§ 111. Средняя длина свободного пробега

Молекулы газа, находясь в тепловом движении, непрерывно сталкиваются друг с другом. Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется **эффективным диаметром** молекулы d (рис. 248). Как мы увидим в дальнейшем (см. § 117), эффективный диаметр несколько уменьшается с увеличением скорости молекул, т. е. с повышением температуры. Величина $\sigma = \pi d^2$ называется **эффективным сечением** молекулы.

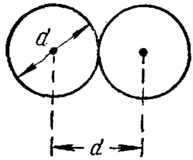

Рис. 248.

За время между двумя последовательными соударениями молекула газа проходит некоторый путь l, который называется длиной свободного пробега. Длина свободного пробега — случайная величина. Иной раз молекуле удается пролететь между соударениями довольно большой путь, в другой раз этот путь может оказаться весьма малым. Как можно показать, вероятность $w(l)$ того, что молекула пролетит без столкновений путь l, определяется формулой

$$w(l) = e^{-\frac{l}{\lambda}}, \tag{111.1}$$

где λ — средний путь l, проходимый молекулой между двумя последовательными соударениями, называемый **средней длиной свободного пробега**. В соответствии с (111.1) вероятность того, что молекула пролетит без столкновений некоторый путь l, убывает экспоненциально с увеличением l. За секунду молекула проходит в среднем путь, равный средней скорости $\bar{v}$. Если за секунду она претерпевает в среднем ν столкновений, то средняя длина свободного пробега, очевидно, будет равна

$$\lambda = \frac{\bar{v}}{\nu}. \tag{111.2}$$

Для того чтобы подсчитать среднее число столкновений ν, предположим вначале, что все молекулы кроме данной, застыли неподвижно на своих местах. Проследим за движением выделенной нами молекулы. Ударившись об одну из неподвижных молекул, она будет лететь прямолинейно до тех пор, пока не столкнется с какой-либо другой неподвижной молекулой (рис. 249). Это соударение произойдет в том случае, если центр неподвижной молекулы окажется от прямой, вдоль которой летит молекула, на расстоянии, меньшем эффективного диаметра молекулы d. В результате столкновения молекула изменит направление своего движения, после чего некоторое время опять будет двигаться прямолинейно, пока на ее пути снова не встретится молекула, центр которой будет находиться в пределах показанного на рис. 249, цилиндра радиуса d.

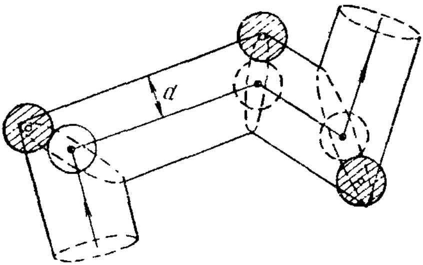

Рис. 249.

За секунду молекула пройдет путь, равный $\bar{v}$. Очевидно, что число происходящих за это время соударений с неподвижными молекулами равно количеству молекул, центры которых попадают внутрь коленчатого цилиндра длины $\bar{v}$ и радиуса d, объем которого равен $\pi d^2 \bar{v}$. Умножив этот объем на число молекул в единице объема n, получим среднее число столкновений за секунду движущейся молекулы с неподвижными:

$$\nu' = \pi d^2 \bar{v} n.$$

В действительности все молекулы движутся, вследствие чего число соударений определяется средней скоростью движения молекул по отношению друг к другу. Как показывает соответствующий расчет, средняя скорость относительно движения молекул в $\sqrt{2}$ раз больше скорости $\bar{v}$ молекул относительно стенок сосуда. Поэтому среднее число столкновений за секунду будет равно

$$\nu = \sqrt{2}\,\pi d^2 \bar{v} n. \tag{111.3}$$

Подставив это число в (111.2), получим для средней длины свободного пробега следующее выражение:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 n}. \tag{111.4}$$

Заменив эффективный диаметр d эффективным сечением молекулы σ, получим следующую формулу:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma n}. \qquad (111.5)$$

Поскольку при постоянной температуре n изменяется пропорционально давлению p, средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению:

$$\lambda \sim \frac{1}{p}. \qquad (111.6)$$

Эффективный диаметр молекул, как уже отмечалось, убывает с ростом температуры. Поэтому средняя длина

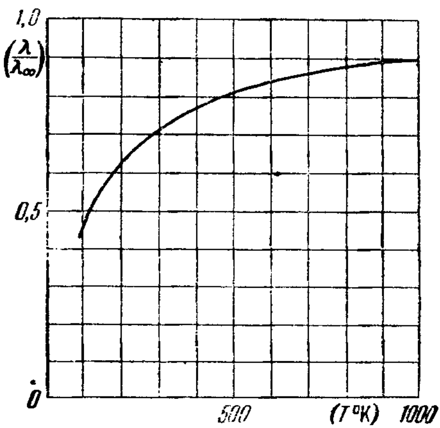

Рис. 250.

свободного пробега с повышением температуры растет. Зависимость λ от T дается формулой Сёзерленда:

$$\lambda = \lambda_\infty \frac{T}{T+C}, \qquad (111.7)$$

где C — характерная для каждого газа постоянная величина, имеющая размерность температуры и носящая название постоянной Сёзерленда, λ_∞ — средняя длина свободного пробега при $T = \infty$.

Из (111.7) следует, что при температуре $T = C$ значение λ составляет $0{,}5\lambda_\infty$.

На рис. 250 показана зависимость λ от температуры для кислорода ($C = 125°$).

Оценим по порядку величины среднюю длину свободного пробега и среднее число столкновений в секунду. В § 92 мы установили, что молекулы имеют размеры порядка нескольких ангстрем. Примем эффективный радиус молекулы равным 1 Å, т. е. 10^{-10} *м*. При нормальных условиях n равно числу Лошмидта, т. е. $2{,}68 \cdot 10^{25}$ $м^{-3}$. Подставив эти данные в формулу (111.4), получим:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-20} \cdot 2{,}68 \cdot 10^{25}} \approx 2 \cdot 10^{-7}\ м = 2 \cdot 10^{-5}\ см.$$

При давлении 10^{-3} *мм* рт. ст. (что соответствует примерно 10^{-6} *ат*) λ будет порядка 10 *см*. Следовательно, если сосуд имеет линейные размеры порядка нескольких сантиметров, то при таком давлении молекулы будут двигаться от стенки к стенке практически без столкновений друг с другом. При давлении 10^{-6} *мм* рт. ст. λ достигает величины порядка десятков метров.

В таблице 8 приведены значения λ при нормальных условиях и эффективные диаметры молекул для некоторых газов.

Таблица 8

Газ	λ, *м* при 0° С и 760 *мм рт. ст.*	d, Å	Газ	λ, *м* при 0° С и 760 *мм рт. ст.*	d, Å
H_2	$1{,}10 \cdot 10^{-7}$	2,75	N_2	$0{,}59 \cdot 10^{-7}$	3,75
He	$1{,}75 \cdot 10^{-7}$	2,18	Воздух	$0{,}60 \cdot 10^{-7}$	3,74
O_2	$0{,}63 \cdot 10^{-7}$	3,64	CO_2	$0{,}39 \cdot 10^{-7}$	4,65

Число столкновений в секунду можно получить, разделив среднюю скорость молекул $\bar{v}$ на λ. В § 106 мы получили для кислорода $\bar{v}$ порядка 500 *м/сек*. Разделив эту величину на взятое из таблицы 8 значение $\lambda = 0{,}63 \cdot 10^{-7}$ *м*, получим, что число столкновений в секунду равно примерно $8 \cdot 10^{9}$ $сек^{-1}$. Таким образом, при нормальных условиях число столкновений составляет несколько миллиардов в секунду. С уменьшением давления число столкновений убывает, изменяясь пропорционально p.