171. Спутник движется вокруг некоторой планеты по круговой орбите радиуса $r = 4{,}7 \cdot 10^9$ м со скоростью $v = 1 \cdot 10^4$ м/с. Какова средняя плотность планеты, если ее радиус $R = 1{,}5 \cdot 10^8$ м? Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2.

172. Два искусственных спутника Земли движутся в одном направлении со скоростями v_1 и v_2 по окружностям, лежащим в одной плоскости. Определить минимальное расстояние между спутниками. Радиус Земли R, ускорение свободного падения на поверхности Земли g_0.

173. Какую силу тяги должен развивать двигатель на искусственном спутнике Земли для того, чтобы он двигался по орбите радиуса R со скоростью, превышающей в n раз скорость свободного движения по этой орбите? Масса Земли M, масса спутника m, гравитационная постоянная G.

174. Каким должен был бы быть период вращения Земли вокруг своей оси, чтобы тела на экваторе находились в состоянии невесомости? Радиус Земли $R = 6370$ км.

175. Найти первую космическую скорость для планеты, масса которой в $n_1 = 3$ раза больше массы Земли, а радиус больше земного в $n_2 = 2$ раза. Первую космическую скорость для Земли считать равной $v_1 = 8$ км/с.

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Методические указания к решению задач

При решении задач с применением закона сохранения импульса необходимо сначала установить, является ли данная система тел замкнутой, затем сделать схематический чертеж и обозначить на нем все известные скорости тел. Далее выбирают прямоугольную систему координат так, чтобы проекции скоростей на координатные оси выражались по возможности проще.

Если система тел замкнута, то уравнения составляют на основании закона сохранения импульса сначала в векторной форме:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \text{const},$$

а затем в скалярной, т. е. сумма проекций импульсов всех тел системы на любую ось сохраняется неизменной:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \ldots + m_n v_{nx} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} + \ldots + m_n u_{nx},$$
$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + \ldots + m_n v_{ny} = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y} + \ldots + m_n u_{ny},$$

где m_1, m_2, ..., m_n – массы тел системы; v_{1x}, v_{2x}, ..., v_{nx}, v_{1y}, v_{2y}, ..., v_{ny} – проекции начальных скоростей этих тел (до взаимодействия тел) на оси OX и OY соответственно; u_{1x}, u_{2x}, ..., u_{nx}, u_{1y}, u_{2y}, ..., u_{ny} – проекции конечных скоростей тел (после взаимодействия).

Закон сохранения импульса выполняется и в том случае, когда на тела системы действуют внешние силы, но их векторная сумма равна нулю.

Если система не замкнута, но есть такое направление, что сумма проекций всех внешних сил на него равна нулю, то сумма проекций импульсов всех тел системы на это направление остается постоянной.

Закон сохранения импульса можно применить также при действии внешних сил на систему, если взаимодействие тел системы происходит очень быстро (например, удар, взрыв, выстрел). В этом случае продолжительность взаимодействия считается бесконечно малой, поэтому можно пренебречь импульсом внешних сил и рассматривать систему как замкнутую.

Если число неизвестных больше числа составленных уравнений, нужно добавить к ним уравнения, связывающие кинематические величины, и решить полученную систему уравнений.

Задачи на применение закона сохранения энергии в механике решают по следующему плану: делают схематический чертеж; выбирают уровень отсчета потенциальной энергии; изображают на чертеже силы, действующие на тела, скорости тел и высоты тел над уровнем отсчета потенциальной энергии в начальном и конечном положениях.

Если система замкнута, то составляют равенство

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2},$$

где E_{k1}, E_{p1} – соответственно кинетическая и потенциальная энергия системы в начальном состоянии; E_{k2}, E_{p2} – кинетическая и потенциальная энергия системы в конечном состоянии.

Если при переходе системы из начального состояния в конечное на тела действовали внешние силы, а в системе действовали силы трения, то составляется равенство

$$(E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) = A + A_{тр},$$

где A – работа внешних сил; $A_{тр}$ – работа сил трения.

Если количество неизвестных величин больше числа составленных уравнений, то к ним следует добавить либо уравнения, составленные на основе второго закона Ньютона и закона сохранения импульса, либо кинематические уравнения. Затем систему уравнений решают относительно искомых величин.

Основные законы и формулы

Импульс тела массой m, движущегося со скоростью $\vec{v}$,

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Импульс системы тел равен векторной сумме импульсов всех тел системы.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы тел остается постоянным при любых взаимодействиях этих тел:

$$\vec{P}_{сист} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \text{const}.$$

Работа постоянной силы $\vec{F}$

$$A = Fs\cos\alpha,$$

где s – модуль перемещения; α – угол между векторами силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{s}$.

Мощность

$$N = A/t \text{ или } N = Fv\cos\alpha,$$

где A – работа, совершенная за промежуток времени t; F – модуль силы; v – модуль скорости; α – угол между $\vec{F}$ и $\vec{v}$.

Кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью v,

$$E_k = mv^2/2.$$

Теорема об изменении кинетической энергии: изменение кинетической энергии тела равно работе равнодействующей сил, приложенных к телу:

$$E_{k2} - E_{k1} = A.$$

Потенциальная энергия тела массой m, поднятого на высоту h относительно нулевого уровня,

$$E_p = mgh.$$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела (сжатой или растянутой пружины)

$$E_p = k(\Delta l)^2/2,$$

где k – коэффициент упругости (жесткость) тела; Δl – абсолютная деформация.

Закон сохранения энергии в механике: полная механическая энергия замкнутой системы тел, взаимодействующих силами тяготения и упругости, остается неизменной:

$$E = E_k + E_p = \text{const}.$$

Изменение полной механической энергии системы равно работе внешних сил:

$$E_2 - E_1 = A.$$

Изменение полной механической энергии замкнутой системы, в которой между телами действуют силы трения, равно работе сил трения:

$$E_2 - E_1 = A_{тр}.$$

Коэффициент полезного действия (КПД)

$$\eta = A_п / A_з,$$

где $A_п$ – полезная работа (или полезно преобразованная энергия, мощность); $A_з$ – затраченная работа (энергия, мощность).

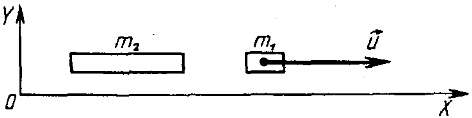
Абсолютно упругим ударом называется такое кратковременное взаимодействие тел, после которого тела полностью восстанавливают свою форму, а их суммарная кинетическая энергия не изменяется. При абсолютно упругом ударе выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии.

Абсолютно неупругим ударом называется такое кратковременное взаимодействие тел, после которого соударяющиеся тела образуют единое тело, движущееся с определенной скоростью, а суммарная кинетическая энергия тел уменьшается. При абсолютно неупругом ударе выполняется закон сохранения импульса, а механическая энергия не сохраняется, часть ее превращается во внутреннюю энергию тел.

Примеры решения задач

176. Пуля вылетает из винтовки в горизонтальном направлении со скоростью $u_1 = 800$ м/с. Какова скорость винтовки при отдаче, если ее масса в 400 раз больше массы пули?

Р е ш е н и е. Пусть положительное направление оси OX совпадает с направлением скорости пули в момент вылета из винтовки (рис. 57). В этом направлении внешние



Р и с. 57

силы не действуют (сопротивлением воздуха пренебрегаем), поэтому, согласно закону сохранения импульса, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$, где $\vec{p}_1$ – импульс пули; $\vec{p}_2$ – импульс винтовки. Следовательно, сумма проекций на ось OX импульсов винтовки и пули до выстрела равна сумме проекций их импульсов после выстрела:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}.$$

Так как $v_{1x} = 0$, $v_{2x} = 0$, $u_{1x} = u_1$, то $m_1 u_1 + m_2 u_{2x} = 0$. Отсюда

$$u_{2x} = -\frac{m_1}{m_2} u_1, \; u_{2x} = -2 \text{ м/с}.$$

Минус означает, что направление вектора скорости винтовки $\vec{u}_2$ противоположно направлению вектора скорости пули $\vec{u}_1$.

177. Мальчик стоит неподвижно на льду рядом с санками. Масса мальчика M, масса санок m. Мальчик толкает санки и сообщает им скорость v, а сам движется в противоположном направлении. Какую работу совершил мальчик?

Р е ш е н и е. Совершенная мальчиком работа равна изменению кинетической энергии санок и мальчика:

$$A = \left(\frac{mv^2}{2} - 0\right) + \left(\frac{Mv_1^2}{2} - 0\right) = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2},$$

где v_1 – скорость, с которой стал двигаться мальчик.

За положительное направление оси OX примем направление скорости санок. Применив закон сохранения импульса, составим уравнение в проекциях на ось OX: $mv - Mv_1 = 0$, откуда $v_1 = mv/M$. Подставив это значение в выражение для работы, получим

$$A = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

178. Пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью $v = 800$ м/с, попадает в дерево и углубляется на $s = 10$ см. Найти силу сопротивления дерева и время движения пули в дереве, считая это движение равнозамедленным.

Решение. Изменение кинетической энергии пули равно работе силы сопротивления:

$$0 - mv^2/2 = A_c. \qquad (1)$$

Вектор силы сопротивления $\vec{F}_c$ направлен противоположно вектору перемещения $\vec{s}$, поэтому

$$A_c = F_c s \cos 180° = -F_c s. \qquad (2)$$

На основании выражений (1) и (2) получаем:

$$F_c = \frac{mv^2}{2s},\ F_c = 32 \text{ кН}. \qquad (3)$$

Время движения пули в дереве $t = s/v_{ср}$, где $v_{ср}$ – средняя скорость. Поскольку движение равнозамедленное, то средняя скорость равна полусумме начальной и конечной скоростей, т. е. $v_{ср} = (v + 0)/2 = v/2$. Следовательно,

$$t = 2s/v,\ t = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ с}. \qquad (4)$$

Эту задачу можно решить другим способом. Изменение импульса пули равно импульсу силы сопротивления: $\Delta\vec{p} = \vec{F}_c t$.

В проекциях на координатную ось, положительное направление которой совпадает с направлением силы $\vec{F}_c$, это уравнение имеет вид $0 - (-mv) = F_c t$ или $mv = F_c t$. Тогда $F_c = mv/t$. Подставив сюда значение t из формулы (4), получим выражение (3).

179. Электровоз при движении со скоростью $v = 72$ км/ч потребляет мощность $N_3 = 600$ кВт. Определить силу тяги электровоза, если его коэффициент полезного действия $\mu = 80\%$.

Р е ш е н и е. Полезная мощность электровоза

$$N_п = Fv. \tag{1}$$

По определению КПД равен отношению полезной мощности к затраченной, т. е.

$$\eta = N_п / N_з. \tag{2}$$

На основании формул (1) и (2) получим:

$$F = \eta N_з / v, \ F = 24 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

180. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы однородный куб, находящийся на горизонтальной плоскости, перевернуть с одной грани на соседнюю? Масса куба $m = 100$ кг, длина его ребра $l = 50$ см.

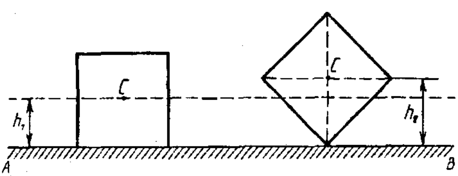
Р е ш е н и е. Будем переворачивать куб так, чтобы он не отрывался от горизонтальной плоскости и не скользил по ней. Пусть h_2 – максимальная высота, на которой будет находиться центр тяжести C куба при переворачивании (рис. 58). Уровень AB начала отсчета потенциальной энергии совместим с горизонтальной плоскостью. Тогда совершенная работа равна изменению потенциальной энергии куба:

$$A = E_{p2} - E_{p1} = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1).$$

Учитывая, что $h_1 = l/2$, $h_2 = l\sqrt{2}/2$, получаем:

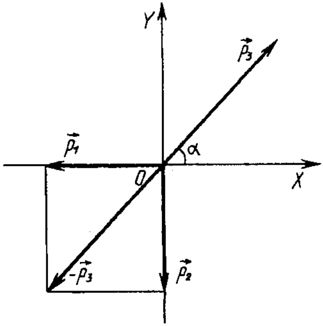
$$A = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} mgl, \ A = 98 \text{ Дж}.$$

Найденная работа минимальна, потому что при других способах переворачивания (например, с отрывом от плоскости) высота h_2 будет принимать бóльшие значения,



Р и с. 58

следовательно, работа A будет большей, чем в рассмотренном случае.



Р и с. 59

181. В результате взрыва камень разлетается на три части. Два куска летят под прямым углом друг к другу: кусок массой $m_1 = 1$ кг – со скоростью $v_1 = 12$ м/с, кусок массой $m_2 = 2$ кг – со скоростью $v_2 = 8$ м/с. Третий кусок отлетает со скоростью $v_3 = 40$ м/с. Какова его масса и в каком направлении он летит?

Р е ш е н и е. Система состоит из трех тел (осколков). Внешней силой является сила тяжести. Но так как время разрыва камня очень мало, импульс внешней силы можно считать равным нулю, а систему, следовательно, – замкнутой. Поэтому импульс камня до разрыва равен сумме импульсов осколков после разрыва: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$. Поскольку $\vec{p} = \vec{0}$, то $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = -\vec{p}_3$.

Зная направления векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ и их модули $p_1 = m_1 v_1$, $p_2 = = m_2 v_2$, найдем построением вектор $\vec{p}_3$ (рис. 59). Как видно из рисунка, $p_3^2 = p_1^2 + p_2^2$, $\sin\alpha = p_2/p_3$. Учитывая, что $p_3 = m_3 v_3$, находим:

$$m_3 = \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}{v_3} = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{v_3},\ m_3 = 0{,}5 \text{ кг},$$

$$\alpha = \arcsin\frac{m_2 v_2}{m_3 v_3},\ \alpha = 53°.$$

Эту задачу можно решить иначе. На основании закона сохранения импульса

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0}.$$

Составим уравнения в проекциях на оси OX и OY:

$$0 = -p_1 + p_{3x},\ 0 = -p_2 + p_{3y},$$

где p_{3x}, p_{3y} – проекции вектора $\vec{p}_3$ на оси OX и OY соответственно. Отсюда $p_{3x} = p_1$, $p_{3y} = p_2$.

Модуль вектора $\vec{p}_3$

$$p_3 = \sqrt{p_{3x}^2 + p_{3y}^2} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}.$$

Теперь, как и при решении первым способом, найдем $m_3 = 0{,}5$ кг.

Вектор $\vec{p}_3$ образует с осью OX угол

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{m_2 v_2}{m_1 v_1},\ \alpha = 53^\circ.$$

182. Найти работу силы $F = 30$ Н, в результате действия которой груз массой $m = 2$ кг поднимается по наклонной плоскости на высоту $h = 2{,}5$ м с ускорением $a = 5$ м/с^2. Сила действует параллельно наклонной плоскости. Трением о плоскость пренебречь.

Р е ш е н и е. Пусть l – длина наклонной плоскости. Тогда работа силы $\vec{F}$

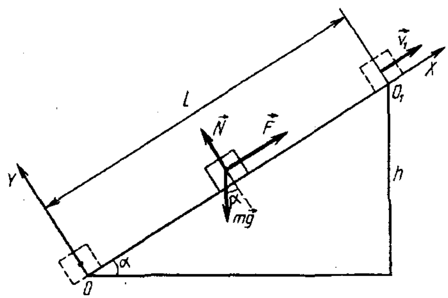
$$A = Fl = F\frac{h}{\sin\alpha}. \quad (1)$$

Чтобы найти $\sin\alpha$, составим уравнение движения груза вдоль оси OX (рис. 60): $F - mg\sin\alpha = ma$. Отсюда $\sin\alpha = (F - ma)/(mg)$. Подставив это значение в формулу (1), получим:

$$A = \frac{Fmgh}{F - ma},\ A = 74 \text{ Дж}.$$

183. Прямоугольная яма, площадь основания которой S и глубина h, наполовину заполнена водой. Насос выкачивает воду и подает ее на поверхность земли через цилиндрическую трубу радиуса R. Какую работу совершил насос, если он выкачал всю воду за время τ?

Р е ш е н и е. Совершенная работа равна изменению полной механической энергии воды:



Р и с. 60

$$A = (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}), \qquad (1)$$

где E_{k1}, E_{p1}, E_{k2}, E_{p2} – кинетическая и потенциальная энергия воды в начальном и конечном состояниях.

Нулевой уровень потенциальной энергии совместим с дном ямы. Тогда в начальном состоянии центр тяжести воды находится на высоте $h/4$ над этим уровнем, а в конечном – на высоте h. Поэтому

$$E_{p1} = mg\frac{h}{4},\ E_{p2} = mgh,\ E_{k1} = 0,\ E_{k2} = \frac{mv^2}{2}, \qquad (2)$$

где m – масса воды; v – скорость, с которой вода вытекает из трубы.

Масса воды

$$m = \rho S\frac{h}{2}, \qquad (3)$$

где ρ – плотность воды. С другой стороны, $m = \rho\pi R^2 v\tau$. Поэтому $\rho S\frac{h}{2} = \rho\pi R^2 v\tau$, откуда

$$v = \frac{Sh}{2\pi R^2\tau}. \qquad (4)$$

Подставив значения величин из формул (2)–(4) в выражение (1), найдем работу, совершенную насосом:

$$A = \frac{3}{8}\rho gSh^2 + \frac{1}{16}\frac{\rho S^3h^3}{\pi^2\tau^2R^4}.$$

184. Груз начинает скользить с начальной скоростью v_0 вверх по наклонной плоскости, имеющей длину l и высоту h (рис. 61). Коэффициент трения равен μ. Какой путь s пройдет груз до остановки?

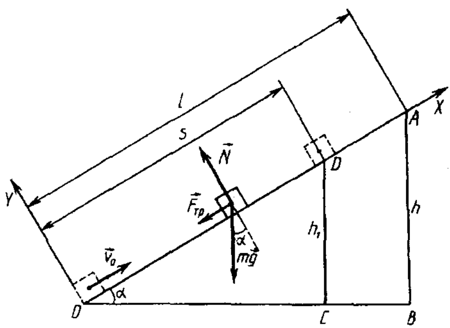


Рис. 61

Р е ш е н и е. Изменение механической энергии груза равно работе силы трения:

$$(E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) = A_{тр}. \qquad (1)$$

За нулевой уровень потенциальной энергии примем основание наклонной плоскости. Тогда

$$E_{k1} = mv_0^2/2,\ E_{p1} = 0,\ E_{k2} = 0,\ E_{p2} = mgh_1,$$

где h_1 – высота, на которой находится груз в момент остановки, и уравнение (1) примет вид

$$mgh_1 - mv_0^2/2 = A_{тр}.$$

Работа силы трения

$$A_{тр} = F_{тр}s\cos 180° = -F_{тр}s.$$

С учетом этого будем иметь

$$mgh_1 - mv_0^2/2 = -F_{тр}s. \qquad (2)$$

Сила трения $F_{тр} = \mu N$, где N – сила нормальной реакции плоскости. Как показано в решении задачи 90, $N = mg\cos\alpha$. Поэтому

$$F_{тр} = \mu mg\cos\alpha.$$

Как видно из рисунка, $\cos\alpha = \sqrt{l^2 - h^2}/l$. Следовательно,

$$F_{тр} = \mu mg\frac{\sqrt{l_2 - h_2}}{l}. \qquad (3)$$

Из подобия треугольников OAB и ODC следует $h_1/s = h/l$, откуда

$$h_1 = hs/l. \qquad (4)$$

Подставим значения (3) и (4) в уравнение (2):

$$mg\frac{hs}{l} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mg\frac{\sqrt{l_2 - h_2}}{l}s.$$

Решив это уравнение относительно s, получим

$$s = \frac{v_0^2 l}{2g\left(h + \mu\sqrt{l^2 - h^2}\right)}.$$

185. Санки съезжают с горы высотой h и с углом наклона α и движутся дальше по горизонтальному участку. Коэффициент трения на всем пути санок одинаков и равен μ. Определить расстояние s, которое пройдут санки по горизонтальному участку до полной остановки.

Р е ш е н и е. Изменение механической энергии санок равно работе сил трения на наклонном и горизонтальном участках ($A_{тр1}$ и $A_{тр2}$). Потенциальную энергию будем отсчитывать от основания горы. Тогда получим уравнение $0 - mgh = A_{тр1} + A_{тр2}$ или

$$-mgh = -F_{тр1}l - F_{тр2}s, \quad (1)$$

где l — длина наклонного участка. Как видно из рис. 61,

$$l = h/\sin\alpha. \quad (2)$$

Сила трения на наклонном участке (см. решение предыдущей задачи)

$$F_{тр1} = \mu mg\cos\alpha, \quad (3)$$

сила трения на горизонтальном участке

$$F_{тр2} = \mu mg. \quad (4)$$

Подставив значения (2)–(4) в уравнение (1), получим

$$mgh = \mu mg(\cos\alpha)\frac{h}{\sin\alpha} + \mu mgs,$$

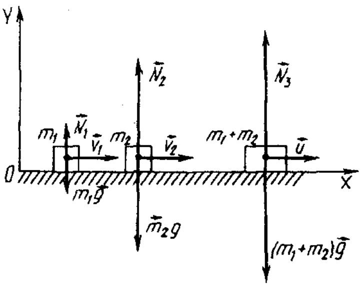
откуда

$$s = h\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right).$$

Этот ответ имеет смысл лишь при $\mu < \operatorname{tg}\alpha$, в противном случае санки не сдвинутся с места ($s = 0$).

186. Тело массой $m_1 = 2$ кг движется по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $v_1 = 4$ м/с и нагоняет второе тело массой $m_2 = 10$ кг, движущееся со скоростью $v_2 = 1$ м/с. Найти скорости тел после столкновения, если удар был: 1) абсолютно неупругим; 2) абсолютно упругим. Тела движутся по одной прямой; удар центральный, т. е. скорости тел направлены вдоль линии, соединяющей их центры масс.

Р е ш е н и е. Рассмотрим сначала первый случай. В результате абсолютно неупругого удара оба тела начина-



Р и с. 62

ют двигаться с одной и той же скоростью $\vec{u}$ (рис. 62). Так как вдоль оси OX силы не действуют (трения нет, ибо поверхность гладкая), то сумма проекций импульсов тел на эту ось сохраняется, т. е. сумма проекций импульсов обоих тел до удара равна проекции общего импульса тел после удара:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2)u_x.$$

Так как $v_{1x} = v_1$, $v_{2x} = v_2$, то

$$u_x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \ u_x = 2 \text{ м/с}.$$

Получили $u_x > 0$, а это означает, что после соударения тела будут двигаться в положительном направлении оси OX.

Во втором случае удар был абсолютно упругим. Следовательно, суммарная кинетическая энергия тел до удара и после него не изменяется:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \tag{1}$$

где u_1, u_2 – модули скоростей тел после удара. Кроме того, как и в первом случае, сохраняется сумма проекций импульсов тел на ось OX:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}. \tag{2}$$

Преобразуем уравнения (1) и (2) к виду:

$$m_1\left(v_1^2 - u_{1x}^2\right) = m_2\left(u_{2x}^2 - v_2^2\right), \tag{3}$$

$$m_1(v_1 - u_{1x}) = m_2(u_{2x} - v_2). \tag{4}$$

Разделив почленно уравнение (3) на уравнение (4), получим

$$v_1 - u_{1x} = u_{2x} + v_2. \tag{5}$$

Умножим левую и правую части уравнения (5) на m_2 и из полученного уравнения вычтем уравнение (4). В результате будем иметь

$$v_1(m_2 - m_1) + u_{1x}(m_2 + m_1) = 2m_2v_2,$$

откуда

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

Для нахождения u_{2x} умножим обе части уравнения (5) на m_1, а затем сложим почленно с уравнением (4). Получим

$$2m_1v_1 = u_{2x}(m_1 + m_2) + v_2(m_1 - m_2),$$

откуда

$$u_{2x} = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (7)$$

Подставив в формулы (6) и (7) числовые значения величин и произведя вычисления, получим: $u_{1x} = -1$ м/с, $u_{2x} = 2$ м/с. Это означает, что первое тело стало двигаться в отрицательном направлении оси OX, а направление движения второго тела осталось прежним. Модуль скорости второго тела увеличился.

187. Тело массой m_1 ударяется абсолютно неупруго о тело массой m_2. Найти долю q потерянной при этом кинетической энергии, если тело массой m_2 до удара было в покое.

Решение. Доля потерянной кинетической энергии

$$q = \frac{E_{k1} - E_{k2}}{E_{k1}}, \quad (1)$$

где E_{k1}, E_{k2} – кинетическая энергия системы соответственно до и после соударения:

$$E_{k1} = \frac{m_1v_1^2}{2}, \; E_{k2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}; \quad (2)$$

v_1 – скорость первого тела до удара; u – скорость тел после абсолютно неупругого удара; применив закон сохранения импульса, найдем

$$u = m_1v_1/(m_1 + m_2) \quad (3)$$

(см. решение предыдущей задачи).

Подставив значения (2) и (3) в формулу (1), получим

$$q = m_2/(m_1 + m_2).$$

Эта доля кинетической энергии перешла во внутреннюю энергию соударяющихся тел.

188. Камень брошен под углом к горизонту со скоростью $\bar{v}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на какой высоте от горизонта скорость камня уменьшится вдвое.

Р е ш е н и е. Согласно закону сохранения энергии, полная механическая энергия камня остается постоянной. Приняв за начало отсчета потенциальной энергии поверхность земли, составим уравнение:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2},$$

где h – искомая высота; $v = v_0/2$ – скорость камня на этой высоте. Тогда

$$\frac{v_0^2}{2} = gh + \frac{v_0^2}{8}.$$

Отсюда $h = 3v_0^2/(8g)$.

189. Определить кинетическую энергию тела массой $m = 1{,}5$ кг, брошенного горизонтально со скоростью $v_0 = 20$ м/с, в конце четвертой секунды его движения. Принять $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. Как показано в решении задачи 19, модуль скорости тела в момент времени t удовлетворяет соотношению $v^2 = v_0^2 + g^2t^2$. Поэтому кинетическая энергия в этот момент

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(v_0^2 + g^2t^2\right)}{2}, \; E_k = 1{,}5 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Решим эту задачу другим способом. В момент бросания тело обладало кинетической энергией $E_{k0} = mv_0^2/2$ и некоторой потенциальной энергией. К моменту времени t тело находилось ниже уровня бросания на $\Delta h = gt^2/2$, поэтому его потенциальная энергия уменьшилась на $\Delta E_p = mg\Delta h = mg^2t^2/2$. Следовательно, на основании закона сохранения энергии на столько же увеличилась кинетическая энергия тела:

$$E_k = E_{k0} + \Delta E_p = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{mgt^2}{2} = \frac{m\left(v_0^2 + g^2t^2\right)}{2}.$$

Мы получили тот же результат, что и при решении первым способом.

190. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 49$ м/с. На какой высоте его кинетическая энергия будет в 2 раза больше потенциальной? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. Будем отсчитывать потенциальную энергию от поверхности земли. В момент бросания потенциальная энергия тела $E_{p1} = 0$, а его кинетическая энергия $E_{k1} = mv_0^2/2$. Когда тело будет находиться на искомой высоте h, его потенциальная энергия $E_{p2} = mgh$, а кинетическая $E_{k2} = 2E_{p2} = 2mgh$.

По закону сохранения полной механической энергии

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}.$$

Таким образом, $mv_0^2/2 + 0 = 2mgh + mgh$, откуда

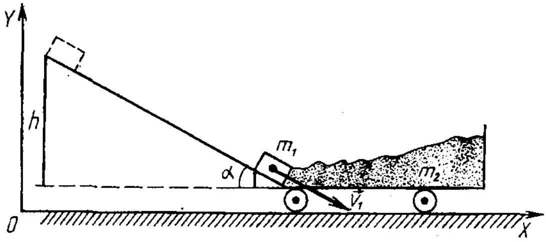
$$h = \frac{v_0^2}{6g},\ h = 41 \text{ м}.$$

191. Груз массой m_1 соскальзывает без трения с наклонной доски на неподвижную платформу. С какой скоростью начнет двигаться платформа, когда груз упадет на нее? Масса платформы m_2, высота начального положения груза над уровням платформы равна h, угол наклона доски к горизонту α. Трение отсутствует.

Р е ш е н и е. Вдоль оси OX (рис. 63) внешние силы не действуют, поэтому сумма проекций импульсов груза и платформы на эту ось остается постоянной:

$$m_1 v_1 \cos\alpha = (m_1 + m_2) v_{2x},$$

где v_1 – модуль скорости груза в момент падения на платформу; v_2 – проекция скорости $\vec{v}_2$, которую будет иметь платформа после падения груза. Отсюда



Р и с. 63

$$v_{2x} = \frac{m_1 v_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2}. \qquad (1)$$

Найдем теперь v_1 на основании закона сохранения энергии. Будем отсчитывать потенциальную энергию от уровня платформы. Тогда $mgh = mv_1^2/2$, откуда $v_1 = \sqrt{2gh}$. Подставив это значение в формулу (1), получим

$$v_{2x} = \frac{m_1 \sqrt{2gh} \cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

192. В покоящийся шар массой $M = 1$ кг, который прикреплен к концу легкого несжимаемого стержня, закрепленного в подвесе на шарнире, попадает пуля массой $m = 0{,}01$ кг. Угол между направлением полета пули и линией стержня $\alpha = 45°$. После удара пуля застревает в шаре, и шар вместе с пулей, откачнувшись, поднимается на высоту $h = 0{,}2$ м относительно первоначального положения. Найти скорость пули v.

Решение. В горизонтальном направлении на пулю и шар внешние силы не действуют, поэтому сумма проекций импульсов пули и шара на ось OX (рис. 64, *а*, *б*) остается неизменной:

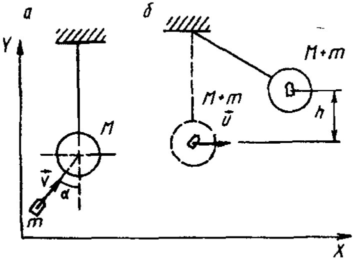


Рис. 64

$$mv\sin\alpha = (M + m)u,$$

где u — скорость шара сразу после попадания пули. Отсюда

$$v = \frac{(M+m)u}{m\sin\alpha}. \qquad (1)$$

Согласно закону сохранения энергии, при максимальном отклонении

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = (M + m)gh,$$

откуда $u = \sqrt{2gh}$. Подставив это значение в формулу (1), получим:

$$v = \frac{(M+m)\sqrt{2gh}}{m\sin\alpha}, \quad v = 6 \cdot 10^2 \text{ м/с}.$$

193. На гладкой горизонтальной поверхности на некотором расстоянии от вертикальной стенки находится шар массой M. Второй шар массой m движется от стенки к первому шару. Между шарами происходит центральный упругий удар. При каком соотношении масс M и m второй шар после удара достигнет стенки и, упруго отразившись от нее, догонит первый шар? Оба шара находятся на одном перпендикуляре к стенке.

Р е ш е н и е. Пусть $\vec{v}_0$ – скорость второго шара до удара, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ – скорости соответственно первого и второго шаров после удара. При упругом ударе суммарная кинетическая энергия сохраняется:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Пусть положительное направление координатной оси совпадает с направлением вектора $\vec{v}_0$. Так как вдоль этой оси силы не действуют (трения нет), сумма проекций импульсов шаров на нее сохраняется:

$$mv_0 = Mu_1 - mu_2. \qquad (2)$$

Систему уравнений (1) и (2) после преобразований запишем в следующем виде:

$$m(v_0 - u_2)(v_0 + u_2) = Mu_1^2, \; m(v_0 - u_2) = Mu_1.$$

Решив эту систему относительно u_1 и u_2, получим два ответа:

1) $u_1 = 0$, $u_2 = v_0$;

2) $u_1 = \dfrac{2mv_0}{M+m}$, $u_2 = \dfrac{(M-m)v_0}{M+m}$.

Первый ответ соответствует ситуации до столкновения шаров, второй дает значения скоростей шаров после удара.

Чтобы второй шар после упругого отражения от стенки мог догнать первый шар, необходимо выполнение условия $u_2 > u_1$, т. е.

$$\frac{(M-m)v_0}{M+m} > \frac{2mv_0}{M+m}.$$

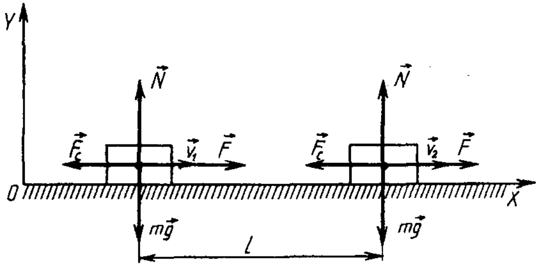
Отсюда получаем искомое соотношение масс шаров: $M > 3m$.

194. На горизонтальном участке пути локомотив развивает постоянную силу тяги $F = 3{,}5 \cdot 10^5$ Н. На участке пути длиной $l = 600$ м скорость поезда массой $m = 1{,}0 \cdot 10^6$ кг возрастает от $v_1 = 10$ м/с до $v_2 = 20$ м/с. Определить коэффициент сопротивления движению, который равен отношению модуля силы сопротивления к модулю силы нормальной реакции рельсов.

Р е ш е н и е. На основании теоремы об изменении кинетической энергии составим уравнение:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_1 + A_2, \tag{1}$$

где $A_1 = Fl$ – работа силы тяги; A_2 – работа силы сопротивления: $A_2 = F_c l \cos 180° = -F_c l$; $F_c = \mu N$ – модуль силы сопротивления; μ – коэффициент сопротивления движению; N – модуль силы нормальной реакции опоры. Для проекций сил на ось OY (рис. 65) имеем: $N - mg = 0$.



Р и с. 65

Следовательно, $F_c = \mu mg$.

Подставив значения A_1 и A_2 в уравнение (1), получим

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = Fl - \mu mgl.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{F}{mg} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2lg}, \quad \mu = 0{,}01.$$

195. Тележка с песком катится со скоростью $v_1 = 1$ м/с по горизонтальной поверхности. Навстречу тележке летит шар массой $m = 3$ кг со скоростью $v_2 = 8$ м/с, направленной под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. После встречи с тележкой шар застревает в песке. С какой скоростью и в какую сторону покатится тележка после встречи с шаром? Масса тележки с песком $M = 10$ кг. Силой сопротивления качению тележки можно пренебречь.

Р е ш е н и е. Координатную ось OX направим горизонтально (рис. 66). Вдоль этой оси внешние силы не действуют, поэтому сумма проекций импульсов тележки и шара на ось OX остается неизменной:

$$Mv_{1x} + mv_{2x} = (M + m)u_x,$$

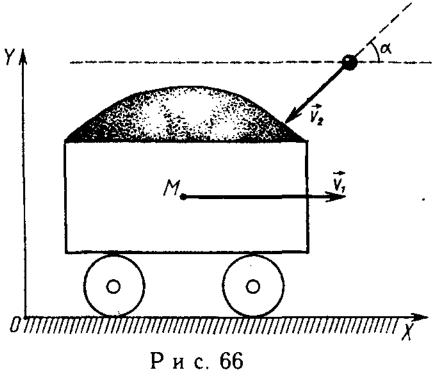
где u_x – проекция на ось OX скорости тележки с застрявшим в песке шаром. Так как $v_{1x} = v_1$, $v_{2x} = -v_2 \cos\alpha$, то

$$Mv_1 - mv_2 \cos\alpha = (M + m)u_x,$$

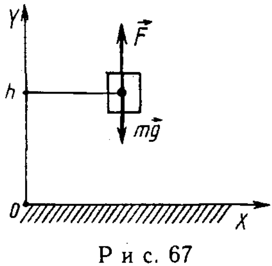
откуда

$$u_x = \frac{Mv_1 - mv_2 \cos\alpha}{M + m}, \; u_x = -0{,}2 \text{ м/с}.$$

Минус указывает на то, что тележка покатится в отрицательном направлении оси OX, т. е. противоположно первоначальному направлению движения.



Р и с. 66



Р и с. 67

196. Под действием постоянной силы тело массой $m = 100$ кг поднимается на высоту $h = 15$ м в течение $\tau = 10$ с. Определить работу этой силы. Начальная скорость тела равна нулю.

Р е ш е н и е. Координатную ось OY направим вертикально вверх, а начало координат расположим на поверхности земли (рис. 67). На тело действуют сила $\vec{F}$ и сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$. Работа, совершаемая силой $\vec{F}$,

$$A = Fh. \tag{1}$$

Чтобы найти модуль силы $\vec{F}$, составим на основании второго закона Ньютона уравнение движения в векторной форме:

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a},$$

а затем в проекциях на ось OY:

$$F - mg = ma_y, \qquad (2)$$

где a_y – проекция ускорения тела на ось OY. Эту проекцию найдем из кинематического уравнения для координаты $y = a_y t^2/2$, учитывая, что $y = h$ при $t = \tau$. Получим $a_y = 2h/\tau^2$. Подставив это значение в уравнение (2), найдем

$$F = m(g + 2h/\tau^2).$$

Теперь, согласно формуле (1), получим:

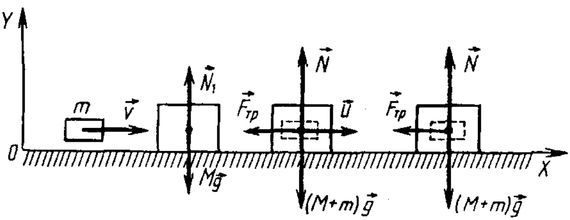
$$A = m(g + 2h/\tau^2)h, \; A = 1{,}5 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

197. Летящая горизонтально со скоростью $v = 400$ м/с пуля попадает в брусок и застревает в нем. Какое расстояние пройдет по горизонтальной поверхности этот брусок от толчка пули, если его масса в $n = 99$ раз больше массы пули? Начальная скорость бруска равна нулю, а коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0{,}1$.

Р е ш е н и е. В результате попадания пули брусок с застрявшей в нем пулей приобретает некоторую скорость $\vec{u}$ (рис. 68). Пройдя расстояние l, брусок остановится под действием силы трения. На основании теоремы об изменении кинетической энергии

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{тр},$$

где E_{k2}, E_{k1} – соответственно конечное и начальное значения кинетической энергии бруска; $A_{тр}$ – работа силы



Р и с. 68

трения. Учитывая, что $E_{k2} = 0$, $E_{k1} = (M + m)u^2/2$, $A_{тр} = -F_{тр}l$, получаем

$$(M + m)u^2/2 = F_{тр}l. \qquad (1)$$

Найдем модуль силы трения $F_{тр} = \mu N$. Спроектировав силы на ось OY, будем иметь:

$$N - (M + m)g = 0, \; N = (M + m)g.$$

Следовательно, $F_{тр} = \mu(M + m)g$. Подставив это значение в уравнение (1), получим

$$(M + m)u^2/2 = \mu(M + m)gl,$$

откуда

$$l = u^2/(2\mu g). \qquad (2)$$

Чтобы найти модуль скорости $\vec{u}$, составим уравнение для проекций импульсов тел на ось OX на основании закона сохранения импульса: $mv + 0 = (M + m)u$. Отсюда

$$u = \frac{mv}{M + m} = \frac{v}{M/m + 1}. \qquad (3)$$

Обратим внимание на то, что вдоль оси OX действует внешняя сила – сила трения, но применить закон сохранения импульса можно, так как длительность взаимодействия тел весьма кратковременна и поэтому влиянием внешних сил можно пренебречь.

Подставив теперь значение (3) в выражение (2), с учетом условия $M/m = n$ найдем:

$$l = \frac{v^2}{2\mu(n + 1)^2 g}, \; l = 8 \text{ м}.$$

198. Под каким углом к горизонту надо бросить камень, чтобы его кинетическая энергия в точке максимального подъема составляла $\eta = 0{,}25$ его кинетической энергии в точке бросания? Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. В точке максимального подъема $v_y = 0$, $v_x = v_0 \cos\alpha_0$ (см. решение задачи 21). Здесь v_0 – начальная скорость; α_0 – угол, составленный вектором начальной скорости $\vec{v}_0$ с горизонтом. Следовательно, в этой точке скорость камня

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0 \cos \alpha_0,$$

а его кинетическая энергия

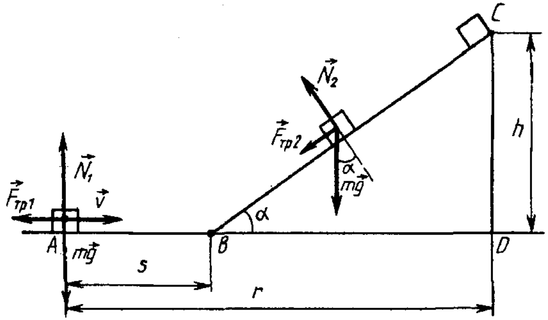
$$E_{\text{k}} = \frac{m v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{2}.$$

В точке бросания камень имел кинетическую энергию $E_{\text{k}0} = m v_0^2 / 2$. Используя заданное условие $E_{\text{k}} = \eta E_{\text{k}0}$, получаем

$$\frac{m v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{2} = \eta \frac{m v_0^2}{2},$$

откуда $\alpha_0 = \arccos \sqrt{\eta}$, $\alpha = 60°$.

199. Определить, какой скоростью должно обладать тело в точке A (рис. 69), чтобы переместиться в точку C и там остановиться. Коэффициент трения при движении тела $\mu = 0{,}2$, $CD = h = 0{,}5$ м, $AD = r = 10$ м.



Р и с. 69

Р е ш е н и е. Изменение механической энергии тела равно работе сил трения:

$$(E_{\text{k}2} + E_{\text{p}2}) - (E_{\text{k}1} + E_{\text{p}1}) = A_{\text{тр}}, \tag{1}$$

где $E_{\text{k}1}$, $E_{\text{p}1}$ – соответственно кинетическая и потенциальная энергия тела в точке A; $E_{\text{k}2}$, $E_{\text{p}2}$ – в точке C.

За нулевой уровень потенциальной энергии примем основание наклонной плоскости. Тогда

$$E_{\text{p}1} = 0, \; E_{\text{p}2} = mgh. \tag{2}$$

Очевидно, что

$$E_{k2} = 0,\ E_{k1} = mv^2/2. \qquad (3)$$

Работа сил трения

$$A_{тр} = A_{тр1} + A_{тр2},$$

где $A_{тр1}$ – работа силы трения $\vec{F}_{тр1}$ на участке AB; $A_{тр2}$ – работа силы трения $\vec{F}_{тр2}$ на участке BC. Модули этих сил равны соответственно: $F_{тр1} = \mu N$, $F_{тр2} = \mu N_2$.

Из рис. 69 легко найти, что $N_1 = mg$, $N_2 = mg\cos\alpha$. Следовательно, $F_{тр1} = \mu mg$, $F_{тр2} = \mu mg\cos\alpha$. Тогда работа сил трения

$$A_{тр} = F_{тр1}s\cos 180° + F_{тр2}l\cos 180° = -\mu mgs - \mu mgl\cos\alpha,$$

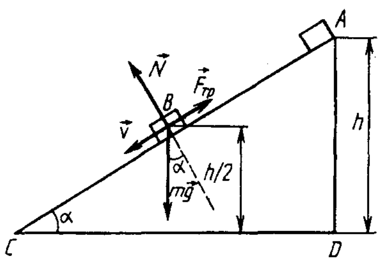
где $l = BC = (r - s)/\cos\alpha$, поэтому

$$A_{тр} = -\mu mgs - \mu mg\frac{r - s}{\cos\alpha}\cos\alpha = -\mu mgr. \qquad (4)$$

Подставим теперь значения (2)–(4) в выражение (1) и получим $mgh - mv^2/2 = -\mu mgr$, откуда

$$v = \sqrt{2g(h + \mu r)},\ v = 7 \text{ м/с}.$$

200. Вблизи дороги образовалась ледяная горка с выездом на проезжую часть. Поверхность горки представляет собой плоскость, составляющую с горизонтальным направлением угол α. Проезжающей мимо дорожной машине удалось посыпать горку снизу до половины высоты песком. Коэффициент трения скольжения полозьев санок о лед с песком $\mu = 0{,}5$. Пренебрегая трением санок о лед без песка, найти максимальное значение угла α, при котором санки не смогут достичь основания горки, съехав с ее вершины без начальной скорости.



Р и с. 70

Р е ш е н и е. Потенциальную энергию будем отсчитывать от основания горки CD (рис. 70). Санки массой m обладают в точке A потенциальной энергией $E_{p1} = mgh$ и кинетической $E_{k1} = 0$. Следовательно, полная механическая энергия санок

$$E = E_{k1} + E_{p1} = mgh.$$

Значение полной энергии будет таким же и в точке B, находящейся на половине высоты, поскольку на участке AB трения нет. Начиная с этой точки, на санки действует сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha.$$

Пусть санки останавливаются в точке C. Тогда изменение их полной механической энергии равно работе силы трения на участке пути BC:

$$(E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) = A_{тр}.$$

Учитывая, что

$$E_{k2} = 0,\ E_{p2} = 0,\ A_{тр} = -\mu mgBC\cos\alpha = -\mu mg\frac{h}{2\sin\alpha}\cos\alpha,$$

получаем $mgh = \mu mg\dfrac{h}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, откуда

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{\mu}{2},\ \alpha = 14°.$$

201. Деревянный шар массой M лежит на тонкой подставке. Снизу в шар попадает пуля массой m, летящая вертикально вверх, и пробивает его. При этом шар подскакивает на высоту h. На какую высоту поднимается пуля над подставкой с шаром, если ее скорость перед ударом о шар была равна v? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. Пусть u_1 – скорость пули непосредственно после пролета ее сквозь шар, H – высота, на которую поднялась пуля. Совместим с подставкой нулевой уровень потенциальной энергии. Тогда, согласно закону сохранения энергии, $mu_1^2/2 = mgH$. Отсюда

$$H = u_1^2/(2g). \qquad (1)$$

Чтобы найти u_1, составим на основании закона сохранения импульса уравнение (сумма проекций импульсов пули и шара на ось OY, направленную вертикально вверх, до удара и после него остается постоянной): $mv + 0 = mu_1 + Mu_2$, откуда

$$u_1 = (mv - Mu_2)/m,$$

где u_2 – скорость шара сразу же после взаимодействия с пулей.

На взаимодействующие тела действуют в вертикальном направлении внешние силы – силы тяжести, но закон сохранения импульса приближенно выполняется, так как время взаимодействия пули и шара очень мало.

На основании закона сохранения энергии составим для шара уравнение: $Mu_2^2/2 = Mgh$, откуда $u_2 = \sqrt{2gh}$. Следовательно,

$$u_1 = \left(mv - M\sqrt{2gh}\right)/m.$$

Подставив это значение скорости пули в формулу (1), найдем

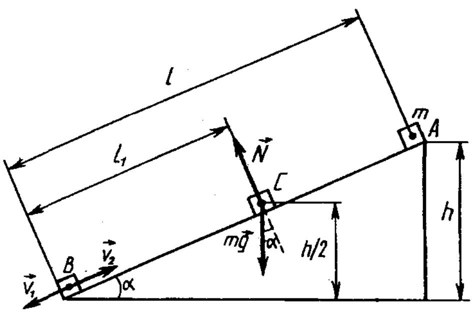
$$H = \left(v - \frac{M}{m}\sqrt{2gh}\right)^2 /(2g).$$

202. Тело начинает скользить вниз по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. В нижней точке тело ударяется о стенку, поставленную перпендикулярно направлению его движения. Удар абсолютно упругий. Определить коэффициент трения при движении тела, если после удара оно поднялось до половины первоначальной высоты.

Р е ш е н и е. Изменение механической энергии тела равно работе силы трения:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{тр}}, \qquad (1)$$

где E_1, E_2 – полная механическая энергия тела в точках A и C соответственно (рис. 71).



Р и с. 71

При абсолютно упругом отражении от стенки в точке B направление вектора скорости тела изменяется на противоположное, а модуль скорости остается прежним. Кинетическая энергия не изменяется.

Модуль силы трения при движении тела вниз и вверх один и тот же: $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$. Направление вектора $\vec{F}_{тр}$ как в первом, так и во втором случае составляет с направлением перемещения угол 180°. Поэтому работа силы трения

$$A_{тр} = F_{тр}(l + l_1)\cos 180^\circ = -\mu mg(l + l_1)\cos\alpha,$$

где l, l_1 – модули перемещения тела при движении его вниз и вверх соответственно.

Как видно из рис. 71, $l = h/\sin\alpha$, $l_1 = h/(2\sin\alpha)$. Учитывая это, получаем

$$A_{тр} = -\frac{3\mu mgh}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}. \qquad (2)$$

В точках A и C кинетическая энергия тела равна нулю, поэтому полная механическая энергия тела в этих точках равна потенциальной энергии:

$$E_1 = mgh,\ E_2 = mgh/2. \qquad (3)$$

Подставим значения (2) и (3) в выражение (1):

$$\frac{mgh}{2} - mgh = -\frac{3\mu mgh}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Отсюда $\mu = \mathrm{tg}\,\alpha/3$.

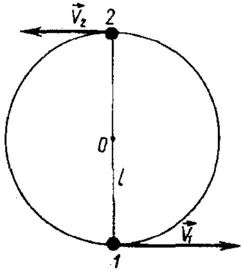
203. Какую работу нужно совершить, чтобы пружину жесткостью $k = 600$ Н/м, растянутую на $x = 4$ см, дополнительно растянуть на $\Delta x = 10$ см?

Р е ш е н и е. Работа, совершенная при растяжении пружины, равна изменению ее потенциальной энергии:

$$A = E_{p2} - E_{p1} = \frac{k(x + \Delta x)^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = \frac{k(2x + \Delta x)\Delta x}{2},\ A = 5\text{ Дж}.$$

204. На невесомой и нерастяжимой нити длиной l висит шарик. Какую минимальную скорость v_1 в горизонтальном направлении необходимо сообщить шарику в точке *1* (рис. 72), чтобы он сделал полный оборот в вертикальной плоскости? Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. В верхней точке 2 траектории шарик должен иметь некоторую линейную скорость $\vec{v}_2$, в противном случае он начнет падать из этой точки вертикально вниз.



Р и с. 72

По второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$, где $\vec{T}$ – сила натяжения нити в точке 2, $\vec{a}$ – ускорение в этой точке. Скорость $\vec{v}_2$ минимальна при $\vec{T} = \vec{0}$, т. е. $m\vec{g} = m\vec{a}$. Проекция ускорения $\vec{a}$ на ось, направленную из точки 2 вдоль нити к центру окружности, равна модулю центростремительного ускорения $a_n = v^2/l$, проекция вектора $\vec{g}$ на эту ось равна g. Следовательно,

$$mg = mv_2^2/l. \qquad (1)$$

Будем считать, что в точке 1 шарик находится на нулевом уровне потенциальной энергии. Тогда по закону сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + 2mgl. \qquad (2)$$

Решив совместно уравнения (1) и (2), получим

$$v_1 = \sqrt{5gl}.$$

Задачи для самостоятельного решения

205. Пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью $v_1 = 800$ м/с, попадает в доску толщиной $d = 50$ мм и вылетает из нее со скоростью $v_2 = 100$ м/с. Определить силу сопротивления доски, считая эту силу постоянной.

206. Цепь массой $m = 5$ кг, лежащую на столе, берут за один конец и равномерно поднимают вертикально вверх на высоту, при которой нижний конец отстоит от стола на расстоянии, равном длине цепи $l = 2$ м. Чему равна работа по подъему цепи?

207. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы телеграфный столб массой $m_1 = 200$ кг, к вершине