точки, находящиеся на $l = 15$ см ближе к оси, – скорость $v_2 = 5{,}5$ м/с.

86. Для шлифовки деталей на абразивном круге скорость v крайних точек этого круга должна быть равной 94,2 м/с. Определить необходимую частоту вращения, если диаметр круга $d = 0{,}3$ м.

87. Стержень длиной $l = 0{,}5$ м вращается с частотой $n = 2$ с$^{-1}$ вокруг оси, проходящей через стержень перпендикулярно ему. Центростремительное ускорение одного из концов стержня $a = 16{,}1$ м/с^2. Определить линейную скорость другого конца.

2. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ

Методические указания к решению задач

При решении задач по динамике прямолинейного движения следует сначала выяснить, какие силы действуют на интересующие нас тела, и изобразить эти силы на рисунке, выбрать систему координат. Координатные оси выбирают так, чтобы проекции сил и ускорений на них выражались возможно более простым образом. Далее, для каждого тела в отдельности на основании второго закона Ньютона составляют уравнения движения в векторной форме:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = m\vec{a},$$

где $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ – силы, действующие на тело; m – масса тела; $\vec{a}$ – его ускорение. Затем записывают эти уравнения в скалярной форме, т. е. в проекциях на оси координат:

$$F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = ma_x, \quad F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = ma_y.$$

Если движения тел в данной задаче взаимосвязаны, то надо найти уравнения для кинематических величин, отражающие эту связь. Полученную систему уравнений решают относительно искомых величин.

Следует отметить, что второй закон Ньютона дает возможность найти только ускорения тел. Скорости и координаты тел определяют лишь при задании начальных условий.

В задачах, где учитывается трение, нужно находить силу нормальной реакции опоры, определяющую силу трения. Для этого составляют уравнение на основании того, что вдоль координатной оси, перпендикулярной направлению скорости прямолинейно движущегося тела, ускорение отсутствует, и поэтому сумма проекций сил на эту ось равна нулю.

Задачи по динамике движения по окружности решают так же, как и задачи по динамике прямолинейного движения, при этом прямоугольную систему координат рационально выбирать так, чтобы одна из осей (например, OX) была направлена из точки, в которой находится тело, по радиусу к центру окружности. Тогда и при равномерном, и при неравномерном движении по окружности проекция ускорения на эту ось равна модулю центростремительного (нормального) ускорения: $a_x = a_n = v^2/R$, где v – модуль скорости тела в данной точке траектории; R – радиус окружности.

Основные законы и формулы

Первый закон Ньютона (*закон инерции*): всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Инерциальные системы отсчета – это системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона.

Второй закон Ньютона: сумма действующих на тело сил равна произведению массы m этого тела на его ускорение $\vec{a}$.

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

где $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$.

Другая формулировка второго закона Ньютона: изменение импульса тела за время Δt равно импульсу действующей на тело силы $\vec{F}$ за этот же промежуток времени:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t,$$

где $\Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$ – изменение импульса тела; $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ – начальная и конечная скорости тела.

Третий закон Ньютона: силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Закон всемирного тяготения: сила взаимного притяжения двух материальных точек прямо пропорциональна произведению масс этих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2 – гравитационная постоянная.

Сила тяжести $\vec{F}_т$ – это сила притяжения тела Землей:

$$\vec{F}_т = m\vec{g},$$

где m – масса тела: $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

Ускорение свободного падения у поверхности Земли

$$g = GM/R^2,$$

где M – масса Земли; R – ее радиус. На высоте h над поверхностью Земли

$$g_h = GM/(R + h)^2.$$

Вес тела – это сила, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на горизонтальную опору или вертикальный подвес, удерживающие его от свободного падения.

Плотность однородного тела

$$\rho = m/V,$$

где m – масса тела; V – его объем.

Сила трения покоя имеет максимальное значение

$$F_{тр.п\,max} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения; N – сила нормальной реакции опоры.

Сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N.$$

Закон Гука: при упругой деформации растяжения (сжатия) сила упругости пропорциональна вектору удлинения (сжатия) и противоположна ему по направлению:

$$\vec{F}_{упр} = -k\Delta\vec{l},$$

где k – коэффициент упругости (жесткость).

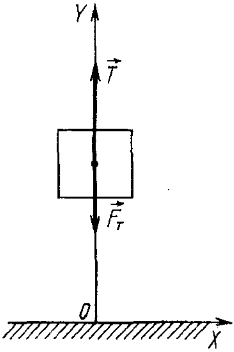
Если F – приложенная сила, l_0 – начальная длина тела, S – площадь его поперечного сечения, то

$$F = \frac{ES}{l_0}|\Delta l|,$$

где E – модуль упругости (модуль Юнга).

Примеры решения задач

88. Подъемный кран поднимает плиту массой $m = 1000$ кг вертикально вверх с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2. Определить силу натяжения каната, удерживающего плиту.



Р и с. 25

Р е ш е н и е. На плиту действуют сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила натяжения каната $\vec{T}$ (рис. 25). Координатную ось OY направим вертикально вверх. Согласно второму закону Ньютона, запишем уравнение в векторной форме:

$$\vec{T} + \vec{F}_т = m\vec{a}.$$

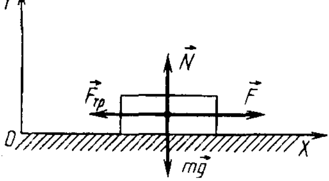
Для проекций на ось OY получим уравнение в скалярной форме:

$$T_y + F_{тy} = ma_y.$$

Так как $T_y = T$, $F_{тy} = -mg$, $a_y = a$, имеем $T - mg = ma$. Отсюда $T = m(g + a)$, $T = 1 \cdot 10^4$ Н.

89. Под действием силы $\vec{F}$, направленной вдоль горизонтальной плоскости, по ее поверхности начинает скользить без начальной скорости тело массой $m = 4$ кг и через $t = 3$ с после начала движения приобретает скорость $v = 0{,}6$ м/с. Найти силу $\vec{F}$, если коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0{,}2$.

Р е ш е н и е. На тело действуют четыре силы: в горизонтальном направлении – сила $\vec{F}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, в вертикальном – сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила нормальной реакции плоскости $\vec{N}$.



Р и с. 26

За положительное направление оси OX примем направление движения тела, ось OY направим вертикально вверх (рис. 26).

Согласно второму закону Ньютона, составим уравнение:

$$\vec{F} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_т + \vec{N} = m\vec{a}.$$

В проекциях на ось OX получим $F - F_{тр} = ma$. Отсюда

$$F = F_{тр} + ma. \qquad (1)$$

Модуль силы N найдем по второму закону Ньютона, составив уравнение в проекциях на ось OY:

$$N_y + F_{тy} = ma_y.$$

Поскольку $N_y = N$, $F_{тy} = -mg$, а $a_y = 0$ (ускорение тела перпендикулярно оси OY), то $N - mg = 0$, $N = mg$. Поэтому, учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, получим

$$F_{тр} = \mu mg. \qquad (2)$$

Так как тело двигалось равноускоренно без начальной скорости, то в момент времени t скорость тела $v = at$. Отсюда

$$a = v/t. \qquad (3)$$

Подставив значения $F_{тр}$ и a из формул (2) и (3) в формулу (1), а затем числовые значения заданных величин, получим

$$F = m(\mu g + v/t),\ F = 9\ \text{Н}.$$

90. По наклонной плоскости с углом наклона α скользит вниз брусок массой m. Найти его ускорение, если коэффициент трения бруска о плоскость равен μ.

Решение. Направим ось OX вдоль наклонной плоскости, а ось OY — перпендикулярно плоскости вверх (рис. 27). На брусок действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, сила нормальной реакции плоскости $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{F}_т + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}.$$

Составим уравнение в проекциях на ось OX:

$$F_{тx} + N_x + F_{тр\,x} = ma_x.$$

Но $F_{тx} = mg\sin\alpha$, $N_x = 0$, $F_{тр\,x} = -F_{тр} = -\mu N$. Поэтому $mg\sin\alpha - \mu N = ma_x$. Отсюда

$$a_x = \frac{mg\sin\alpha - \mu N}{m}. \qquad (1)$$

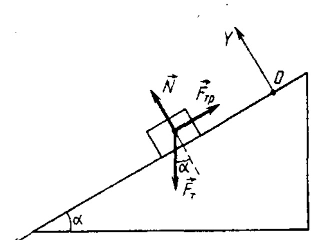


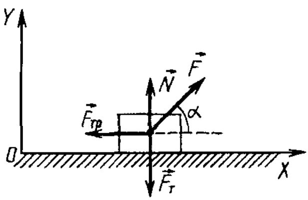
Рис. 27

Модуль силы $\vec{N}$ найдем, как и в предыдущей задаче, составив в проекциях на ось OY уравнение, являющееся следствием второго закона Ньютона: $N - mg\cos\alpha = 0$. Отсюда $N = mg\cos\alpha$. Подставив это значение в формулу (1), получим

$$a_x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Анализ этой формулы показывает, в частности, что при отсутствии трения ($\mu = 0$) $a_x = g\sin\alpha$.

91. Тело движется по горизонтальной плоскости под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонту. Начальная скорость равна нулю. Найти ускорение тела, если его масса равна m, а коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ. При каком модуле силы движение будет равномерным?



Р и с. 28

Р е ш е н и е. На тело действуют четыре силы: сила $\vec{F}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила нормальной реакции плоскости $\vec{N}$ (рис. 28). За положительное направление оси OX примем направление движения тела, ось OY направим вертикально вверх.

Согласно второму закону Ньютона, составим уравнение в векторной форме:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

В проекциях на ось OX получим уравнение $F\cos\alpha - F_{тр} = ma_x$. Отсюда

$$a_x = \frac{F\cos\alpha - F_{тр}}{m}. \quad (1)$$

Модуль силы трения

$$F_{тр} = \mu N. \quad (2)$$

Модуль силы $\vec{N}$ найдем из условия $a_y = 0$ (вдоль оси OY тело не движется): $N - mg + F\sin\alpha = 0$. Отсюда

$$N = mg - F\sin\alpha. \quad (3)$$

На основании формул (1)–(3) получим

$$a_x = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g.$$

Движение будет равномерным при $a_x = 0$, т. е.

$$F_1(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg = 0.$$

Отсюда

$$F_1 = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

92. К бруску массой $m = 6$ кг, лежащему на горизонтальной плоскости, приложена сила $F = 8$ Н, направленная под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Коэффициент трения бруска о плоскость $\mu = 0{,}3$. Найти модуль силы трения и скорость бруска через $t = 2$ с после начала действия силы.

Р е ш е н и е. На брусок действуют четыре силы: сила $\vec{F}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$ и сила нормальной реакции плоскости $\vec{N}$ (см. рис. 28). В задаче ничего не сказано о движении тела.

Предположим, что в указанный момент времени тело движется в положительном направлении оси OX. Тогда, рассуждая так же, как и при решении предыдущей задачи, мы получим

$$a_x = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g.$$

Подставим значения величин и вычислим:

$$a_x = \frac{8}{6}(\cos 45° + 0{,}3\sin 45°) - 0{,}3 \cdot 9{,}8 = -2\ \text{м/с}^2.$$

Получили $a_x < 0$, что противоречит сделанному предположению ($a_x > 0$). Следовательно, тело покоится, т. е. его скорость $v = 0$, а сила трения является силой трения покоя. Для проекций на ось OX получим (с учетом того, что $a_x = 0$) уравнение $F\cos\alpha - F_{\text{тр.п}} = 0$, откуда

$$F_{\text{тр.п}} = F\cos\alpha,\quad F_{\text{тр.п}} = 6\ \text{Н}.$$

93. На горизонтальном столе лежат два связанных нитью груза, массы которых $m_1 = 0{,}3$ кг и $m_2 = 0{,}7$ кг. К грузам приложены противоположно направленные силы $F_1 = 1$ Н и $F_2 = 2$ Н, линии действия которых совпадают с нитью. Найти, с каким ускорением движутся грузы и с какой силой действует нить на каждый груз. Трение не учитывать. Нить считать нерастяжимой и невесомой.

Р е ш е н и е. Обозначим все силы, действующие на грузы, и выберем систему координат (рис. 29, *а*). Запишем, согласно второму закону Ньютона, уравнения движения грузов:

$$\vec{F}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1,\ \vec{F}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2,$$

где $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ – силы реакции опоры; $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ – силы натяжения нити, действующие на первый и второй грузы соответственно.

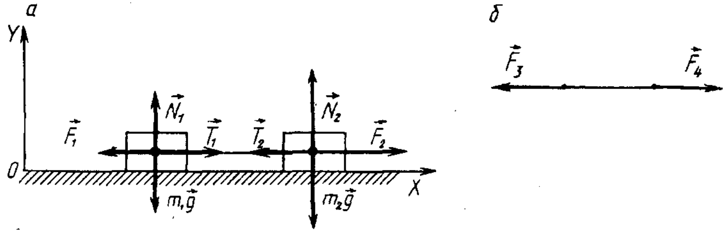
Для проекций на ось OX уравнения примут вид:

$$T_1 - F_1 = m_1 a_{1x},\ F_2 - T_2 = m_2 a_{2x}. \qquad (1)$$

Нерастяжимость нити означает постоянство ее длины. Поскольку грузы перемещаются только вправо, то разность их координат, равная длине нити, остается постоянной, т. е. $x_2 - x_1 = \text{const}$. (В задачах по кинематике и динамике тела рассматриваются как материальные точки и только для наглядности их изображают на рисунках в виде квадратиков, кружочков и т. п.) Взяв производную по времени левой и правой частей последнего равенства, получим $x_1' - x_2' = 0$, или $x_1' = x_2'$. Возьмем еще раз производную по времени, получим $x_1'' = x_2''$, т. е. $a_{1x} = a_{2x}$. Таким образом, из условия нерастяжимости нити следует, что ускорения связанных тел и всех точек нити одинаковы:

$$a_{1x} = a_{2x} = a_x. \qquad (2)$$

Докажем теперь, что модули сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ равны, если нить невесома. Обозначим через $\vec{F}_3$ силу, действующую на нить со стороны первого тела, а через $\vec{F}_4$ – со стороны



Р и с. 29

второго (рис. 29, *б*). Согласно второму закону Ньютона, уравнение движения нити имеет вид

$$\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = m\vec{a},$$

где m – масса нити; $\vec{a}$ – ускорение. Поскольку нить невесома, то $m = 0$. Тогда $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}$. Следовательно, $\vec{F}_3 = -\vec{F}_4$.

Согласно третьему закону Ньютона, с какой силой тело действует на нить, с такой же по модулю, но направленной противоположно силой, действует нить на тело. Поэтому $\vec{T}_1 = -\vec{F}_3$, $\vec{T}_2 = -\vec{F}_4$. Если учесть теперь, что $\vec{F}_3 = -\vec{F}_4$, то получим $\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$. Следовательно,

$$T_1 = T_2 = T. \qquad (3)$$

Таким образом, из условия невесомости нити следует, что такая нить действует на связанные тела с силами, равными по модулю и противоположными по направлению.

Перепишем уравнения (1) с учетом равенств (2) и (3):

$$T - F_1 = m_1 a,\ F_2 - T = m_2 a.$$

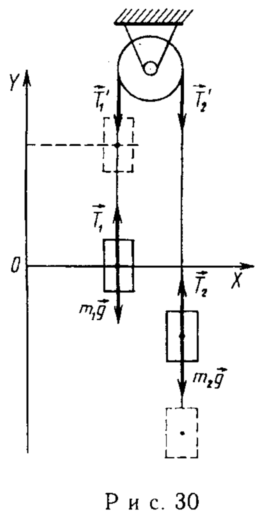
Решив эту систему двух уравнений, получим:

$$a = \frac{F_2 - F_1}{m_1 + m_2},\ T = \frac{F_1 m_2 + F_2 m_1}{m_1 + m_2},\ a = 0{,}8\ \text{м}/\text{с}^2,\ T = 0{,}8\ \text{Н}.$$

94. Через блок, массой которого можно пренебречь, перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы $m_1 = 2{,}0$ кг и $m_2 = 2{,}1$ кг. Начальные скорости грузов равны нулю. Каково перемещение грузов за время $\tau = 3{,}0$ с? Какова сила натяжения нити? С какой силой давит нить на блок?

Р е ш е н и е. Силы, действующие на грузы, а также выбранное направление координатной оси OY показаны на рис. 30. Начало координат совмещено с начальным положением левого груза.

Согласно второму закону Ньютона, запишем уравнение движения для каждого груза:



Р и с. 30

$$\vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1,\ \vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2.$$

Поскольку нить нерастяжима и невесома, то $a_1 = a_2 = a$, $T_1 = T_2 = T$. С учетом этого составляем уравнения движения грузов в проекциях на ось OY:

$$T - m_1 g = m_1 a,\ T - m_2 g = -m_2 a,$$

где a – ускорение. Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$g(m_2 - m_1) = a(m_1 + m_2),$$

откуда

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}.$$

Уравнение для координаты левого груза запишется так:

$$y = at^2/2.$$

В момент времени τ $y = s$. Таким образом, модуль перемещения

$$s = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{g(m_2 - m_1)\tau^2}{2(m_1 + m_2)},\ s = 1{,}1\ \text{м}.$$

Силу натяжения нити найдем из уравнения движения левого груза:

$$T = m_1(g + a) = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2},\ T = 20\ \text{Н}.$$

На блок действуют силы натяжения нити $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$, а также сила реакции оси $\vec{N}$. Блок находится в равновесии, следовательно, $\vec{T}_1' + \vec{T}_2' + \vec{N} = \vec{0}$. Так как $T_1' = T_1 = T$, $T_2' = T_2 = T$, то для проекций сил на ось OY получим $N - 2T = 0$, откуда $N = 2T$.

По третьему закону Ньютона сила, с которой ось действует на блок, равна по модулю и противоположна по направлению силе $\vec{F}$, с которой блок давит на ось: $\vec{N} = -\vec{F}$. Следовательно, $F = N = 2T$. Подставив в эту формулу выражение для T, найдем:

$$F = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2},\ F = 40\ \text{Н}.$$

95. Тело массой m_1 движется вверх по наклонной плоскости под действием связанного с ним невесомой и нерастяжимой нитью груза массой m_2. Начальные скорости тела и груза равны нулю, коэффициент трения тела о плоскость μ, угол наклона плоскости α. Определить ускорение, с которым движется тело, и силу натяжения нити. Блок невесом и вращается без трения.

Р е ш е н и е. На тело, движущееся по наклонной плоскости, действуют сила тяжести $\vec{F}_{т1} = m_1\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}_1$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и сила реакции плоскости $\vec{N}$. На груз действуют сила тяжести $\vec{F}_{т2} = m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$. Согласно второму закону Ньютона,

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр} + \vec{N} = m_1\vec{a}_1,$$

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2,$$

где $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ — ускорение тела и груза соответственно.

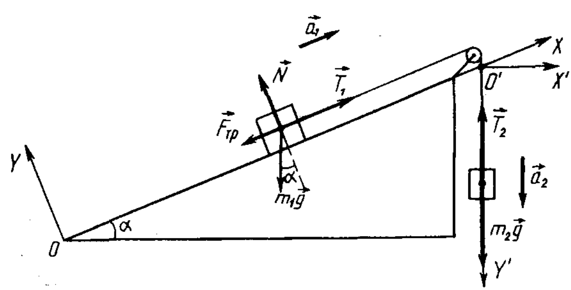
Поскольку нить невесома и нерастяжима, тело и груз движутся с одинаковыми по модулю ускорениями, т. е. $a_1 = a_2 = a$ и $T_1 = T_2 = T$.

Выберем для тела систему отсчета так, чтобы начало координат совпадало с нижним концом наклонной плоскости, ось OX была направлена вверх вдоль плоскости, ось OY — перпендикулярно ей (рис. 31). Запишем уравнение движения тела в проекциях на ось OX:

$$T_{1x} + N_x + m_1 g_x + F_{трx} = m_1 a_{1x}.$$

Учитывая, что $T_{1x} = T$, $N_x = 0$, $m_1 g_x = -m_1 g\sin\alpha$, $F_{трx} = -F_{тр} = -\mu N$, $a_{1x} = a$, получаем

$$T - m_1 g\sin\alpha - \mu N = m_1 a. \qquad (1)$$



Р и с. 31

Ускорение груза во всех инерциальных системах отсчета одинаковое.

Для груза выберем систему координат $X'O'Y'$ так, чтобы ось $O'Y'$ была направлена вертикально вниз. В этой системе уравнение движения груза имеет вид

$$m_2 g - T = m_2 a. \tag{2}$$

Решив относительно a систему уравнений (1) и (2), найдем

$$a = \frac{m_2 g - \mu N - m_1 g \sin\alpha}{m_1 + m_2}. \tag{3}$$

В направлении оси OY ускорение тела равно нулю, поэтому $N - m_1 g \cos\alpha = 0$, откуда $N = m_1 g \cos\alpha$. Подставив это значение в формулу (3), получим

$$a = \frac{g(m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha))}{m_1 + m_2}. \tag{4}$$

Отсюда видно, что описанное в задаче движение (при $v_0 = 0$) может быть реализовано при $m_2 \geqslant m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

Из формул (2) и (4) найдем модуль силы натяжения нити:

$$T = \frac{m_1 m_2 g(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}.$$

96. На горизонтальной плоскости расположены три связанных друг с другом нитями бруска массами m_1, m_2 и m_3. На нити, прикрепленной к бруску массой m_1 и перекинутой через неподвижный блок, подвешен груз массой m_4. Найти ускорение этой системы и силы натяжения всех нитей. Трение не учитывать, массой нитей и блока пренебречь, нити считать нерастяжимыми и невесомыми.

Решение. Силы, действующие на бруски, изображены на рис. 32. Если тела связаны невесомыми и нерастяжимыми нитями, то модули сил натяжения для каждой нити равны между собой и все тела движутся с одинаковым по модулю ускорением. Поэтому $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$, $T_3' = T_3$, $a_{1x} = a_{2x} = a_{3x} = a$, $a_{4y} = -a$. Учитывая это, записываем в проекциях на оси OX и OY уравнения движения для каждого бруска и для груза:

$$T_1 - T_2 = m_1 a,\ T_2 - T_3 = m_2 a,$$

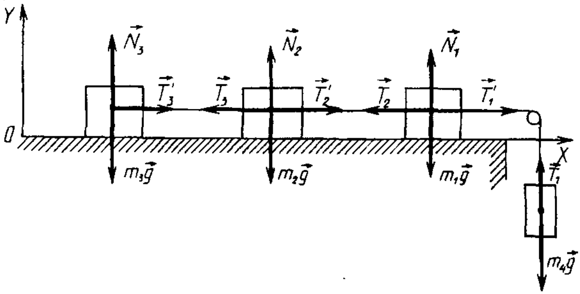


Рис. 32

$$T_3 = m_3 a, \; -m_4 g + T_1 = -m_4 a.$$

Складывая почленно первые три уравнения и вычитая затем четвертое, получаем

$$m_4 g = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)a,$$

откуда

$$a = \frac{m_4 g}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Подставив это значение ускорения во все уравнения движения, начиная с последнего, найдем силы натяжения нитей:

$$T_1 = m_4 g \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}, \; T_2 = m_4 g \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4},$$

$$T_3 = m_4 g \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

97. В кабину лифта помещен динамометр, к которому подвешен груз массой m. Каковы показания динамометра в следующих случаях: 1) лифт покоится; 2) лифт поднимается с ускорением $\vec{a}_1$, направленным вверх; 3) лифт опускается с ускорением $\vec{a}_2$, направленным вниз ($a_2 < g$); 4) лифт свободно падает?

Решение. Координатную ось OY направим вертикально вверх (рис. 33). На груз действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила упругости $\vec{F}$ (динамометр показывает модуль этой силы).

Воспользовавшись вторым законом Ньютона, запишем уравнение движения в векторной форме:

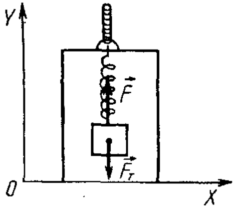


Рис. 33

$$\vec{F} - \vec{F}_т = m\vec{a},$$

а затем в проекциях на ось OY: $F - mg = ma_y$, откуда

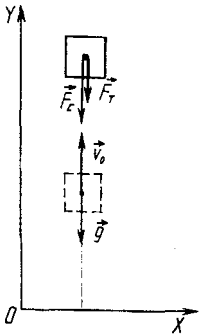
$$F = m(g + a_y).$$

В первом случае $a_y = 0$, поэтому динамометр покажет $F_0 = mg$. Во втором случае $a_y = a_1$. Следовательно, $F_1 = m(g + a_1)$. В третьем случае $a_y = -a_2$, поэтому $F_2 = m(g - a_2)$. В четвертом случае $a_y = -g$ и $F_3 = m(g - g) = 0$, т. е. наступает состояние невесомости.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что вес тела (показания динамометра) зависит от ускорения, с которым движется лифт: при ускоренном движении вверх вес тела увеличивается, при ускоренном движении вниз – уменьшается, при свободном падении – равен нулю. Лишь при $a = 0$, т. е. если лифт покоится или движется равномерно, модуль веса равен модулю силы тяжести ($F = mg$).

Предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть следующие случаи: лифт движется вверх замедленно с ускорением a_3; лифт движется вниз замедленно с ускорением a_4; лифт движется вниз ускоренно с ускорением $a_5 = 2g$.

98. Тело массой $m = 40$ г было брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с и достигло высшей точки подъема через $t_1 = 2{,}5$ с. Считая силу сопротивления воздуха $\vec{F}_с$, действующую на тело во время подъема, постоянной, найти модуль этой силы.



Р и с. 34

Р е ш е н и е. Координатную ось OY направим вертикально вверх (рис. 34). На тело действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_с$. Согласно второму закону Ньютона, уравнение движения в векторной форме имеет вид

$$\vec{F}_т + \vec{F}_с = m\vec{a},$$

а в проекциях на ось OY примет вид $-mg - F_с = ma_y$. Отсюда

$$F_с = m(-a_y - g). \qquad (1)$$

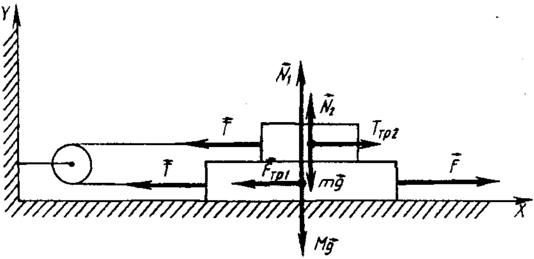
Чтобы найти проекцию ускорения тела на ось OY, воспользуемся уравнением для скорости: $v_y = v_{0y} + a_y t$. Учитывая, что $v_{0y} = v_0$ и в высшей точке подъема $v_y = 0$, $t = t_1$, получаем

$$a_y = -v_0/t_1. \tag{2}$$

На основании формул (1) и (2) находим:

$$F_c = m(v_0/t_1 - g),\ F_c = 88 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

99. Находящаяся на гладком полу доска связана с лежащим на ней бруском нитью, перекинутой через невесомый блок (рис. 35). Масса доски M, масса бруска m, коэффициент трения между ними равен μ. С каким ускорением будет двигаться доска, если приложить к ней горизонтально направленную силу $\vec{F}$? Нить считать невесомой и нерастяжимой.



Р и с. 35

Р е ш е н и е. На доску действуют сила $\vec{F}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, сила трения $\vec{F}_{тр1}$, сила тяжести $M\vec{g}$ и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}_1$, на брусок – силы $\vec{T}$, $m\vec{g}$, $\vec{N}_2$ и сила $\vec{F}_{тр2}$, равная по модулю силе $\vec{F}_{тр1}$ и направленная противоположно ей.

Согласно второму закону Ньютона, запишем уравнения движения доски и бруска:

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{F}_{тр1} + M\vec{g} + \vec{N}_1 = M\vec{a}_1,\ \vec{F}_{тр2} + \vec{T} + \vec{N}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}_2,$$

где $\vec{a}_1$ – ускорение доски; $\vec{a}_2$ – ускорение бруска. Они противоположны по направлению и равны по модулю: $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$, $a_1 = a_2 = a$.

В проекциях на ось OX уравнения примут вид:

$$F - T - F_{тр1} = Ma,\ -T + F_{тр2} = -ma.$$

Учитывая, что $F_{тр1} = F_{тр2} = \mu N_2 = \mu mg$, получим:

$$F - T - \mu mg = Ma, \; -T + \mu mg = -ma.$$

Отсюда следует:

$$a = \frac{F - 2\mu mg}{M + m}.$$

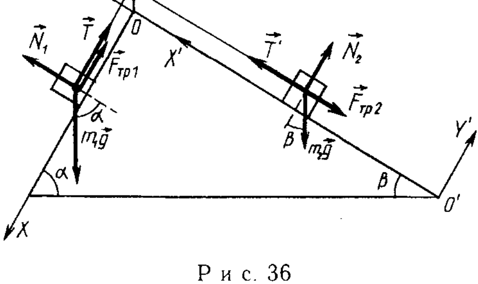
Такое ускорение будет только при условии $F > 2\mu mg$. При $F < 2\mu mg$ доска и брусок останутся неподвижными.

100. Два груза массами $m_1 = 4{,}0$ кг и $m_2 = 1{,}0$ кг связаны нитью, перекинутой через блок, который прикреплен к вершине призмы, и могут скользить по граням этой призмы. Начальные скорости грузов равны нулю. Найти ускорение грузов, если $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, а коэффициент трения грузов о плоскость $\mu = 0{,}20$. Массой блока и трением на его оси пренебречь, нить считать невесомой и нерастяжимой.

Р е ш е н и е. На рис. 36 показаны системы координат XOY и $X'O'Y'$, выбранные для первого и второго грузов соответственно, а также обозначены все силы, действующие на грузы, в предположении, что левый груз движется вдоль оси OX вниз, а правый – вдоль оси $O'Y'$ вверх по призме. Но верно ли это предположение?

В задаче ничего не сказано о направлении движения грузов, а его нужно знать, чтобы правильно указать направления сил трения.

Чтобы выяснить, куда движутся грузы, будем рассматривать их и нить как части одной системы. Внутренние силы взаимодействия грузов и нити не могут сообщить ускорение системе как единому целому. Предположим теперь, что сил трения $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ нет, а есть только силы тяжести. Модуль



Р и с. 36

составляющей силы тяжести $m_1\vec{g}$ вдоль левой грани равен $m_1 g \sin\alpha = 4 \cdot 9{,}8 \sin 60° = 34$ Н, а силы тяжести $m_2\vec{g}$ вдоль правой грани равен $m_2 g \sin\beta = 1 \cdot 9{,}8 \sin 30° = 4{,}9$ Н. Так как $m_1 g \sin\alpha > m_2 g \sin\beta$, левый груз будет двигаться вниз по призме, а правый – вверх. При наличии сил трения грузы будут двигаться точно так же, потому что сила трения, возникающая при движении тела, не может изменить направление его скорости. Теперь мы можем правильно указать направления сил трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$ и $\vec{F}_{\text{тр}2}$, что и сделано на рисунке.

Составим для каждого груза уравнение движения в векторной форме:

$$m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{тр}1} = m_1\vec{a},$$

$$m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{\text{тр}2} = m_2\vec{a}.$$

В проекциях на оси OX и $O'X'$ с учетом того, что $T = T'$, $a_{1x} = a_{2x'} = a$, $F_{\text{тр}1} = \mu N_1$, $F_{\text{тр}2} = \mu N_2$, уравнения примут вид:

$$m_1 g \sin\alpha - T - \mu N_1 = m_1 a, \tag{1}$$

$$T - m_2 g \sin\beta - \mu N_2 = m_2 a. \tag{2}$$

Исключив из формул (1) и (2) T, найдем

$$a = \frac{g(m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta) - \mu(N_1 + N_2)}{m_1 + m_2}. \tag{3}$$

Поскольку проекция ускорения левого груза на ось OY $a_{1y} = 0$, а правого на ось $O'Y'$ $a_{2y'} = 0$, то

$$N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0, \;\; N_2 - m_2 g \cos\beta = 0.$$

Отсюда

$$N_1 = m_1 g \cos\alpha, \;\; N_2 = m_2 g \cos\beta. \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) находим:

$$a = g\frac{m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2(\sin\beta + \mu\cos\beta)}{m_1 + m_2}, \; a = 4{,}7 \text{ м/с}^2.$$

101. С какой средней силой $\vec{F}$ давит на плечо ручной пулемет при стрельбе, если масса пули $m = 10$ г, ее скорость при вылете $v = 800$ м/с и скорострельность пулемета $n = 600$ выстрелов в минуту?

Р е ш е н и е. Согласно второму закону Ньютона,

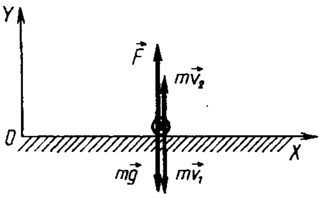
$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p},$$

где $\Delta\vec{p}$ – изменение импульса за время Δt. В проекциях на горизонтальное направление эта формула примет вид $F\Delta t = \Delta p$.

За время Δt импульс пуль изменяется на $\Delta p = mvn$. Поэтому, учитывая, что Δt = 1 мин = 60 с, находим:

$$F = mvn/\Delta t,\ F = 80\ \text{Н}.$$

102. Шарик массой m = 20 г падает со скоростью v_1 = = 5,0 м/с на стальную плиту и отскакивает от нее в прямо противоположном направлении со скоростью v_2 = 4,0 м/с. Определить модуль изменения импульса шарика и модуль средней силы, действующей на шарик во время удара, если соударение длилось $\tau = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ с. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Р и с. 37

Р е ш е н и е. Выбрав направления осей OX и OY так, как показано на рис. 37, укажем векторы импульса шарика до и после удара. Изменение импульса шарика – это вектор

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1.$$

Модуль этого вектора

$$|\Delta\vec{p}| = \sqrt{(\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2},$$

где Δp_x, Δp_y – проекции вектора $\Delta\vec{p}$ на оси OX и OY соответственно.

Находим: $\Delta p_x = 0$, $\Delta p_y = mv_{2y} - mv_{1y} = mv_2 + mv_1 = m(v_1 + v_2)$. Следовательно, модуль изменения импульса шарика.

$$|\Delta\vec{p}| = m(v_1 + v_2). \qquad (1)$$

Согласно второму закону Ньютона, изменение импульса тела равно импульсу силы. На шарик действуют во время удара две силы: сила нормальной реакции плиты $\vec{F}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Поэтому на основании второго закона

Ньютона $\Delta\vec{p} = (\vec{F} + m\vec{g})\tau$. В проекциях на ось OY имеем $m(v_1 + v_2) = (F - mg)\tau$. Отсюда

$$F = \frac{m(v_1 + v_2)}{\tau} + mg. \tag{2}$$

Подставив числовые значения величин в формулы (1) и (2), получим: $|\Delta\vec{p}| = 0{,}18$ кг · м/с, $F = 18$ Н.

Обратим внимание на то, что модуль изменения импульса $|\Delta\vec{p}|$ и изменение модуля вектора $\vec{p}$, определяемое как $\Delta p = p_2 - p_1$, — это разные величины. В данном опыте, например, $|\Delta\vec{p}| = 0{,}18$ кг · м/с, $\Delta p = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - v_1) = -20 \cdot 10^{-3}$ кг · м/с.

103. Шофер автомобиля резко затормозил при скорости $v_0 = 72$ км/ч. Через какое время τ автомобиль остановится, если коэффициент трения $\mu = 0{,}60$? Чему равен тормозной путь l автомобиля?

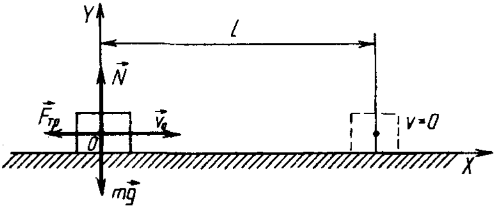


Рис. 38

Решение. Координатную ось OX выберем так, чтобы вектор скорости $\vec{v}_0$ был направлен в сторону положительного направления этой оси (рис. 38). Начало координат совместим с положением автомобиля в тот момент, когда шофер нажал на тормоз, и время будем отсчитывать с этого момента. Тогда движение автомобиля описывается кинематическими уравнениями:

$$x = v_{0x}t + a_x t^2/2, \tag{1}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \tag{2}$$

где x — координата автомобиля в момент времени t; $v_{0x} = v_0$, v_x, a_x — проекции на ось OX начальной скорости, скорости в момент t и ускорения соответственно.

На автомобиль действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Согласно второму закону Ньютона, составим уравнение в векторной форме:

$$\vec{F}_{тр} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a},$$

а потом для проекций на оси OX и OY: $-F_{тр} = ma_x$, $N - mg = 0$. Отсюда находим:

$$a_x = -F_{тр}/m, \; N = mg.$$

Учитывая, что сила трения $F_{тр} = \mu N = \mu mg$, получаем

$$a_x = -\mu g. \qquad (3)$$

В момент остановки автомобиля $t = \tau$, $v_x = 0$. На основании уравнения (2) с учетом равенства (3) получим $0 = v_0 - \mu g\tau$. Отсюда

$$\tau = \frac{v_0}{\mu g}. \qquad (4)$$

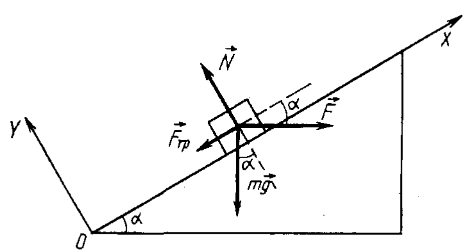
В момент остановки $x = l$. Подставив это значение, а также (3) и (4) в уравнение (1), найдем

$$l = v_0\tau - \frac{\mu g\tau^2}{2} = v_0\frac{v_0}{\mu g} - \frac{\mu g}{2}\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \qquad (5)$$

Произведя вычисления по формулам (4) и (5), получим: $\tau = 3{,}4$ с, $l = 34$ м.

104. Груз массой $m = 5{,}0$ кг перемещается вверх по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ и коэффициентом трения $\mu = 0{,}05$. К грузу параллельно основанию приложена сила $F = 50$ Н. Найти ускорение груза.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат так, чтобы ось OX была направлена вверх вдоль плоскости, а ось OY – перпендикулярно ей (рис. 39). На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции плоскости $\vec{N}$, при-



Р и с. 39

ложенная сила $\vec{F}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. На основании второго закона Ньютона

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Составим уравнения для проекций сил на оси OX и OY:

$$F\cos\alpha - mg\sin\alpha - F_{тр} = ma_x, \qquad (1)$$

$$N - mg\sin\alpha - F\sin\alpha = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) найдем $N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha$, тогда $F_{тр} = \mu N = \mu(mg\cos\alpha + F\sin\alpha)$. Подставим это значение в уравнение (1):

$$F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha + F\sin\alpha) = ma_x.$$

Отсюда

$$a_x = \frac{F}{m}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \qquad (3)$$

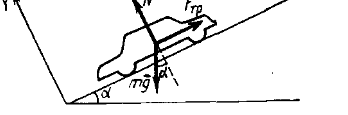
Очевидно, что при выбранной системе координат модуль ускорения $a = a_x$. По формуле (3) получим $a = 3{,}2$ м/с^2.

105. Автомобиль начинает двигаться с максимальным ускорением из состояния покоя вверх по наклонной плоскости с углом наклона α и коэффициентом трения μ. Найти время τ, за которое автомобиль пройдет путь l. Силой сопротивления воздуха и силой трения качения пренебречь.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат так, чтобы начало координат совпадало с точкой, из которой автомобиль начал двигаться. Ось OX направим вверх вдоль плоскости, а ось OY – перпендикулярно ей (рис. 40). Время будем отсчитывать с момента начала движения автомобиля. Тогда зависимость координаты автомобиля от времени выразится уравнением $x = a_x t^2/2$, так как $v_0 = 0$. При $t = \tau$ координата $x = l$, поэтому $l = a_x\tau^2/2$, откуда

$$\tau = \sqrt{2l/a_x}, \qquad (1)$$

где a_x – проекция вектора ускорения автомобиля на ось OX. Эту проекцию мы найдем по второму закону Ньютона.



Р и с. 40

На автомобиль действуют три постоянные силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. В данном случае сила трения – это сила трения покоя, действующая на ведущие колеса со стороны дороги. Препятствуя проскальзыванию, эта сила направлена вперед и приводит в движение автомобиль, т. е. это и есть так называемая сила тяги. Заметим, что нередко можно услышать ответ, что сила тяги действует со стороны двигателя, а указанная выше сила трения направлена противоположно скорости автомобиля. Это, конечно, неверно.

Согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{F}_{\text{тр}} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

В проекциях на выбранные оси уравнения движения будут иметь вид:

$$F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha = ma_x, \ \ N - mg\sin\alpha = 0.$$

Учитывая, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, решим относительно a_x полученную систему уравнений и найдем

$$a_x = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Подставив это значение в выражение (1), получим

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}} = \sqrt{\frac{2l}{g(\mu - \operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha}}.$$

Из этой формулы видно, что автомобиль сможет ехать вверх по плоскости при условии $\operatorname{tg}\alpha < \mu$.

106. От поезда, идущего по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью v_0, отцепилась $1/3$ состава. Через некоторое время скорость отцепившихся вагонов уменьшилась в 2 раза. Считая, что сила тяги при разрыве состава не изменилась, определить скорость головной части поезда в этот момент. Сила сопротивления движению пропорциональна силе тяжести и не зависит от скорости. Коэффициент сопротивления движению равен отношению модуля силы сопротивления к модулю силы нормальной реакции опоры.

Р е ш е н и е. На рис. 41 схематически показаны поезд массой m, его головная часть массой m_1 и отцепившаяся часть массой m_2. Положительное направление координатной оси OX совпадает с направлением движения поезда,

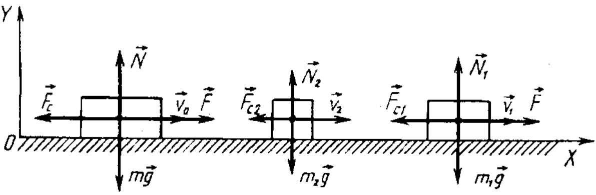


Рис. 41

ось OY направлена вертикально вверх. Время будем отсчитывать с момента отцепки.

До отцепки поезд шел равномерно. Следовательно, выполнялось условие равновесия

$$\vec{F} + \vec{F}_c + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{0},$$

где $\vec{F}$ – сила тяги; $\vec{F}_c$ – сила сопротивления движению; $\vec{N}$ – сила нормальной реакции пути; $m\vec{g}$ – сила тяжести. Спроектировав силы на оси OX и OY, получим: $F - F_c = 0$, $N - mg = 0$, откуда $F = F_c$, $N = mg$.

Для поезда сила сопротивления движению $F_c = \mu N = \mu mg$, где μ – коэффициент сопротивления движению, учитывающий силу трения качения, силу трения на осях, силу сопротивления воздуха.

Для отцепившейся части сила сопротивления $F_{c2} = \mu m_2 g$, для головной части $F_{c1} = \mu m_1 g$. Учитывая, что $F = \mu mg$, $m_2 = m/3$, $m_1 = 2m/3$, получаем:

$$F_{c2} = F/3, \qquad (1)$$

$$F_{c1} = 2F/3. \qquad (2)$$

Так как сила тяги при разрыве не изменилась, то головная часть стала двигаться с ускорением и через время t_1 после отцепки двигалась со скоростью $\vec{v}_1$, которую можно определить из кинематического уравнения в проекциях на ось OX:

$$v_1 = v_0 + a_x t_1, \qquad (3)$$

где a_x – проекция ускорения на эту ось.

Составим на основании второго закона Ньютона уравнение движения головной части:

$$\vec{F} + \vec{F}_{c1} + \vec{N}_1 + m_1\vec{g} = m\vec{a}.$$

Запишем уравнение в проекциях на ось OX:

$$F - F_{c1} = m_1 a_x, \text{ или } F - \frac{2}{3}F = \frac{2}{3}ma_x,$$

откуда $a_x = F/(2m)$. Подставив это значение в формулу (3), получим

$$v_1 = v_0 + Ft_1/(2m). \tag{4}$$

Составим теперь уравнение движения отцепившейся части, на которую в горизонтальном направлении действует только сила сопротивления $\vec{F}_{c2}$. Согласно второму закону Ньютона, импульс этой силы равен изменению импульса тела:

$$\vec{F}_{c2}t_1 = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_0,$$

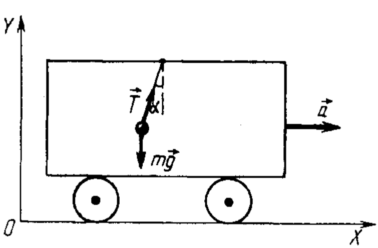
где $\vec{v}_2$ — скорость этой части в момент времени t_1. Для проекций на ось OX уравнение будет иметь вид

$$-F_{c2}t_1 = m_2v_2 - m_2v_0.$$

Подставив в это уравнение значения $m_2 = m/3$, $v_2 = v_0/2$, $F_{c2} = F/3$ и решив его, получим $F = mv_0/(2t_1)$. Это значение подставим в выражение (4) и найдем $v_1 = 5v_0/4$.

107. В вагоне, движущемся горизонтально с постоянным ускорением $a = 3{,}0$ м/с^2, на проволоке висит груз массой $m = 2$ кг. Определить силу натяжения проволоки и угол ее отклонения от вертикали. Груз относительно вагона неподвижен.

Р е ш е н и е. Неподвижную систему координат XOY свяжем с рельсами так, что положительное направление оси OX совпадает с направлением вектора ускорения $\vec{a}$, а ось OY направим вертикально вверх (рис. 42). На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения проволоки $\vec{T}$. На основании второго закона Ньютона $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$. Составим уравнения для проекций на оси OX и OY:



Р и с. 42

$$T\sin\alpha = ma,$$
$$T\cos\alpha - mg = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем:

$$T = m\sqrt{g^2 + a^2}, \ T = 21 \text{ Н}, \ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{g}, \ \alpha = 17°.$$

108. Шарик массой m подвешен на нити. В натянутом состоянии нить расположили горизонтально и отпустили шарик. Вывести зависимость силы натяжения T нити от угла α, который нить образует в данный момент с горизонтальным направлением. По выведенной формуле найти силу натяжения нити для случая прохождения шарика через положение равновесия.

Решение. Пусть в некоторый момент шарик находится в точке 2 и нить составляет с горизонтальным направлением угол α (рис. 43).

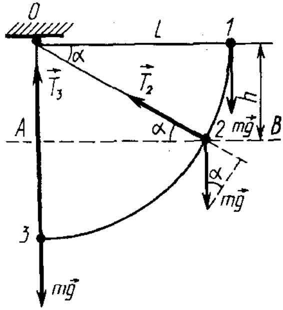


Рис. 43

Шарик движется неравномерно по окружности, радиус которой равен длине l нити. На шарик действуют сила натяжения $\vec{T}$ нити и сила тяжести $m\vec{g}$. Согласно второму закону Ньютона, $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение. Направив ось OX из точки 2 вдоль нити к центру окружности и спроектировав на эту ось силы и ускорение, получим уравнение

$$T = mg\sin\alpha = ma_x. \tag{1}$$

При неравномерном движении по окружности ускорение $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, где $\vec{a}_n$ – центростремительное (нормальное) ускорение; $\vec{a}_\tau$ – касательное (тангенциальное) ускорение. Следовательно, $a_x = a_{nx} + a_{\tau x}$. Но $a_x = a_n = v^2/l$, $a_{\tau x} = 0$, поэтому $a_x = v^2/l$, где v – модуль скорости шарика в точке 2. Подставив это выражение в уравнение (1), получим

$$T = m\left(g\sin\alpha + \frac{v^2}{l}\right). \tag{2}$$

Скорость шарика в точке 2 определим, используя закон сохранения механической энергии. Уровень AB отсчета потенциальной энергии выберем так, чтобы он проходил через точку *2*. Обозначим h высоту точки *1* над уровнем AB.

Согласно закону сохранения механической энергии,

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}, \tag{3}$$

где $E_{p1} = mgh$, $E_{p2} = 0$ – потенциальная энергия шарика в точках *1* и *2* соответственно; $E_{k1} = 0$, $E_{k2} = mv^2/2$ – кинетическая энергия шарика в точках *1* и *2* соответственно.

Учитывая, что $h = l\sin\alpha$, на основании равенства (3) получаем $mgl\sin\alpha = mv^2/2$, откуда

$$v^2/l = 2g\sin\alpha.$$

Подставив это значение в формулу (2), получим искомую зависимость силы натяжения T от угла α:

$$T = 3mg\sin\alpha.$$

В частности, при прохождении шарика через положение равновесия (точка *3*) $\alpha = 90°$, поэтому $T_3 = 3mg$.

109. Шарик, прикрепленный к невесомой и нерастяжимой нити, движется в горизонтальной плоскости по окружности с постоянной скоростью (конический маятник). Расстояние от точки подвеса до горизонтальной плоскости равно h. Найти период обращения шарика.

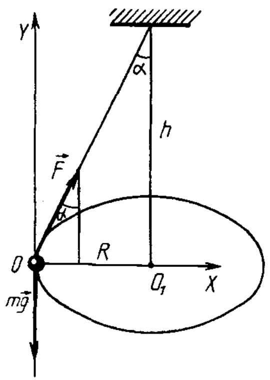
Р е ш е н и е. Пусть α – угол, составляемый нитью с вертикалью (рис. 44). На шарик действуют две силы: сила натяжения нити $\vec{F}$ и сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, где m – масса шарика. Направим координатную ось OX вдоль радиуса к центру окружности O_1, а ось OY – вертикально вверх. По второму закону Ньютона

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a},$$

где $\vec{a}$ – центростремительное ускорение. Его модуль $a = v^2/R$, где v – линейная скорость шарика; R – радиус окружности.

Для проекций на ось OX получим

$$F\sin\alpha = mv^2/R. \tag{1}$$



Р и с. 44

Вдоль оси OY ускорения нет, поэтому сумма проекций сил на эту ось равна нулю:

$$F\cos\alpha - mg = 0, \text{ или } F\cos\alpha = mg. \qquad (2)$$

Разделив почленно равенство (1) на равенство (2), получим

$$\operatorname{tg}\alpha = v^2/(gR). \qquad (3)$$

Линейная скорость шарика $v = 2\pi R/T$, где T – период обращения. Подставим это значение в формулу (3):

$$\operatorname{tg}\alpha = 4\pi^2 R/(gT^2). \qquad (4)$$

С другой стороны, как видно из рис. 44,

$$\operatorname{tg}\alpha = R/h. \qquad (5)$$

Из формул (4) и (5) получаем

$$R/h = 4\pi^2 R/(gT^2),$$

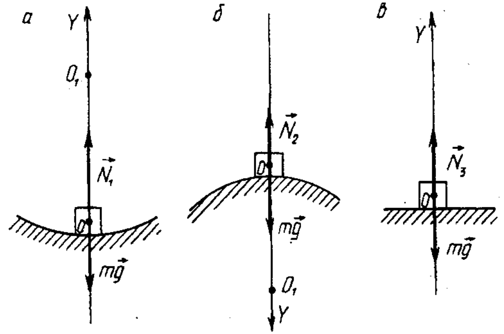
откуда находим искомый период обращения:

$$T = 2\pi\sqrt{h/g}.$$

Полученный результат показывает, что период обращения конического маятника зависит только от расстояния h между плоскостью вращения и точкой подвеса и от ускорения свободного падения g и не зависит от длины нити, массы шарика, радиуса окружности и линейной скорости шарика.

110. Танк массой $m = 5{,}0 \cdot 10^4$ кг движется по мосту равномерно со скоростью $v = 10$ м/с. Радиус кривизны моста $R = 500$ м. Найти силу, с которой танк действует на середину моста, если мост: а) вогнутый; б) выпуклый. С какой силой действовал бы танк на плоский мост?

Р е ш е н и е. На танк действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила нормальной реакции моста, которая равна в первом случае $\vec{N}_1$ (рис. 45, *а*), во втором $\vec{N}_2$ (рис. 45, *б*) и в третьем $\vec{N}_3$ (рис. 45, *в*). Согласно третьему закону Ньютона, сила $\vec{F}$, с которой танк действует на мост, по модулю равна силе реакции моста и направлена вертикально вниз.



Р и с. 45

Силу реакции моста в каждом случае найдем из второго закона Ньютона. Примем за начало координат верхнюю точку моста и направим ось OY в случаях «а» и «б» к центру окружности O_1 и в случае плоского моста вертикально вверх. Составим, согласно второму закону Ньютона, уравнения в векторной форме:

$$\vec{N}_1 + m\vec{g} = m\vec{a}_1,\ \vec{N}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}_2,\ \vec{N}_3 + m\vec{g} = 0,$$

где $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ – центростремительное ускорение. По модулю $a_1 = a_2 = v^2/R$. В проекциях на ось OY имеем:

$$N_1 - mg = \frac{mv^2}{R},\ mg - N_2 = \frac{mv^2}{R},\ N_3 - mg = 0.$$

Отсюда находим:

$$N_1 = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right),\ N_2 = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right),\ N_3 = mg.$$

С такими же по модулю силами танк действует на мост:

$$F_1 = N_1 = 50 \cdot 10^4\ \text{Н},\ F_2 = N_2 = 48 \cdot 10^4\ \text{Н},$$
$$F_3 = N_3 = 49 \cdot 10^4\ \text{Н}.$$

Отметим, что и в случае «б» (мост выпуклый) можно было бы ось OY направить вверх. Тогда для проекций на эту ось получили бы уравнение

$$N_2 - mg = -mv^2/R,$$

которое равносильно приведенному выше.

111. На сколько должен быть поднят внешний рельс над внутренним на закруглении железнодорожного пути, чтобы боковое давление на реборды колес (выступающая часть обода колеса, которая предохраняет его от схода с рельса) было равно нулю, если радиус закругления $R = 800$ м, скорость поезда $v = 72$ км/ч? Ширину l колеи железной дороги считать равной 1,5 м.

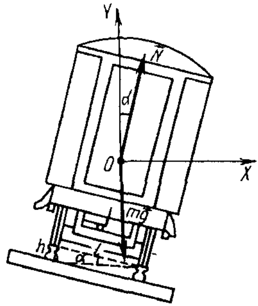


Рис. 46

Решение. Когда боковое давление на реборды колес на закруглении отсутствует, на вагон действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила реакции рельсов $\vec{N}$ (рис. 46). Координатную ось OX направим к центру закругления, а ось OY – вертикально вверх.

Согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

В проекциях на ось OX имеем

$$N \sin\alpha = mv^2/R. \qquad (1)$$

Чтобы найти N, проектируем силы на ось OY и, учитывая, что $a_y = 0$, получаем $N\cos\alpha - mg = 0$, откуда $N = mg/\cos\alpha$. Подставим это значение в уравнение (1):

$$\frac{mg \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{mv^2}{R}.$$

Отсюда

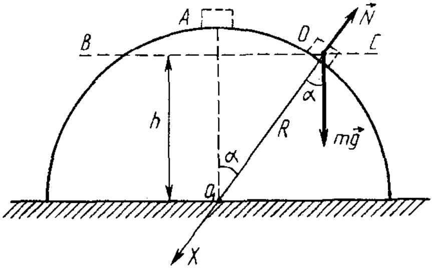
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{gR},\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{v^2}{gR},\ \alpha = 3°.$$

Внешний рельс должен быть поднят на высоту $h = l\sin\alpha$, $h = 7{,}5$ см.

112. Небольшое тело начинает соскальзывать без трения вниз с высшей точки полусферы радиуса R. На какой высоте оно оторвется от поверхности полусферы? Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Когда тело движется без трения по поверхности полусферы, на него действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ (рис. 47).

Второй закон Ньютона запишем так: $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение в данной точке траектории. Направим ось



Р и с. 47

OX из этой точки по радиусу к центру полусферы. Для проекций сил и ускорения на эту ось получим

$$mg\cos\alpha - N = ma_x.$$

При указанном направлении оси OX проекция a_x ускорения $\vec{a}$ равна модулю центростремительного (нормального) ускорения: $a_x = a_n = v^2/R$, где v – модуль скорости тела в точке O. Следовательно,

$$mg\cos\alpha - N = mv^2/R.$$

В момент отрыва тела от полусферы $N = 0$, поэтому $mg\cos\alpha = mv^2/R$, откуда

$$gR\cos\alpha = v^2. \qquad (1)$$

Принимая во внимание, что $R\cos\alpha = h$, формулу (1) можно записать так:

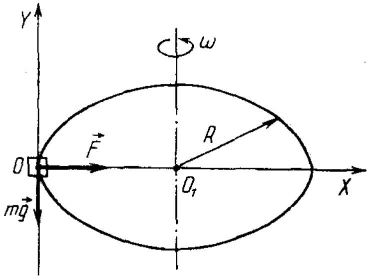
$$gh = v^2. \qquad (2)$$

Для нахождения скорости v в момент отрыва воспользуемся законом сохранения механической энергии. Уровень BC отсчета потенциальной энергии выберем проходящим через точку O. Поскольку начальная скорость тела равна нулю и трение отсутствует, то потенциальная энергия полностью переходит в кинетическую:

$$mg(R - h) = mv^2/2.$$

Отсюда $2g(R - h) = v^2$. Подставив это значение v^2 в формулу (2), получим $gh = 2g(R - h)$, откуда $h = 2R/3$.

113. Для подготовки летчиков-космонавтов к перегрузкам применяют специальные центрифуги. При какой частоте вращения центрифуги радиуса $R = 5$ м спинка сиденья давит на летчика с такой же силой, которая возникает при ускорении ракеты $a = 3g$?



Р и с. 48

Р е ш е н и е. На тело в ракете, движущейся вертикально вверх с ускорением $a = 3g$, действуют сила $\vec{F}$, направленная вертикально вверх, и сила тяжести $m\vec{g}$. По второму закону Ньютона

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Уравнение для проекций на ось OY, положительное направление которой совпадает с направлением ускорения $\vec{a}$, имеет вид $F - mg = ma$, откуда

$$F = m(g + a) = 4mg. \qquad (1)$$

При вращении центрифуги сила $\vec{F}$, с которой спинка сиденья давит на летчика (рис. 48), сообщает ему центростремительное ускорение. На основании второго закона Ньютона, проектируя силы $\vec{F}$ и $m\vec{g}$ на ось OX, имеем

$$F = m\omega^2 R, \qquad (2)$$

где ω — угловая скорость. Она связана с частотой вращения n соотношением

$$\omega = 2\pi n. \qquad (3)$$

Подставив значения (1) и (3) в уравнение (2) и решив его относительно n, получим:

$$n = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}, \; n = 0{,}5 \text{ с}^{-1}.$$

114. Во сколько раз период обращения искусственного спутника, совершающего движение по круговой орбите на высоте h над поверхностью Земли (радиус Земли R), превышает период спутника, обращающегося в непосредственной близости от ее поверхности ($h \approx 0$)?

Р е ш е н и е. В первом случае спутник движется по окружности радиуса $R + h$. Модуль ускорения спутника

$$a = \omega_1^2(R+h),$$

где ω_1 — угловая скорость. Это ускорение сообщает спутнику сила тяготения Земли, направленная к ее центру. Модуль этой силы

$$F = G\frac{mM}{(R+h)^2},$$

где G — гравитационная постоянная; m — масса спутника; M — масса Земли.

По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$. Следовательно, для проекций на ось, направленную к центру орбиты, имеем

$$G\frac{mM}{(R+h)^2} = m\omega_1^2(R+h). \quad (1)$$

Период обращения T_1 связан с угловой скоростью соотношением $\omega_1 = 2\pi/T_1$. Подставив это значение в уравнение (1), получим

$$G\frac{M}{(R+h)^2} = \frac{4\pi^2(R+h)}{T_1^2}. \quad (2)$$

Во втором случае спутник движется по окружности, радиус которой приблизительно равен радиусу Земли R. Рассуждая аналогично, получаем уравнение

$$G\frac{M}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T_2^2}. \quad (3)$$

Разделив почленно уравнение (3) на уравнение (2), будем иметь

$$\frac{(R+h)^2}{R^2} = \frac{T_1^2 R}{T_2^2(R+h)}.$$

Отсюда

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\left(1+\frac{h}{R}\right)^3}.$$

115. Искусственный спутник запущен в плоскости земного экватора так, что все время находится над одной и той же точкой земного шара (геостационарный спутник). Найти расстояние от поверхности Земли до спутника. Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с^2. Радиус Земли $R = 6370$ км.

Р е ш е н и е. Пусть r — расстояние от центра Земли до спутника, m — масса спутника. Сила тяготения сообщает спутнику центростремительное ускорение. На основании второго закона Ньютона

$$G\frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r, \tag{1}$$

где G — гравитационная постоянная; M — масса Земли; ω — угловая скорость спутника.

Спутник все время находится над одной и той же точкой земного шара. Следовательно, угловая скорость спутника равна угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси:

$$\omega = 2\pi/T, \tag{2}$$

где $T = 24$ ч — период вращения Земли.

Подставив значение (2) в уравнение (1), получим

$$G\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Умножив и разделив левую часть этого выражения на R^2, будем иметь

$$G\frac{M}{R^2}\frac{R^2}{r^2} = \frac{4\pi r}{T^2}.$$

Так как $G\dfrac{M}{R^2} = g$, то $\dfrac{gR^2}{r^2} = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$, откуда

$$r = \sqrt[3]{\frac{gT^2R^2}{4\pi^2}}.$$

Следовательно, расстояние от поверхности Земли до спутника

$$h = r - R = \sqrt[3]{\frac{gT^2R^2}{4\pi^2}} - R, \; h = 3{,}2 \cdot 10^7 \text{ м}.$$