4. ОСНОВЫ СТАТИКИ

Методические указания к решению задач

Задачи на равновесие решают по следующему плану. Делают чертеж и обозначают на нем все силы, действующие на рассматриваемое тело. Затем выбирают систему координат, при этом координатные оси OX и OY направляют так, чтобы проекции сил на них выражались по возможности более просто. Находят проекции на оси OX и OY всех действующих на тело сил и составляют уравнения:

$$F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \quad (1)$$

$$F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0. \quad (2)$$

Составляют уравнение для моментов сил относительно оси вращения:

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0. \quad (3)$$

При этом моменты сил относительно данной оси берутся с разными знаками в зависимости от направления вращения тела. Можно, например, считать момент силы положительным, если в отсутствие других сил эта сила может повернуть тело по часовой стрелке, а отрицательным — если при тех же условиях она может вызвать поворот тела против часовой стрелки.

В учебных задачах обычно рассматриваются такие ситуации, когда все силы, приложенные к телу, лежат в одной плоскости. Поэтому можно рассчитывать моменты сил относительно некоторой неподвижной оси, проходящей через произвольно выбранную точку перпендикулярно этой плоскости. Если в задаче не указана ось вращения, то уравнение для моментов сил составляют относительно любой оси, выбранной так, чтобы через нее проходили линии действия неизвестных сил. Тогда моменты этих сил относительно выбранной оси будут равны нулю, и из уравнений (1)–(3) находят неизвестную величину.

Решение задач на нахождение центра тяжести тела сводится в основном к составлению уравнения для моментов сил. Если приложить в центре тяжести тела силу, направленную вертикально вверх и равную по модулю силе тяжести, то тело будет находиться в равновесии и, следовательно, сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через центр тяжести (или через любую другую точку), будет равна нулю. Составив и решив уравнение (3), можно найти положение центра тяжести.

Положение центра тяжести твердого тела совпадает с положением его центра масс.

Основные законы и формулы

Плечом силы относительно оси называется расстояние (длина перпендикуляра) от этой оси до линии действия силы.

Моментом силы относительно оси называется произведение модуля силы на ее плечо относительно этой оси:

$$M = Fl.$$

Условия равновесия твердого тела:

1) сумма всех внешних сил, действующих на тело, равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{0};$$

2) сумма моментов всех внешних сил, действующих на тело, относительно любой оси равна нулю (*правило моментов*), т. е.

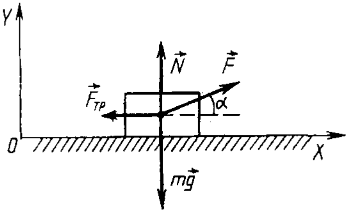
$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0.$$

При выполнении этих условий тело может либо находиться в покое, либо двигаться равномерно прямолинейно, либо равномерно вращаться вокруг оси, проходящей через его центр тяжести.

Примеры решения задач

264. Тело массой $m = 200$ кг перемещается равномерно по горизонтальной поверхности под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определить эту силу, если коэффициент трения тела о поверхность при движении $\mu = 0{,}30$.

Решение. На тело действуют сила $\vec{F}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. За положительное направление оси OX примем



Р и с. 80

направление движения тела, ось OY направим вертикально вверх (рис. 80). По условию задачи тело движется равномерно, т. е. находится в равновесии, следовательно, выполняется условие

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} = \vec{0}.$$

Поэтому суммы проекций этих сил на координатные оси OX и OY равны нулю:

$$F\cos\alpha - F_{тр} = 0, \qquad (1)$$

$$N + F\sin\alpha - mg = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) находим $N = mg - F\sin\alpha$ и, учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, подставляем в уравнение (1):

$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = 0.$$

Отсюда

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}, \quad F = 5{,}9 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

265. Чтобы вытащить автомобиль, застрявший в грязи, шофер привязал один конец троса к автомобилю, а второй к стоящему впереди дереву, предварительно натянув трос. Затем он подошел к середине троса и стал оттягивать его в горизонтальном направлении с силой $F = 500$ Н, направленной перпендикулярно тросу. Расстояние между автомобилем и деревом $l = 52$ м. Найти силу натяжения троса в момент, когда шофер продвинулся вперед на $s = 0{,}52$ м.

Р е ш е н и е. При оттягивании троса в нем возникают силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, направленные вдоль троса от точки O (рис. 81). Так как сила $\vec{F}$ приложена в середине троса и направлена перпендикулярно AB, то модули сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ можно считать одинаковыми: $T_1 = T_2 = T$.

Точка O находится в равновесии, поэтому сумма проекций сил $\vec{F}$, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ на любую координатную ось равна нулю. Спроектировав эти силы на ось OY, запишем условие равновесия:

$$2T\sin\alpha - F = 0.$$

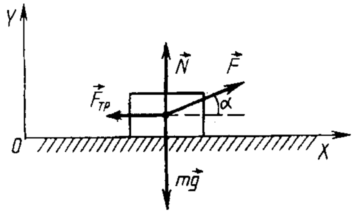


Рис. 80

направление движения тела, ось OY направим вертикально вверх (рис. 80). По условию задачи тело движется равномерно, т. е. находится в равновесии, следовательно, выполняется условие

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + m\vec{g} = \vec{0}.$$

Поэтому суммы проекций этих сил на координатные оси OX и OY равны нулю:

$$F\cos\alpha - F_{\text{тр}} = 0, \qquad (1)$$

$$N + F\sin\alpha - mg = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) находим $N = mg - F\sin\alpha$ и, учитывая, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, подставляем в уравнение (1):

$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = 0.$$

Отсюда

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}, \; F = 5{,}9 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

265. Чтобы вытащить автомобиль, застрявший в грязи, шофер привязал один конец троса к автомобилю, а второй к стоящему впереди дереву, предварительно натянув трос. Затем он подошел к середине троса и стал оттягивать его в горизонтальном направлении с силой $F = 500$ Н, направленной перпендикулярно тросу. Расстояние между автомобилем и деревом $l = 52$ м. Найти силу натяжения троса в момент, когда шофер продвинулся вперед на $s = 0{,}52$ м.

Р е ш е н и е. При оттягивании троса в нем возникают силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, направленные вдоль троса от точки O (рис. 81). Так как сила $\vec{F}$ приложена в середине троса и направлена перпендикулярно AB, то модули сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ можно считать одинаковыми: $T_1 = T_2 = T$.

Точка O находится в равновесии, поэтому сумма проекций сил $\vec{F}$, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ на любую координатную ось равна нулю. Спроектировав эти силы на ось OY, запишем условие равновесия:

$$2T\sin\alpha - F = 0.$$

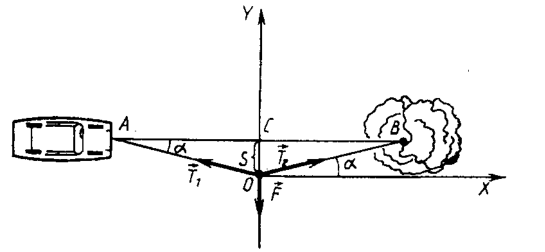


Рис. 81

Отсюда $T = \frac{F}{2\sin\alpha}$. Как видно из рисунка, $\sin\alpha = \frac{OC}{OA}$. Но $OC = s$, $OA = l/2$, поэтому $\sin\alpha = 2s/l$. Следовательно,

$$T = \frac{Fl}{4s}, \; T = 13 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

По последней формуле можно определить, во сколько раз сила натяжения троса превосходит усилие шофера:

$$n = \frac{T}{F} = \frac{l}{4s}.$$

В рассматриваемом случае $n = 25$.

266. Шар массой m висит на веревке длиной l, прикрепленной к гладкой стене. Найти силу, с которой шар давит на стену, если его радиус R.

Р е ш е н и е. На шар действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$, сила натяжения веревки $\vec{T}$ и сила нормальной реакции стены $\vec{N}$. (Сила трения отсутствует, поскольку стена гладкая.) Так как шар находится в равновесии, сумма моментов всех сил относительно любой оси равна нулю. Моменты сил $\vec{F}_{\text{т}}$ и $\vec{N}$ относительно оси, проходящей через точку O, равны нулю, потому что плечи этих сил равны нулю. Следовательно, момент силы $\vec{T}$ относительно точки O также равен нулю, значит, линия действия ее проходит через центр шара.

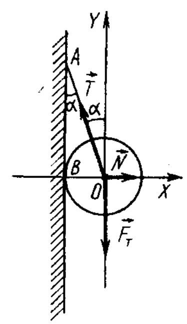


Рис. 82

Координатную ось OX направим горизонтально, ось OY – вертикально вверх (рис. 82). Шар находится в равновесии, поэтому выполняется условие $\vec{T} + \vec{F}_т + \vec{N} = \vec{0}$. В проекциях на оси OX и OY это уравнение дает:

$$N - T\sin\alpha = 0, \quad T\cos\alpha - mg = 0.$$

Отсюда $N = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Из треугольника AOB находим:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{R}{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}} = \frac{R}{\sqrt{l^2 + 2Rl}}.$$

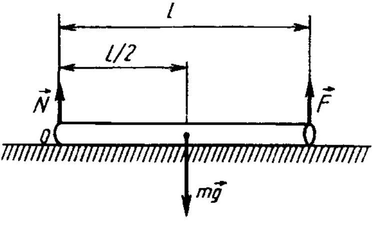
Тогда

$$N = \frac{mgR}{\sqrt{l^2 + 2Rl}}.$$

Согласно третьему закону Ньютона, сила, с которой шар давит на стену, равна по модулю $\vec{N}$ и направлена в противоположную сторону.

267. Цилиндрическая труба малого диаметра, имеющая массу $m = 2 \cdot 10^3$ кг, лежит на земле. Какую наименьшую силу надо приложить, чтобы приподнять трубу за один из ее концов?

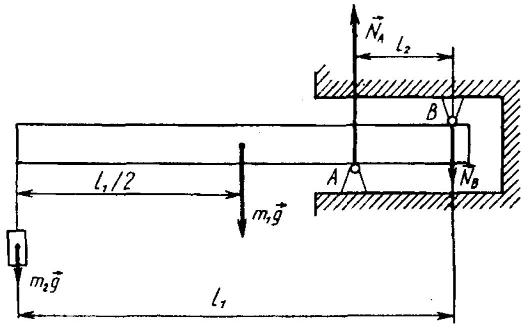
Р е ш е н и е. Чтобы приподнять трубу за один из ее концов, нужно приложить к этому концу некоторую силу $\vec{F}$, направленную вверх (рис. 83). Пусть l – длина трубы. Тогда точка приложения силы тяжести (центр тяжести) находится на расстоянии $l/2$ от конца трубы. Учитывая это, составляем уравнение моментов сил относительно оси, проходящей через точку O: $mgl/2 - Fl = 0$. Отсюда $F = mg/2$, $F = 1 \cdot 10^4$ Н.



Р и с. 83

268. Балка массой $m_1 = 600$ кг и длиной $l_1 = 4{,}00$ м покоится на опорах A и B (рис. 84), расстояние между которыми $l_2 = 1{,}00$ м. К свободному концу балки подвешен груз. Балка давит на опору B с силой $F_B = 7{,}35 \cdot 10^3$ Н. Определить массу груза и силу, с которой балка давит на опору A.

Р е ш е н и е. На балку с грузом действуют четыре силы: сила тяжести балки $m_1\vec{g}$, сила тяжести груза $m_2\vec{g}$ и силы $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$ нормальной реакции опор A и B. По третьему закону Ньютона силы $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_B$, с которыми балка давит



Р и с. 84

на опоры (на рисунке не показаны), равны по модулю силам $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$, т. е.

$$F_A = N_A, \ F_B = N_B, \tag{1}$$

и имеют направления, противоположные направлениям сил $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$.

Балка находится в равновесии, поэтому сумма моментов всех действующих на нее сил относительно любой оси равна нулю. Составим уравнение для моментов сил относительно оси, проходящей через опору A перпендикулярно плоскости чертежа:

$$N_B l_2 - m_1 g(l_1/2 - l_2) - m_2 g(l_1 - l_2) = 0.$$

Отсюда с учетом равенств (1) получим:

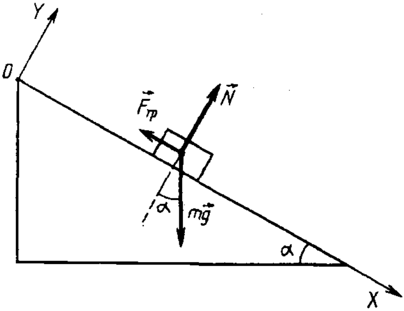
$$m_2 = \frac{F_B l_2 - m_1 g(l_1/2 - l_2)}{g(l_1 - l_2)}, \ m_2 = 50 \text{ кг}.$$

Запишем условие равновесия тела в проекциях на вертикальное направление: $N_A - m_2 g - m_1 g - N_B = 0$. Отсюда, учитывая равенства (1), получаем:

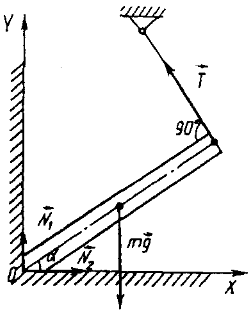
$$F_A = F_B + (m_1 + m_2)g, \quad F_A = 13{,}7 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

269. От легкого толчка тело начало равномерно скользить вниз по наклонной плоскости с углом наклона α. Найти коэффициент трения скольжения.

Р е ш е н и е. На тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Координатную ось OX направим вдоль наклон-



Р и с. 85



Р и с. 86

ной плоскости вниз, а ось OY – перпендикулярно плоскости вверх (рис. 85). По условию тело движется равномерно, поэтому суммы проекций на оси OX и OY всех сил, действующих на тело, равны нулю:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = 0, \tag{1}$$

$$N - mg\cos\alpha = 0. \tag{2}$$

Сила трения скольжения $F_{тр} = \mu N$, где μ – коэффициент трения. Из равенства (2) найдем $N = mg\cos\alpha$ и, подставив значение $F_{тр}$ в формулу (1), получим

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0.$$

Отсюда найдем искомое значение коэффициента трения: $\mu = \operatorname{tg}\alpha$.

270. Однородный стержень OA упирается одним концом в угол и удерживается за другой конец нитью (рис. 86). Масса стержня m, а угол его наклона к горизонту равен α. Найти силу натяжения нити, а также силы, с которыми стержень давит на пол и на стену.

Р е ш е н и е. На стержень действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, силы нормальных реакций пола $\vec{N}_1$ и стены $\vec{N}_2$. Так как стержень находится в равновесии, то

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{0}.$$

Суммы проекций этих сил на оси OX и OY равны нулю:

$$N_2 - T\sin\alpha = 0, \tag{1}$$

$$N_1 - mg + T\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

Составим уравнение для моментов сил относительно оси, проходящей через точку A:

$$mg(\cos\alpha)l/2 - Tl = 0,$$

где l – длина стержня. Из этого уравнения найдем

$$T = \frac{mg\cos\alpha}{2}.$$

Подставим это значение в уравнения (1) и (2):

$$N_2 = \frac{mg\sin 2\alpha}{4}, \quad N_1 = \frac{mg(1+\sin^2\alpha)}{2}.$$

Согласно третьему закону Ньютона, с такими по модулю силами давит стержень на стену и пол.

271. Однородный стержень AB прикреплен к вертикальной стене посредством шарнира A и удерживается под углом $\alpha = 60°$ к вертикали с помощью невесомой веревки BC, образующей с ним угол $\beta = 30°$ (рис. 87). Определить силу натяжения веревки, а также модуль и направление силы реакции шарнира, если известно, что масса стержня $m = 2{,}0$ кг.

Р е ш е н и е. На стержень действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная к середине стержня и направленная вертикально вниз; сила натяжения веревки $\vec{T}$, приложенная в точке B и направленная вдоль веревки; сила реакции шарнира $\vec{N}$. Модуль и направление силы $\vec{N}$ неизвестны, поэтому на рисунке она не показана. Запишем условие равновесия в векторной форме:

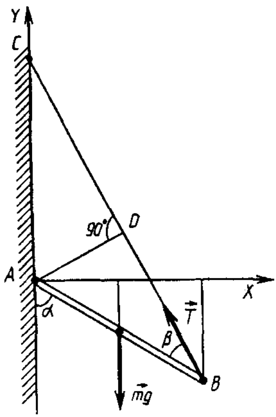
$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} = \vec{0},$$

а затем в проекциях на оси OX и OY:

$$N_x - T\sin(\alpha - \beta) = 0, \qquad (1)$$

$$N_y - mg + T\cos(\alpha - \beta) = 0. \qquad (2)$$

Составим уравнение для моментов сил относительно оси, проходящей через точку A:



Р и с. 87

$$mg(\sin\alpha)l/2 - Tl\sin\beta = 0, \qquad (3)$$

где l – длина стержня.

Из уравнений (1) и (2) найдем:

$$N_x = T\sin(\alpha-\beta),\ N_y = mg - T\cos(\alpha-\beta).$$

Модуль силы $\vec{N}$

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{(T\sin(\alpha-\beta))^2 + (mg - T\cos(\alpha-\beta))^2} =$$

$$= \sqrt{T^2 + m^2g^2 - 2mgT\cos(\alpha-\beta)}. \qquad (4)$$

Из уравнения (3) следует:

$$T = \frac{mg\sin\alpha}{2\sin\beta},\ T = 17\ \text{Н}.$$

Подставив полученное выражение T в формулу (4), после преобразований и вычислений получим:

$$N = mg\sqrt{1 + \frac{\sin^2\alpha}{4\sin^2\beta} - \frac{\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}{\sin\beta}},\quad N = 9{,}8\ \text{Н}.$$

Направление вектора $\vec{N}$ определяется углом γ, который этот вектор составляет с осью OX. По значениям проекций N_x и N_y найдем

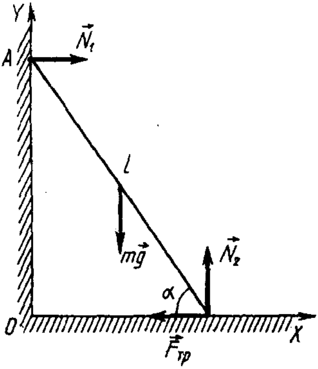
$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{N_x}{N_y} = \frac{mg - T\cos(\alpha-\beta)}{T\sin(\alpha-\beta)}.$$

Подставив сюда $T = mg\sin\alpha/(2\sin\beta)$, получим после преобразований:

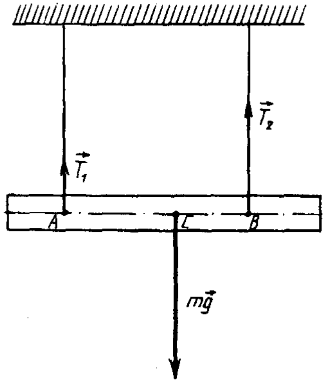
$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\sin\beta - \sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)},\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \gamma = 30°.$$

272. Лестница опирается одним концом о вертикальную гладкую стену, а другим – о землю. Коэффициент трения лестницы о землю $\mu = 0{,}4$. Центр тяжести лестницы находится на ее середине. Определить наименьший угол α, который лестница может образовать с горизонтом, не соскальзывая.

Р е ш е н и е. На лестницу действуют сила тяжести $m\vec{g}$, силы нормальных реакций $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ стены и земли, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 88). Лестница находится в равновесии, следовательно, $m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}} = \vec{0}$, поэтому



Р и с. 88



Р и с. 89

суммы проекций всех сил на оси OX и OY равны нулю: $N_1 - F_{тр} = 0$, $N_2 - mg = 0$, или

$$N_1 - \mu N_2 = 0, \tag{1}$$

$$N_2 - mg = 0. \tag{2}$$

Пусть l – длина лестницы. На основании равенства нулю суммы моментов всех сил относительно оси, проходящей через точку B, составим уравнение:

$$N_1 l \sin\alpha - mg(\cos\alpha)l/2 = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = mg/(2N_1). \tag{3}$$

Выразив из уравнения (2) $N_2 = mg$ и подставив это значение в уравнение (1), найдем $N_1 = \mu mg$. Подставив это выражение в формулу (3), получим:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\mu},\ \alpha = 51°.$$

273. Однородная балка массой $m = 140$ кг подвешена на двух канатах (рис. 89). Каковы силы натяжения T_1 и T_2 канатов, если $AC = l_1 = 3$ м, $CB = l_2 = 1$ м?

Р е ш е н и е. Балка находится в равновесии, поэтому сумма моментов всех действующих на нее сил относительно оси, проходящей через точку B, равна нулю:

$$T_1(l_1 + l_2) - mgl_2 = 0.$$

Отсюда

$$T_1 = \frac{mgl_2}{l_1 + l_2}. \qquad (1)$$

Относительно оси, проходящей через точку A, сумма моментов всех сил также равна нулю:

$$mgl_1 - T_2(l_1 + l_2) = 0.$$

Отсюда

$$T_2 = \frac{mgl_1}{l_1 + l_2}. \qquad (2)$$

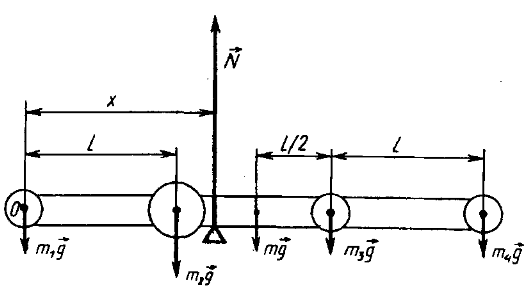
Подставив в формулы (1) и (2) числовые значения величин, получим: $T_1 = 3 \cdot 10^2$ Н, $T_2 = 1 \cdot 10^3$ Н.

Силу T_2 можно было бы найти иначе (после того, как найдена сила T_1), воспользовавшись условием равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальное направление: $T_1 + T_2 - mg = 0$, откуда $T_2 = mg - T_1$.

274. Четыре шара массами m_1, m_2, m_3 и m_4 надеты на стержень так, что их центры находятся на одинаковых расстояниях l друг от друга. Масса стержня m. Определить положение центра тяжести системы.

Решение. Предположим, что центр тяжести находится на расстоянии x от центра левого шара (рис. 90). Если поставим в этом месте опору, то система будет находиться в равновесии. Следовательно, сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через любую точку, будет равна нулю. На систему действуют силы тяжести шаров $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$, $m_4\vec{g}$, стержня $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$. Сумма моментов этих сил относительно оси, проходящей через точку O, равна нулю:

$$m_2gl + mg \cdot 1{,}5l + m_3g \cdot 2l + m_4g \cdot 3l - Nx = 0.$$



Р и с. 90

Сумма проекций всех сил на вертикальное направление также равна нулю:

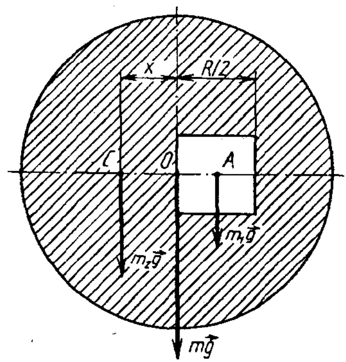
$$N - m_1 g - mg - m_2 g - m_3 g - m_4 g = 0.$$

Решив систему двух уравнений, найдем

$$x = \frac{(m_2 + 1{,}5m + 2m_3 + 3m_4)l}{m + m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

275. Определить положение центра тяжести однородной круглой пластины радиуса R, в которой вырезано квадратное отверстие со стороной $a = R/2$ так, как показано на рис. 91.

Р е ш е н и е. Расположим пластину с отверстием так, чтобы ось симметрии была горизонтальна, и предположим, что вырезанный квадрат помещен на прежнее место. Тогда сила тяжести всего тела



Р и с. 91

$$m\vec{g} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g},$$

где $m_1\vec{g}$ – сила тяжести квадрата, приложенная в центре квадрата; $m_2\vec{g}$ – сила тяжести пластинки с отверстием, приложенная в искомом центре тяжести C.

Относительно оси, проходящей через общий центр тяжести O, сумма моментов всех сил тяжести равна нулю:

$$m_1 g R/4 - m_2 g x = 0,$$

где x – расстояние от точки O до точки C (центра тяжести пластинки с отверстием). Отсюда

$$x = \frac{m_1 R}{4m_2}.$$

Пусть h – толщина пластинки, ρ – плотность материала, из которого она изготовлена. Тогда:

$$m_1 = \rho\left(\frac{R}{2}\right)^2 h = \frac{\rho R^2 h}{4},$$

$$m_2 = m - m_1 = \rho\pi R^2 h - \frac{\rho R^2 h}{4} = \frac{1}{4}\rho R^2 h(4\pi - 1).$$

Подставив в формулу (1) m_1 и m_2, получим

$$x = \frac{R}{4(4\pi - 1)}.$$

276. Система, состоящая из неподвижного и подвижного блоков (рис. 92), находится в равновесии. К неподвижному блоку подвешен груз массой $m_1 = 20$ кг. Найти массу груза m_2, силу натяжения нити и силу, действующую на ось неподвижного блока.

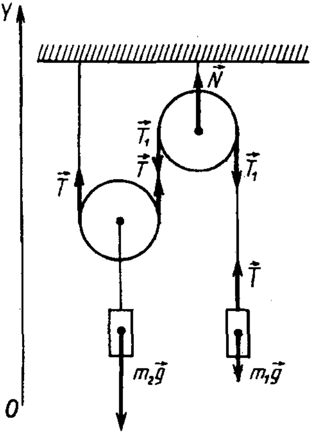


Рис. 92

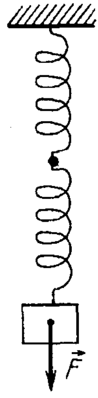


Рис. 93

Решение. При равновесии системы сумма проекций на ось OY сил, действующих на блоки и тела, равна нулю:

$$2T - m_2 g = 0, \;\; N - 2T_1 = 0, \;\; T - m_1 g = 0, \qquad (1)$$

где $T = T_1$ – модуль силы натяжения нити; N – сила реакции оси неподвижного блока. Согласно третьему закону Ньютона, на ось этого блока действует сила $F = N$. Тогда из уравнений (1) найдем:

$$T = m_1 g, \;\; m_2 = 2m_1, \;\; F = 2T,$$

$$T = 2 \cdot 10^2 \text{ Н}, \;\; m_2 = 40 \text{ кг}, \;\; F = 4 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

277. Две пружины, жесткости которых $k_1 = 400$ Н/м и $k_2 = 600$ Н/м, соединены последовательно (рис. 93). Какой должна быть жесткость пружины, которой можно было бы заменить эту систему из двух пружин?

Р е ш е н и е. При последовательном соединении пружин силы натяжения их одинаковы и равны по модулю приложенной силе F. По закону Гука

$$F = k\Delta l, \qquad (1)$$

где k – жесткость системы (а значит, и жесткость пружины, которой можно было бы заменить эту систему); Δl – абсолютная деформация системы:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2; \qquad (2)$$

Δl_1, Δl_2 – деформация каждой пружины.

По закону Гука

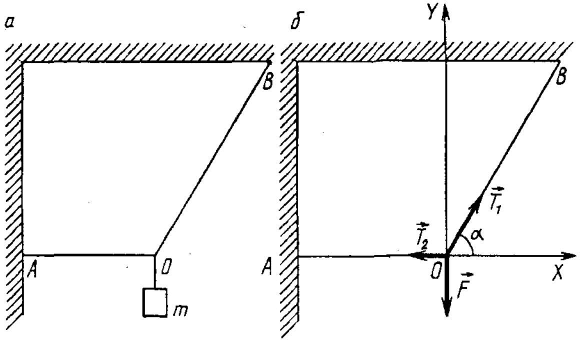
$$F = k_1\Delta l_1,\ F = k_2\Delta l_2. \qquad (3)$$

Из выражений (1)–(3) находим: $\Delta l = F/k$, $\Delta l_1 = F/k_1$, $\Delta l_2 = F/k_2$. Подставив эти значения в равенство (2), получим

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

откуда $k = k_1k_2/(k_1 + k_2)$, $k = 240$ Н/м.

278. Груз массой $m = 40$ кг висит на двух тросах: AO и BO (рис. 94, *а*). Трос BO образует с горизонтальным направлением угол $\alpha = 60°$. Найти силы натяжения тросов.



Р и с. 94

Р е ш е н и е. К точке O приложены силы натяжения тросов $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, направленные вдоль тросов, а также сила $\vec{F}$, равная силе тяжести груза (рис. 94, *б*) Координатную ось OX направим вдоль троса AO вправо, а ось OY – вертикально вверх. Точка O находится в равновесии. Следовательно, $\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{F} = \vec{0}$. Поэтому суммы проекций всех действующих на нее сил на оси OX и OY равны нулю:

$$T_1 \cos\alpha - T_2 = 0, \ T_1 \sin\alpha - mg = 0.$$

Отсюда $T_1 = \frac{mg}{\sin\alpha}$, $T_2 = \frac{mg}{\operatorname{tg}\alpha}$, $T_1 = 4{,}5 \cdot 10^2$ Н, $T_2 = 2{,}3 \cdot 10^2$ Н.

279. Цилиндр массой m = 150 кг удерживается на наклонной плоскости с помощью ленты, с одной стороны закрепленной на наклонной плоскости, а с другой направленной параллельно плоскости (рис. 95, *а*). Найти силу натяжения ленты. Угол наклона плоскости α = 30°.

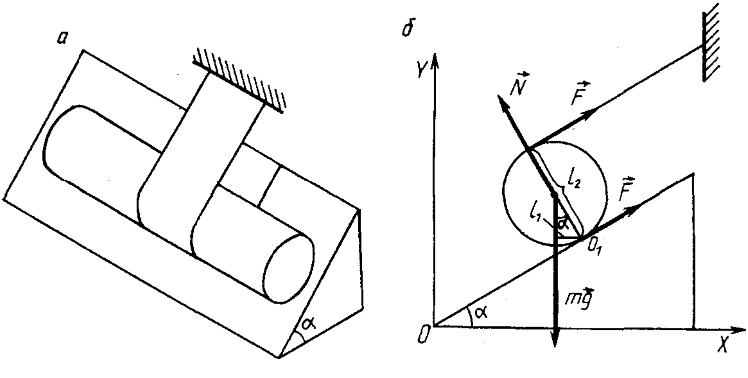
Р е ш е н и е. Выберем направления координатных осей OX и OY так, как показано на рис. 95, *б*. На цилиндр действуют сила натяжения ленты $\vec{F}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Поскольку цилиндр находится в равновесии, то $2\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}$. Следовательно, сумма проекций всех сил на каждую из осей координат должна равняться нулю:

$$2F\cos\alpha - N\sin\alpha = 0, \ N\cos\alpha - mg + 2F\sin\alpha = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получим:

$$F = \frac{mg\sin\alpha}{2}, \ F = 3{,}7 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Эту задачу можно решить другим способом. Относительно оси, проходящей через точку O_1, сумма моментов всех сил равна нулю. Плечо силы $m\vec{g}$ относительно этой оси



Р и с. 95

$l_1 = R \sin \alpha$, где R – радиус цилиндра. Плечо силы $\vec{F}$, приложенной к цилиндру сверху, $l_2 = 2R$. Согласно правилу моментов, имеем $-mgR \sin \alpha + F \cdot 2R = 0$, откуда $F = mg \sin \alpha / 2$.

280. Неравноплечие весы уравновесили, положив дополнительный груз на одну из чаш весов. Можно ли теперь пользоваться этими весами для взвешивания так же, как и равноплечими? Массой коромысла пренебречь.

Р е ш е н и е. Взвешивание – это определение массы и веса тела с помощью весов. Действие рычажных весов основано на условии равновесия тела с неподвижной осью вращения. Пусть на левой чаше весов находится взвешиваемое тело, а на правой – уравновешивающая гиря (рис. 96, *а*). На левую чашу действует вес тела $\vec{P}_1$, на тело – сила тяжести $m_1\vec{g}$ и сила нормальной реакции чаши $\vec{N}_1$. Поскольку тело покоится, модуль силы реакции чаши равен модулю силы тяжести, т. е. $N_1 = m_1 g$. Но, согласно третьему закону Ньютона, сила реакции чаши по модулю равна силе, с которой тело давит на чашу (весу тела): $N_1 = P_1$. Следовательно, вес тела

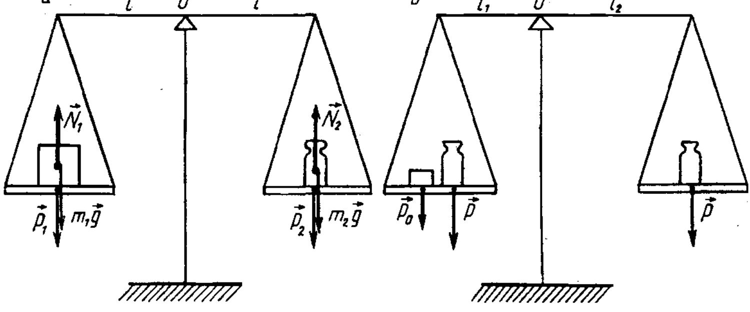
$$P_1 = m_1 g. \qquad (1)$$

На правую чашу действует вес гири $\vec{P}_2$. Рассуждая аналогично, получаем

$$P_2 = m_2 g. \qquad (2)$$

При равновесии выполняется условие равенства нулю суммы моментов сил $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$:

$$-P_1 l_1 + P_2 l_2 = 0, \text{ или } P_1 l_1 = P_2 l_2,$$



Р и с. 96

где l_1, l_2 – плечи этих сил относительно оси вращения, проходящей через точку O.

Если весы равноплечие (рис. 96, *а*), т. е. $l_1 = l_2 = l$, то при равновесии вес тела равен весу гири: $P_1 = P_2$. Учитывая формулы (1) и (2), можно также утверждать, что при этом масса тела равна массе гири: $m_1 = m_2$. Таким образом, с помощью рычажных весов можно определить как массу, так и вес тела.

Рассмотрим теперь описанную в задаче ситуацию. Пусть неравноплечие весы уравновесили, положив на левую чашу дополнительный груз весом P_0 (рис. 96, *б*). При этом выполняется условие

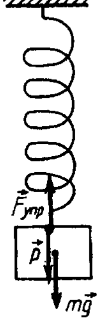
$$M_1 = M_2, \qquad (3)$$

где M_1, M_2 – модули моментов сил, действующих на чаши.

Допустим теперь, что мы положили на каждую чашу по гире одинакового веса P. Нарушится ли при этом равновесие? Предположим, что оно не нарушится. Тогда должно выполняться условие $M_1 + Pl_1 = M_2 + Pl_2$, откуда с учетом равенства (3) получим $l_1 = l_2$, что противоречит условию. Следовательно, равновесие нарушится. Таким образом, этими весами нельзя пользоваться так же, как и равноплечими.

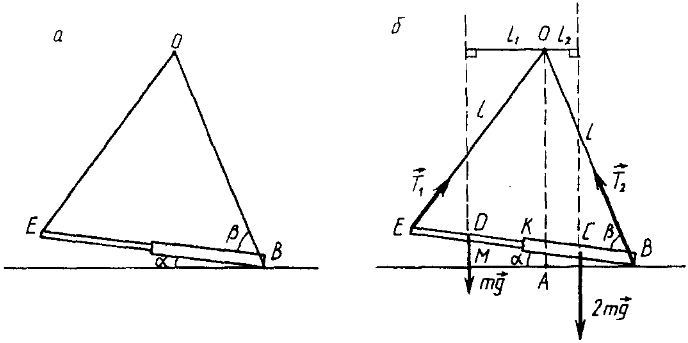
В заключение здесь уместно обратить внимание на то, что вес тела можно определить также с помощью пружинных весов. Пружинные весы отличаются от рычажных тем, что на них вес тела уравновешивается силой упругости пружины, растянутой подвешенным к ней (или сжатой положенным на нее) телом (рис. 97).

281. Стержень, составленный из двух однородных кусков одинаковой длины, является основанием равностороннего треугольника (рис. 98, *а*). Масса одного куска стержня вдвое больше массы другого куска. Стержень подвешен за концы на двух невесомых нитях, которые служат боковыми сторонами этого треугольника. Какой угол α образует стержень с горизонтом в положении равновесия?



Р и с. 97

Р е ш е н и е. Поскольку стержень находится в равновесии, сумма моментов всех сил равна нулю. На стержень действуют четыре силы: силы натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная к меньшему по массе куску, и сила



Р и с. 98

тяжести $2m\vec{g}$, приложенная к куску вдвое большей массы (рис. 98, *б*). Для определения моментов сил удобно выбрать ось, проходящую через точку подвеса O, так как через нее проходят линии действия неизвестных сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, и, следовательно, моменты этих сил равны нулю. На основании правила моментов составим уравнение:

$$2mgl_2 - mgl_1 = 0, \tag{1}$$

где l_2, l_1 – плечи сил соответственно $2m\vec{g}$ и $m\vec{g}$ относительно оси, проходящей через точку O.

Для нахождения l_1 и l_2 проведем из точки O перпендикуляр OA на горизонтальное направление. Тогда плечо

$$l_1 = MB - AB.$$

Из $\triangle OAB$ находим: $AB = l\cos(\alpha + \beta)$, где l – длина нити (и стержня); $\beta = 60°$, так как треугольник равносторонний. Из $\triangle DMB$ находим $MB = DB\cos\alpha$.

Поскольку сила $m\vec{g}$ приложена посередине тонкой части EK стержня, а сила $2m\vec{g}$ – посередине KB и, кроме того, $EK = KB$, то $ED = DK = KC = CB = l/4$. Следовательно,

$$MB = \frac{3}{4}l\cos\alpha, \; l_1 = \frac{3}{4}l\cos\alpha - l\cos(\alpha + \beta).$$

Как видно из рис. 98, *б*,

$$l_2 = AB - BC\cos\alpha = l\cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{4}l\cos\alpha.$$

Подставив значения l_1 и l_2 в уравнение (1), получим

$$2mgl\left(\cos(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}\cos\alpha\right)-mgl\left(\frac{3}{4}\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\right)=0,$$

или после преобразований

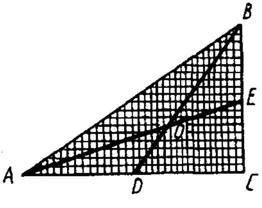
$$3\cos\alpha\cos\beta-3\sin\alpha\sin\beta-\frac{5}{4}\cos\alpha=0. \qquad (2)$$

Так как $\beta = 60°$, то $\cos\beta = 1/2$, $\sin\beta = \sqrt{3}/2$. Подставив эти значения в уравнение (2) и решив его, получим

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{6\sqrt{3}} = 6°.$$

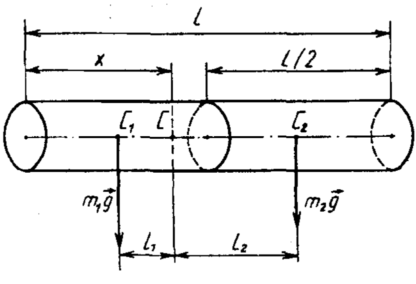
282. Доказать, что центр тяжести произвольного плоского треугольника находится в точке пересечения его медиан.

Р е ш е н и е. Разобьем треугольник линиями, параллельными стороне AC, на большое число тонких полосок (рис. 99). Каждую из полосок можно приближенно считать однородным стержнем, центр тяжести которого лежит на его середине. Следовательно, центр тяжести треугольника находится на медиане BD. Разбивая треугольник таким же образом на полоски, параллельные BC, приходим к выводу, что центр тяжести его должен находиться на медиане AE. Этим двум условиям удовлетворяет только точка O пересечения медиан. Итак, центр тяжести плоского треугольника находится в точке пересечения его медиан.



Р и с. 99

283. Цилиндр состоит из двух равных частей: медной и алюминиевой. Длина цилиндра $l = 0{,}8$ м, плотность меди $\rho_1 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность алюминия $\rho_2 = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найти положение центра тяжести цилиндра.



Р и с. 100

Р е ш е н и е. Центры тяжести C_1 и C_2 медной и алюминиевой частей цилиндра расположены на его оси на расстояниях $l/4$ от оснований (рис. 100). Центр тяжести C всего цилиндра находится на его оси на расстоянии x от левого основания. Если закрепить весь цилиндр на оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости рисунка, то относительно этой оси будет выполняться условие равновесия: алгебраическая сумма моментов сил $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ равна нулю, т. е.

$$m_2gl_2 - m_1gl_1 = 0, \qquad (1)$$

где l_1, l_2 — плечи сил относительно этой оси.

Из рисунка видно, что

$$l_1 = x - \frac{l}{4}, \; l_2 = \frac{l}{4} + \left(\frac{l}{2} - x\right) = \frac{3l}{4} - x. \qquad (2)$$

Массы m_1 и m_2 медной и алюминиевой частей цилиндра выразим через плотности и объемы (объемы их одинаковы):

$$m_1 = \rho_1V, \; m_2 = \rho_2V. \qquad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в уравнение (1), получим

$$\rho_2\left(\frac{3l}{4} - x\right) - \rho_1\left(x - \frac{l}{4}\right) = 0.$$

Отсюда $x = \dfrac{l(\rho_1 + 3\rho_2)}{4(\rho_1 + \rho_2)}$, $x = 0{,}3$ м.

Задачи для самостоятельного решения

284. Вертикально расположенная пружина соединяет два груза. Масса верхнего груза $m_1 = 2$ кг, а нижнего $m_2 = 3$ кг. Когда система подвешена за верхний груз, длина пружины $l_1 = 10$ см. Если же систему поставить на подставку, длина пружины оказывается равной $l_2 = 4$ см. Определить длину недеформированной пружины.

285. К концам однородного стержня длиной $l = 1$ м и массой $m = 0{,}8$ кг прикреплены два маленьких шарика, массы которых $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}25$ кг. Стержень мо-