палеонтологии. Любовь к науке, и прежде всего к математике, прогрессивное мировоззрение, созвучное умонастроению передовых мыслителей и борцов с самодержавием, помогли С. В. Ковалевской преодолеть условности и предубеждения родных и вообще людей ее круга.

С. В. Ковалевская уехала в Германию в 1869 г. После кратковременного пребывания в Гейдельберге, где работали в то время Кенигсбергер, Дюбуа-Реймон, Кирхгоф, Гельмгольц, она прибыла в Берлин и убедила К. Вейерштрасса руководить ее математическими занятиями. Талант Софьи Васильевны развернулся под умелым руководством, и уже в 1874 г. ее учитель направил в университет в Геттинген три работы: «К теории уравнений в частных производных», «О форме кольца Сатурна» и «О приведении одного класса абелевых интегралов третьего ранга к интегралам эллиптическим». Этих работ с избытком хватило для присуждения ей степени доктора философии без защиты диссертации.

В первом из сочинений Ковалевская доказала существование единственного аналитического решения задачи Коши для дифференциального уравнения с частными производными вида

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} = f\left(x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi,\ \ldots,\ \frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_r}\varphi}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\alpha_1}\ldots\partial x_r^{\alpha_r}}\right)$$

$$\left(\sum_{=1}^{r}\alpha_i \leqslant N,\ \alpha < n\right)$$

при условиях: а) аналитичности функции f в окрестности (x_0, a_1, ..., a_r) и функций, входящих в начальные, условия; б) уравнение имеет нормальную форму, т. е. $\alpha+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i \leqslant n$.

Здесь же она нашла, независимо от Коши, линейное преобразование аргументов, приводящее уравнение к нормальной форме. Значительным открытием Ковалевской в этой области явился пример уравнения типа теплопроводности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

с начальными условиями $x=a$, $\varphi=\varphi_0\ (y/b)$ [1].

Для этого уравнения задача Коши вообще не имеет голоморфного решения, так как степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^{2k}\varphi_0\,(y/b)}{dy^{2k}}\cdot\frac{(x-a)^k}{k!},$$

---

[1] Этот символ означает аналитичность функции в окрестности $y=b$

формально удовлетворяющий условиям задачи, сходится лишь при весьма специальных условиях относительно

$$\varphi_0 (y/b).$$

Эти результаты Ковалевская распространила на нормальные системы дифференциальных уравнений с частными производными, придав им вид, близкий к тому, который мы встречаем в современных учебниках.

Во второй работе Ковалевская нашла более высокую степень приближения по сравнению с решением Лапласа, что позволило ей утверждать, что кольца Сатурна в сечении имеют не эллиптическую (по Лапласу), а яйцевидную форму. Позднее была установлена несплошность структуры этих колец.

Наконец, в третьей статье ею были найдены условия приведения ультраэллиптического интеграла, содержащего полином восьмой степени, к эллиптическому интегралу первого рода.

В том же, 1874, году Ковалевская вернулась в Россию. Она выступила с научными докладами, познакомилась с Чебышевым, Марковым, Жуковским, Бугаевым и другими учеными-математиками, вела литературную деятельность. Однако, несмотря на значительный научный авторитет и содействие ученых, для Ковалевской оказалось невозможным ни получить работу в университете, ни даже сдать магистерские экзамены (степени, полученные за границей, не принимались в расчет в русских университетах). Царское правительство ни под каким видом не допускало женщин в высшую школу.

Только в 1883 г., после смерти В. О. Ковалевского, она получила приглашение на должность доцента во вновь открытый университет в Стокгольме и переехала в Швецию, где через год (в 1884 г.) стала профессором. Здесь перед ней открылись возможности для научной работы. Год за годом она читала курсы лекций. Их высокий научный уровень и педагогическое мастерство лектора вызывали благожелательные отклики. Известно, что С. В. Ковалевская читала следующие курсы лекций: теория дифференциальных уравнений с частными производными (1884, 1890), вейерштрассова теория алгебраических (1885), абелевых (1885—1887), эллиптических (1888) и тета-функций (1888), теория потенциала (1886), теория движений твердого тела (1886—1887), качественная теория дифференциальных уравнений по Пуанкаре (1887—1888), аналитические методы теории чисел (1890) и др.

Энергичная научная деятельность Ковалевской принесла тем временем новые плоды. В 1888 г. она получила премию Парижской академии наук за лучшее в объявленном конкурсе решение задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, где рассмотрен случай нагруженного (не вполне симметрического) гироскопа. За другую работу в этой области ей была присуждена премия Шведской академией наук.

Существо дела здесь состоит в том, что уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки в общем случае не имеют однозначных решений с пятью произвольными постоянными и на всей комплексной плоскости в качестве особых точек содержат только полюса. Установив это, Ковалевская нашла затем, что в некоторых случаях все элементы движения могут выражаться через эллиптические функции от времени t. Эти функции, как известно, на комплексной плоскости имеют в качестве особых точек только полюса и, следовательно, однозначны.

Первый из таких случаев, когда центр движения находится в неподвижной точке, был исследован Эйлером и Пуансо. Они доказали, что для того, чтобы полностью определить движение, достаточно интегралов живых сил и площадей.

Второй случай выделил и разрешил Лагранж. Это случай, когда эллипсоид инерции относительно неподвижной точки является эллипсоидом вращения, а неподвижная точка лежит на оси вращения этого эллипсоида. Лагранж прибавил к интегралу живых сил и к интегралу площадей относительно вертикали, проходящей через точку опоры, третий интеграл, выражающий постоянство условий скорости относительно оси вращения эллипсоида инерции. Это дало ему возможность выразить все элементы движения через посредство эллиптических трансцендентностей.

Третий случай разрешила Ковалевская. Это тот случай, когда центр тяжести тела лежит на плоскости экватора эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки, служащего эллипсоидом вращения и удовлетворяющего условию $A = B = 2C$ (A, B, C — главные моменты инерции).

Н. Е. Жуковский следующим образом наглядно интерпретировал эти три случая (см. рис. 23).

Через три года после смерти С. В. Ковалевской, в 1894 г., А. М. Ляпунов придал этим ее результатам весьма общую форму. Однако эта проблема в общем виде еще не разрешена. Общих методов изучения соответствующих уравнений для любых параметров и начальных данных еще нет.

Крупнейшие русские математики — Чебышев, Буняковский и Имшенецкий — добились в 1889 г. избрания С. В. Ковалевской членом-корреспондентом Петербургской академии наук. Однако даже члену-корреспонденту Академии, имеющему прославленное научное имя, работы в Академии или университетах царское правительство не разрешало вести; для женщин это было запрещено. Умерла С. В. Ковалевская в 1891 г. в расцвете творческих сил и замыслов; похоронена в Стокгольме, на Северном кладбище.

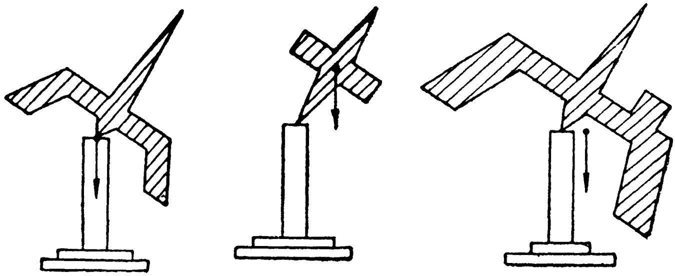

Рис. 23

Московская математическая школа. В заключение рассмотрим основные этапы формирования Московской математической школы. В отличие от Петербургской школы, где средоточием математических исследований являлась Академия наук, математики Москвы группировались вокруг университета. Историю математики в XIX в. в Москве следовало бы начать с 1804 г., с момента организации физико-математического факультета и кафедр чистой и прикладной математики. Однако первая половина века характеризуется в основном постепенным повышением уровня преподавания, ростом квалификации профессоров и преподавателей. В трудных условиях самодержавного гнета медленно росло и количество студентов: за 11 лет (1825—1836) физико-математический факультет окончило 119 человек, т. е. в среднем около 11 человек в год; за следующие 18 лет (1837—1854) его окончило уже 453 человека, что составляет около 25 человек в год. Возможности применения научных талантов были весьма ограниченными. Тем не менее из выпускников Московского университета за полстолетия вышло немало выдающихся ученых: академики П. Л. Чебышев, И. И. Сомов, Ф. А. Бредихин, профессоры В. Я. Цингер, А. Ю. Давидов, М. Ф. Хандриков, Н. А. Любимов, А. Г. Столетов и др.

В 1811 г. в Москве была предпринята попытка создать первое в России математическое общество. Инициатором был подполковник Н. Н. Муравьев. Целью общества, как было указано в его уставе, было распространение математических наук. Впрочем, практически дело свелось к обучению прикладным военным наукам. Через пять лет, в 1816 г., на базе общества выросло военно-учебное заведение, готовящее офицеров генерального штаба. В 1826 г. оно было переведено в Петербург.

Перелом в налаживании серьезной научной деятельности в Москве наметился лишь в 60-е годы XIX в. Он целиком связан с организацией Московского математического общества. Математические общества, как и всякие другие научные общества, являются формой коллективного труда ученых, важнейшей составной частью которого является научная взаимная информация и обсуждения. Появление научных обществ знаменует новый, более высокий уровень научного исследования. В наши дни помимо обществ существует много организационных форм коллективного труда ученых (лаборатории, семинары, институты, координационные центры и т. п.) , но роль научных обществ не снижается. Можно думать, что в грядущем коммунистическом обществе общественные формы научных объединений займут еще большее место.

Московское математическое общество начало свою деятельность в 1864 г. Вначале это была небольшая группа ученых, преимущественно преподавателей университета, собиравшихся на квартире у всеми уважаемого учителя многих из них, престарелого профессора Н. Д. Брашмана (1796—1866), ушедшего в этом же, 1864, году в отставку.

На первом заседании, 15 сентября 1864 г., Н. Д. Брашман был избран президентом общества, А. Ю. Давидов — вице-президентом. Было решено, что целью нового общества будет взаимное содействие в занятиях математическими науками. Для этого все 13 членов общества поделили между собой отрасли физико-математических наук, чтобы следить за их успехами и развитием и сообщать о них на заседаниях. По математике эти реферативные задания распределились таким образом (формулировки сохранены): А. Ю. Давидов — интегрирование уравнений с частными дифференциалами; А. В. Летников — дифференциальные уравнения; Н. Н. Алексеев — интегрирование иррациональных функций и эллиптические функции; К. М. Петерсон — аналитическая геометрия; С. С. Урусов — теория конечных разностей; Ф. А. Слудский, а затем с 1865 г. Н. В. Бугаев — теория чисел. Другие члены общества взяли на себя рефераты по механике, астрономии и физике.

Через год, в октябре 1865 г., члены общества возбудили ходатайство об официальном утверждении своей организации. До того, в апреле 1865 г., они решили издавать «Математический сборник»; первый выпуск этого журнала появился в октябре 1866 г. Официальное оформление общества произошло 28 января 1867 г. Большие финансовые и организационные трудности испытывало общество, но дело шло. К 1901 г. в нем состояло уже 101, а к 1913 — 112 человек. С перебоями, но выходил и «Математический сборник» — старейший русский специально математический журнал, существующий и в наши дни. Наладился в 1873 г. обмен изданиями с заграничными организациями. Научный авторитет общества и связи его членов крепли. Большую помощь обществу оказывал его влиятельный член — П. Л. Чебышев.

Постепенно в обществе произошла дифференциация, приведшая к преобладанию математики и механики (носившей в то время название прикладной математики) и практически к их обособлению от других наук. До 1917 г. из 971 научного сообщения, прочитанного на заседаниях общества, 640 (66%) пришлось на математику, 217 (22%) — на механику и 114 (12%) на физику и астрономию.

Научные интересы московских математиков охватывали многочисленные области. Однако вскоре выкристаллизовались наиболее продуктивные направления, складывающиеся в научные школы. Во второй половине XIX в. таких школ можно было насчитать две: прикладной математики (механики) и дифференциальной геометрии. Было также сильным направление дифференциальных уравнений.

Инициатор организации математического общества и его первый руководитель Н. Д. Брашман окончил в Вене Политехнический институт и университет. После работы в Петербурге и в Казани (1825—1834) он прибыл в Московский университет как профессор прикладной математики. За 30 лет работы в университете он заложил научные основы преподавания теоретической и практической механики. Читал он лекции и по математическим дисциплинам. Его научные интересы относились к исследованию принципа наименьшего действия и к гидромеханике. Он был учителем многих выдающихся математиков (П. Л. Чебышев, И. И. Сомов и др.) и механиков (А. С. Ершов, А. Ю. Давидов, Ф. А. Слудский и др.).

Преемник Брашмана по преподаванию механики в университете и на посту президента Московского математического общества А. Ю. Давидов (1823—1885) был ученым широких научных взглядов, счастливо сочетая теоретические и прикладные занятия. Его работы по механике относятся к двум проблемам: теории равновесия тел, погруженных в жидкость, и капиллярным явлениям. Ему принадлежит метод нахождения положений равновесия плавающих тел с помощью поверхности центров (поверхности, на которой размещены все центры тяжести для различных сечений тела постоянного отсеченного объема). Теорию капиллярных явлений Давидов стремился связать с общей теорией равновесия жидкостей и изучать ее средствами аналитической механики с помощью принципа виртуальных перемещений, но с учетом изменения плотности на границах. Математические исследования Давидова относятся к применениям теории вероятностей, дифференциальным уравнениям с частными производными, теории интегрирования.

В конце XIX в. в университете и высшем техническом училище работало сравнительно много математиков прикладного направления: Ф. А. Слудский, Д. Н. Лебедев, Ф. Е. Орлов, В. Л. Цингер. Общепризнанным главой этого научного направления сделался Николай Егорович Жуковский (1847—1921). Он окончил университет в 1868 г. по прикладной математике. Многие годы Жуковский преподавал в университете и в высшем техническом училище. Вступив в математическое общество (1876), он сделался одним из самых активных и авторитетных членов; его избрали вице-президентом (1903—1905), а затем президентом (1905—1921) общества.

В сочинениях и во всей деятельности Жуковского нашло наиболее яркое выражение сочетание ученого — теоретика и инженера-практика. В математике его основные исследования концентрируются вокруг уравнений математической физики, причем почетное место отведено приближенным методам решения. Много работал он над проблемами теории функций комплексного переменного, открыв применения этой теории к решению сложных проблем гидро- и аэромеханики.

Среди многочисленных работ (около 80) Н. Е. Жуковского, написанных до 1900 г., преобладают работы по гидродинамике. В них исследуются проблемы качки судов, реактивные водометные двигатели, трение жидкости в полости тела и т. п. В связи с техническим консультированием московского водопровода Жуковский открыл явление гидравлического удара и разработал его теорию. Кроме того, ему принадлежит большое количество исследований по механике: теории движения твердого тела вокруг неподвижной точки, устойчивости движения и т. д.

В последние годы XIX в. Жуковский сосредоточил усилия на разработке проблем аэромеханики и авиации. С 1889 г. появляются его исследования по теории воздухоплавания. Вскоре он перешел к экспериментам в этой области, построив в Московском университете (1902) первую аэродинамическую трубу. Через два года, в 1904 г., он открыл метод присоединенных вихрей, сделав его основой аэродинамических расчетов. За этим последовала разработка теории подъемной силы крыла и вихревая теория винта. Одновременно расширялись и эксперименты. Вместе с учениками и сотрудниками (число которых быстро росло) Н. Е. Жуковский в 1904 г. принимал участие в проектировании и строительстве первого в России аэродинамического института в Кучино (под Москвой). В 1910 г. он организовал аэродинамическую лабораторию в Московском высшем техническом училище. Неисчислимые научно-теоретические и экспериментальные заслуги Жуковского дали основание В. И. Ленину назвать его «отцом русской авиации».

Жуковский воспитал огромное количество ученых-теоретиков, экспериментаторов, инженеров, офицеров-летчиков. Он был окружен вниманием и заботой Советского правительства. После его смерти в 1921 г. его исследования были продолжены и развиты его учениками, в особенности С. А. Чаплыгиным. Из прикладной математики развились многочисленные отрасли механики — науки многообразной, тесно сочетающей математические методы теоретического исследования с экспериментом и потому особенно важной для современных отраслей новой техники. Советская механика вносит ныне достойный вклад в строительство научно-технической базы коммунизма и насчитывает многочисленных выдающихся представителей (М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев и др.).

Другая научная школа, о которой мы выше упоминали, ведет свое начало от работ К. М. Петерсона по классической дифференциальной геометрии. Петерсон окончил в 1852 г. университет в Тарту. Его учителями были Зенф и Миндинг, которые привили ему, по-видимому, интерес к проблемам дифференциальной геометрии. В кандидатской диссертации «Об изгибании поверхностей» (1853) и в последующих работах Петерсон по существу определил развитие теории поверхностей на долгие годы. Он исследовал изгибания поверхностей, ввел изгибание на главном основании, решал связанную с изгибанием задачу определения поверхности по заданным квадратичным формам, выведя аналитические условия, определяющие поверхность с точностью до положения в пространстве. Эти условия известны как формулы Майнарди-Кодацци, хотя последние получили свои результаты на четыре и пятнадцать лет соответственно позже Петерсона. Кроме того, он нашел изгибания минимальных поверхностей, открыл новые классы поверхностей. К слову отметим, что Петерсон всю жизнь работал преподавателем средней школы, а степень доктора получил в Одесском университете (1879) не за отмеченные работы, а за не столь значительные работы по теории дифференциальных уравнений.

Теория поверхностей и их изгибаний надолго сделалась объектом исследования московских геометров. Вслед за Петерсоном этими проблемами занимался Б. К. Млодзеевский, посвятивший им свою магистерскую диссертацию. Здесь он вывел общее уравнение изгибания (уравнение в частных производных 2-го порядка, выражающее координаты точек поверхности с данным линейным элементом ds^2 в функции величин u, v). Он получил результаты в теории дифференциальных инвариантов поверхностей и многомерных многообразий, а также относительно частных классов поверхностей. Д. Ф. Егоров исследовал трижды ортогональные системы и ввел так называемые потенциальные поверхности (вошедшие в мировую литературу по инициативе Дарбу как поверхности E). Эти работы были впоследствии продолжены его учениками: Л. Н. Сретенским и С. П. Финиковым. Московскую школу дифференциальной геометрии после Егорова возглавляли С. П. Фиников и С. С. Бюшгенс. В настоящее время эта школа представляет активный творческий коллектив, возглавляемый С. П. Финиковым.

Жуковский, Егоров и Млодзеевский в наиболее яркой форме отразили и в значительной мере определили стиль работы математиков Москвы конца XIX — начала XX в. Этот стиль характеризовался широтой научных интересов, отсутствием узкой специализации, стремлением к исследованию обобщающих идей. Вначале Жуковский, а затем Егоров и Млодзеевский ввели в практику преподавания научные семинары и лекции, посвященные новым областям математики. Это ускорило процесс роста молодых ученых. В семинарах университета выросли Н. Н. Лузин, В. В. Голубев, И. И. Привалов, В. В. Степанов, а затем П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, Д. Е. Меньшов, Л. Н. Сретенский, П. С. Урысон, А. Я. Хинчин и др., составившие основу Московской математической школы после Великой Октябрьской социалистической революции и завоевавшие ей своими работами ведущее положение в науке.

Тематически объединение научных интересов значительной части московских математиков (если не сказать, большинства) произошло в начале XX в. вокруг проблем теории множеств и теории функций. Внимание было обращено на исследование основных понятий анализа (функции, производной, интеграла и т. д.) и операций (например, разложение функций в ряды) с более общих точек зрения. Характерным моментом многих исследований сделалось стремление к полному выяснению действительного смыслового объема общих понятий и к их обобщению, когда с их помощью не удается получить исчерпывающий ответ на поставленный вопрос. При этом наметилось много общих черт с творчеством выдающихся французских математиков (Борель, Лебег, Бер и др.), с которыми Егоров и Млодзеевский познакомились во время научных командировок во Францию.

Начало бурному развитию этого нового направления в Москве положили диссертация И. И. Жегалкина о трансфинитных числах и работа Егорова «О последовательностях измеримых функций» (1911). Основным результатом последней явилась теорема: всякая сходящаяся почти всюду последовательность измеримых функций [1] сходится равномерно на замкнутом множестве, дополнение к которому имеет сколь угодно малую меру. Теорема эта сразу же подчеркнула значение исследований по теории функций для всего математического анализа, позволив продвинуть те вопросы, где трудность состоит в исследовании характера непрерывности и сходимости.

Через год, в 1912 г., ученик Д. Ф. Егорова Н. Н. Лузин установил еще более тесную связь структурных свойств измеримых функций с более узким классом непрерывных функций, открыв замечательное C-свойство: всякую измеримую функцию, конечную почти всюду на некотором отрезке, можно изменить на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы она стала непрерывной на всем отрезке. Название этого свойства выбрано по начальной букве французского слова: continuitè, что означает непрерывность.

Открытие C-свойства создало сразу же широкие разносторонние возможности, раскрытые и в значительной степени

---

[1] Измеримые функции — функции, у которых для любого действительного M множество значений x, для которых $f(x)<M$, будет измеримо.

реализованные в книге Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915), представленной им в Московский университет в качестве магистерской диссертации. Значение этой книги, определившей на многие годы вперед линии развития метрической теории функций (т. е. части теории функций, основывающей свои выводы на понятии меры множества), было оценено тотчас по ее появлении присуждением ее автору ученой степени доктора, минуя степень магистра. Поэтому мы уделим некоторое место ее характеристике.

Выяснение взаимосвязей новой теории функций с математическим анализом было главной целью этой книги. Более конкретная постановка задачи состоит в совместном изучении структурных свойств определенных классов функций и аналитического аппарата, изображающего этот класс функций и операции над ним. При этом возможны две взаимно обратные постановки задачи: а) исходя из структурного свойства функции, определить аналитический аппарат, ее изображающий; б) исходя из класса аналитических выражений, отыскать структурное свойство соответствующих функций.

В первой из шести глав книги Лузина дан общий обзор свойств измеримых множеств и измеримых функций и вывод C-свойства. Вторая глава посвящена отысканию примитивной функции. Примитивная, по Лузину, — это непрерывная функция, имеющая данную функцию своей производной почти всюду (последнее обусловлено необходимостью охватить обобщения понятия интеграла, введенные Лебегом и Данжуа). Оказалось, что всякая измеримая функция, конечная почти всюду, имеет примитивную. Лузин искал тут же примеры применения теоремы о существовании примитивной. Он рассмотрел задачу Дирихле для круга. Для произвольной измеримой функции, конечной почти всюду на окружности, он доказал существование гармонической функции, голоморфной внутри круга и принимающей значения этой функции почти всюду на окрестности. Это обстоятельство открыло дорогу для исследований в дальнейшем граничных свойств аналитических функций.

Изучение характеристических свойств первообразных функций, составившее содержание третьей и четвертой глав, привело к выделению интеграла (в смысле Римана, Лебега и Данжуа) с переменным верхним пределом из множества первообразных данной функции.

Класс аналитических выражений, изучаемых Лузиным в развитие общей постановки задачи, — есть класс тригонометрических рядов, прежде всего рядов Фурье. Их свойствам посвящена пятая глава диссертации. Еще в 1912 г. Лузин опубликовал пример тригонометрического ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx \, (A_n \underset{n\to\infty}{\to} 0, \ B_n \underset{n\to\infty}{\to} 0),$$

доказав, что указанные условия не обеспечивают сходимости тригонометрического ряда почти всюду и который почти всюду расходится. Воспроизведя его здесь, он вывел в дальнейшем необходимые и достаточные условия для сходимости почти всюду ряда Фурье для функции с интегрируемым квадратом (т. е. такой, что существует интеграл Лебега от ее квадрата на отрезке от 0 до 2π). Введенный в связи с этим особый интеграл

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi} \frac{g(x+\alpha) - g(x-\alpha)}{\alpha} \cos n\alpha \, d\alpha$$

(где функция $g(x)$ — с интегрируемым квадратом) стал сильным средством исследования. С его помощью Лузин, в частности, открыл свойство почти симметричности измеримых функций.

Шестая глава посвящена определению условий представимости функций тригонометрическими рядами. Здесь исследованы различные методы суммирования тригонометрических рядов, неоднозначность (и даже бесконечнозначность) изображения функции посредством тригонометрических рядов. Выделение единственного способа разложения функции в тригонометрический ряд Лузин связал с обобщением понятия интеграла. Он считал, что неопределенным интегралом от $f(x)$ следует назвать функцию $\Phi(x)$, являющуюся суммой ряда, который получится при интегрировании ряда, изображающего $f(x)$.

Богатство идей, содержащихся в диссертации Лузина, поразительно. Мы смогли дать здесь о нем лишь первоначальное представление. Все основные понятия анализа: функция (в том числе, измеримая), производная, интеграл и др. — подверглись глубокому изучению, с точки зрения меры соответствующих множеств. Метрическая теория функций в России и в СССР имеет в лице Лузина своего основателя.

В 1915 г. Лузин и его ученики, в первую очередь П. С. Александров и М. Я. Суслин, начали заниматься дескриптивной теорией функций — тем ее направлением, в котором исследуются представления широких классов функций при помощи предельного перехода, отправляясь от непрерывных функций.

На историческом рубеже, когда Россия стояла перед Великой Октябрьской социалистической революцией, Московская школа теории функций представляла объединение немногочисленных, но необычайно активно и плодотворно работающих ученых, в большинстве молодых (А. Я. Хинчин, В. В. Голубев, Д. Е. Меньшов, П. С. Александров, М. Я. Суслин, П. С. Урысон и др.). Они и их младшие товарищи и ученики обеспечили в дальнейшем внедрение идей теории функций в топологию, теорию чисел, теорию вероятностей, качественную теорию дифференциальных уравнений, теорию аналитических функций и в другие области математики.

Три научные школы: механики, дифференциальной геометрии и теории функций — вписали наиболее яркие страницы в историю московской математики в период 1860—1917 гг. Однако изучение показывает, что они не исчерпывают всех сторон деятельности математиков Москвы, объединенных в большинстве в научное общество. Более того, многие значительные стороны деятельности Московского математического общества этого периода, оказавшие определенное фактическое влияние на развитие математики, еще слабо изучены. Можно надеяться, что приближающееся столетие Московского математического общества (1864) вызовет новые исследования, полнее раскрывающие деятельность, роль и значение математиков Москвы.

Подведем итог. К началу XX в. Россия имела уже некоторое количество ученых-математиков. Они сосредоточивались в Академии наук и в немногочисленных высших учебных заведениях. В Москве и Петербурге они образовали научные объединения. Сильные коллективы ученых-математиков работали и крепли в ряде городов России. Среди них были выдающиеся представители, прославившие отечественную науку своими достижениями. Однако и эта отрасль отечественной науки (мы имеем в виду математику) носила на себе отпечаток гнетущего влияния отживающего общественно-экономического строя царской России.

Деятельность замечательных ученых-математиков оставалась изолированной. Математические отделения университетов были весьма немногочисленными; математиков-ученых и преподавателей были буквально единицы. Доступ в математику, как и во все другие науки, народным массам был закрыт. Гармонического развития всего фронта математической науки, сколько-нибудь широких связей ее с народным хозяйством не было. В среде математиков было много лиц с реакционными воззрениями.

После Великой Октябрьской социалистической революции, когда народ под руководством Коммунистической партии сломал в жестоких боях и труде отжившее социальное и экономическое устройство и приступил к строительству социализма, наступила пора нового развития математики. Более чем 40-летний период развития советской математики, период замечательных достижений, выдвинувших ее в первые ряды мировой науки, находит свое отражение в коллективных трудах: «Математика в СССР за 15 лет» (1933), «Математика в СССР за 30 лет» (1948) и «Математика в СССР за 40 лет» (1959), а также в многочисленных книгах и статьях.

Советские математики представляют ныне многочисленный отряд интеллигенции. Вместе со всем советским народом они трудятся над построением коммунистического общества в нашей стране, борются за мир во всем мире, за лучшее будущее всего человечества. Изучение и обобщение опыта их практической и теоретической деятельности представляет важную (если не самую важную) задачу научных исследований по истории математики.