5. ЖИДКОСТИ И ГАЗЫ

Методические указания к решению задач

В задачах, связанных с определением гидростатического давления, используются закон Паскаля и следствия из него. Сделав схематический чертеж, нужно изобразить на нем уровни, занимаемые жидкостью по условию задачи. Поверхность нулевого уровня выбирают так, чтобы она проходила по самой нижней границе раздела сред. Затем на основании следствия из закона Паскаля составляют уравнение равновесия жидкости

$$p_A = p_B, \tag{1}$$

где p_A, p_B – полные давления в точках A и B, расположенных на поверхности одного уровня в покоящейся жидкости.

Если по условию задачи происходит переливание жидкости из одной части сосуда в другую, то к составленному уравнению (1) можно добавить условие несжимаемости жидкости:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2,$$

где ΔV_1, ΔV_2 – соответственно уменьшение объема жидкости в одной части сосуда и увеличение его в другой части.

Затем составленную систему уравнений решают относительно искомой величины.

Задачи на равновесие тел в жидкости или газе решают по такому же плану, как и рассмотренные выше задачи на статику.

Если по условию задачи тело движется с постоянным ускорением в жидкости или газе, нужно составить уравнение движения на основании второго закона Ньютона так же, как и при решении задач на динамику.

Основные законы и формулы

Давление – скалярная физическая величина, равная отношению модуля силы $\vec{F}$, действующей перпендикулярно поверхности, к площади S этой поверхности:

$$p = F/S.$$

Гидростатическое давление внутри жидкости на глубине h

$$p = \rho g h,$$

где ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

Полное давление внутри покоящейся жидкости на глубине h

$$p_п = p_0 + \rho g h,$$

где p_0 – давление на открытой поверхности.

Нормальное атмосферное давление p_0 = 760 мм рт. ст. = = 101 325 Па.

Закон Паскаля: давление, производимое на жидкость или газ, передается без изменения по всем направлениям в каждую точку жидкости или газа.

Средняя сила, с которой жидкость давит на плоскую боковую стенку сосуда,

$$F_{ст} = p_{ц.т} S_{ст},$$

где $p_{ц.т}$ – давление жидкости на глубине центра тяжести жидкости; $S_{ст}$ – площадь поверхности стенки.

Архимедова сила, действующая на тело, погруженное в жидкость или газ,

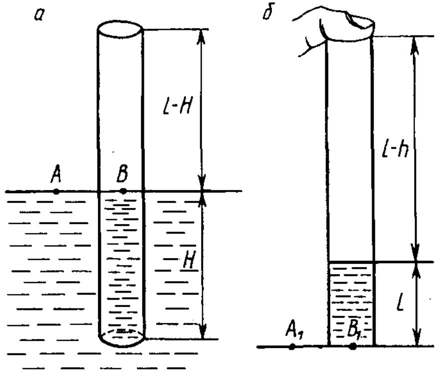
$$F_А = \rho_ж g V_т,$$

где $\rho_ж$ – плотность жидкости; $V_т$ – объем погруженной части тела. Эта сила приложена в центре тяжести вытесняемого объема жидкости и направлена по нормали к открытой поверхности жидкости.

Примеры решения задач

318. Для приближенного определения атмосферного давления взяли стеклянную трубку длиной l и погрузили ее вертикально на глубину H в жидкость плотностью ρ. Закрыв верхний конец трубки пальцем, вынули ее из жидкости. Высота столба жидкости, оставшейся в трубке, равна h. Чему равно атмосферное давление?

Р е ш е н ие. Когда трубка была погружена в жидкость (рис. 116, *а*), столбик воздуха длиной $l - H$ находился при атмосферном давлении, так как $p_A = p_B = p_{атм}$. После того как трубку вынули из жидкости (рис. 116, *б*), столбик воз-



Р и с. 116

духа длиной $l - h$ находился при некотором давлении p_x. Точки A_1 и B_1 находятся на одном уровне, поэтому $p_A = p_B$, или $p_{атм} = p_x - \rho g h$. Отсюда

$$p_x = p_{атм} - \rho g h.$$

Так как температура воздуха постоянна, то на основании закона Бойля–Мариотта

$$p_{атм}(l - H)S = (p_{атм} - \rho g h)(l - h)S,$$

где S – площадь поперечного сечения трубки. Отсюда

$$p_{атм} = \frac{\rho g h(l - h)}{H - h}.$$

319. В сосуд с вертикальными стенками и площадью дна S налита жидкость плотностью ρ. На сколько изменится уровень жидкости в сосуде, если в него опустить тело произвольной формы массой m, которое не тонет?

Р е ш е н и е. Тело плавает, следовательно, архимедова сила равна силе тяжести: $F_А = mg$. Жидкость действует на тело с силой $\vec{F}_А$, направленной вертикально вверх. Согласно третьему закону Ньютона, тело действует на жидкость с такой же по модулю силой, направленной вертикально вниз. Таким образом, тело, плавающее в жидкости, увеличивает силу, действующую на дно сосуда, на $\Delta F = mg$. Но само тело не касается дна, поэтому эта сила изменяется благодаря изменению давления жидкости. Если уровень жидкости в сосуде поднялся на Δh, то давление увеличилось на $\Delta p = \rho g \Delta h$, а сила, действующая на дно сосуда, возросла на $\Delta F = \rho g S \Delta h$. Поэтому $\rho g S \Delta h = mg$, откуда $\Delta h = m/(\rho S)$.

320. Малый поршень гидравлического пресса за один ход опускается на расстояние $h_1 = 0{,}20$ м, а большой поршень поднимается на $h_2 = 0{,}01$ м (рис. 117). С какой силой действует пресс на зажатое в нем тело, если на малый поршень действует сила $F_1 = 500$ Н?

Р е ш е н и е. Сила $\vec{F}_1$ создает давление $p = F_1/S_1$, где S_1 – площадь малого поршня. Согласно закону Паскаля, такое же давление будет и в большом цилиндре пресса. Следовательно, на большой поршень со стороны жидкости действует сила

$$F_2 = pS_2 = F_1 S_2 / S_1, \tag{1}$$

где S_2 – площадь большого поршня.

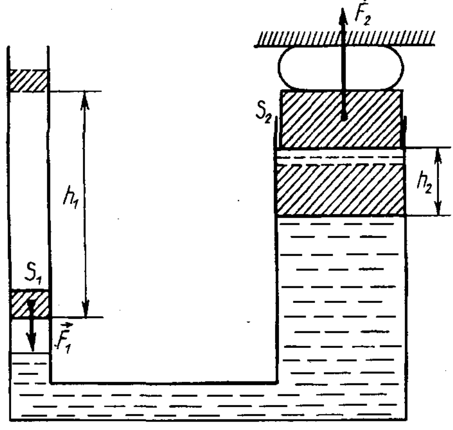
Запишем условие несжимаемости жидкости:

$$S_1 h_1 = S_2 h_2. \tag{2}$$

На основании равенств (1) и (2) получим

$$F_2 = F_1 h_1 / h_2, \quad F_2 = 1{,}0 \cdot 10^4 \text{ Н}. \tag{3}$$

С такой же силой действует пресс на зажатое в нем тело.



Р и с. 117

Анализ формул (1) и (3) показывает, что гидравлический пресс дает выигрыш в силе в S_2/S_1 раз, но не дает выигрыша в работе. В самом деле, из формулы (3) получим $F_1h_1 = F_2h_2$. Но $F_1h_1 = A_1$ – работа силы $\vec{F}_1$, $F_2h_2 = A_2$ – работа силы $\vec{F}_2$. Поэтому $A_1 = A_2$.

321. В сообщающиеся сосуды налита ртуть, а поверх нее в один сосуд налит столб масла высотой $h_1 = 48$ см, в другой – столб керосина высотой $h_2 = 20$ см. Определить разность уровней ртути в обоих сосудах. Плотность масла $\rho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, керосина $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, ртути $\rho_3 = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. Выберем в качестве поверхности одного уровня поверхность, проходящую по самой нижней границе раздела жидкостей масло – ртуть (рис. 118). Жидкости находятся в равновесии, поэтому давление в точках A и B этой поверхности одинаковое: $p_A = p_B$. Учитывая, что

$$p_A = p_{\text{атм}} + \rho_1 gh_1, \; p_B = p_{\text{атм}} + \rho_2 gh_2 + \rho_3 gh_3,$$

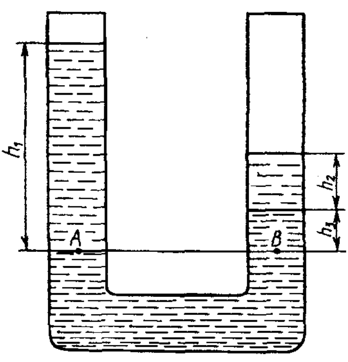
можно записать:

$$p_{\text{атм}} + \rho_1 gh_1 = p_{\text{атм}} + \rho_2 gh_2 + \rho_3 gh_3.$$

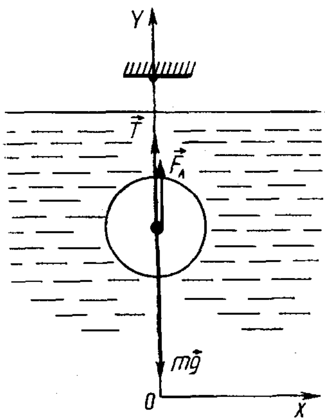
Отсюда $h_3 = (\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2)/\rho$, $h_3 = 2 \cdot 10^{-2}$ м.

322. Вес тела, погруженного в жидкость плотностью ρ_1, равен P_1, а погруженного в жидкость плотностью ρ_2, – P_2. Определить плотность тела ρ.

Р е ш е н и е. Предположим, что тело подвешено на невесомой нити в жидкости (рис. 119). На тело действуют



Р и с. 118



Р и с. 119

три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, архимедова сила $\vec{F}_A$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Тело находится в равновесии. Следовательно, сумма действующих на него сил $\vec{T} + \vec{F}_A + m\vec{g} = \vec{0}$.

Направив координатную ось OY вертикально вверх и спроектировав на нее силы, получим $T + F_A - mg = 0$. Отсюда $T = mg - F_A$.

Обозначим объем тела через V, тогда $F_A = \rho g V$, где ρ – плотность жидкости. Следовательно,

$$T = mg - \rho g V = g(m - \rho V).$$

Модуль силы натяжения нити равен модулю веса тела: $T = P$. Таким образом, получаем следующую формулу для определения веса тела массой m в жидкости, плотность которой ρ:

$$P = (m - \rho V)g. \tag{1}$$

На основании формулы (1) можно записать:

$$P_1 = (m - \rho_1 V)g, \; P_2 = (m - \rho_2 V)g.$$

Разделив левые и правые части этих уравнений на V и учитывая, что $m/V = \rho$, получим:

$$P_1/(gV) = \rho - \rho_1, \tag{2}$$

$$P_2/(gV) = \rho - \rho_2. \tag{3}$$

Решив совместно уравнения (2) и (3), найдем плотность тела:

$$\rho = \frac{P_2\rho_1 - P_1\rho_2}{P_2 - P_1}.$$

Таким образом, плотность тела можно найти путем взвешивания его в двух различных жидкостях, плотности которых известны.

323. Кусок металла массой $m = 1{,}0$ кг, будучи погруженным в бензин, весит $P_1 = 9{,}3$ Н. В некотором растворе он весит $P_2 = 8{,}8$ Н. Определить плотность раствора ρ_2, если плотность бензина $\rho_1 = 7{,}2 \cdot 10^2$ кг/м^3 и плотность металла больше плотностей бензина и раствора.

Решение. При решении задачи 322 получена формула (1) для определения веса тела в жидкости. На основании этой формулы можно записать:

$$P_1 = mg - \rho_1 gV,\ P_2 = mg - \rho_2 gV,$$

или

$$mg - P_1 = \rho_1 gV,\ mg - P_2 = \rho_2 gV.$$

Отсюда

$$\frac{mg - P_1}{mg - P_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2},\ \rho_2 = \frac{(mg - P_2)\rho_1}{mg - P_1},\ \rho_2 = 1{,}4 \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3.$$

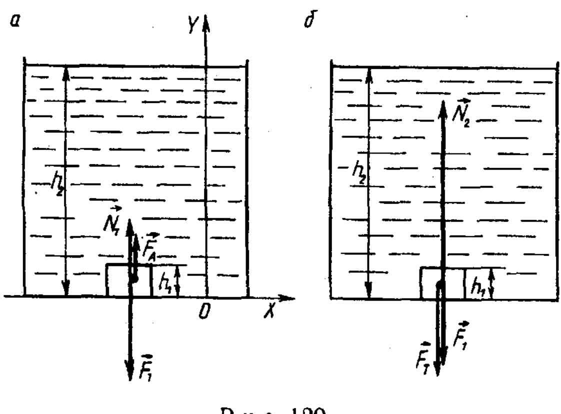
Таким способом можно на практике определить плотность раствора.

324. Прямоугольный металлический брусок, плотность которого ρ_1, площадь основания S и высота h_1, лежит на дне сосуда. В сосуд налита до высоты $h_2 > h_1$ жидкость плотностью ρ_2. Найти силу, с которой брусок давит на дно сосуда.

Р е ш е н и е. Возможны два случая: 1) брусок неплотно прилегает к дну сосуда; 2) брусок прилегает к дну так плотно, что жидкость под него не подтекает. Рассмотрим каждый случай в отдельности.

1. Снизу на брусок действует сила со стороны жидкости. Эта сила больше силы, обусловленной давлением жидкости сверху, поэтому «возникает» архимедова сила. Таким образом, на брусок действуют в этом случае три силы: архимедова сила $\vec{F}_A$, сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила реакции дна $\vec{N}_1$ (рис. 120, *а*). Условие равновесия запишется в виде

$$\vec{F}_т + \vec{F}_A + \vec{N}_1 = \vec{0}.$$



Р и с. 120

В проекциях на ось OY получим $N_1 + F_A - F_т = 0$. Отсюда $N_1 = F_т - F_A$. Так как $F_т = mg = \rho_1 S h_1 g$ и $F_A = \rho_2 S h_1$, то

$$N_1 = (\rho_1 - \rho_2) S g h_1.$$

По третьему закону Ньютона с такой же по модулю силой действует брусок на дно сосуда, т. е. $F_{д1} = N_1$.

2. Снизу на брусок не действует сила со стороны жидкости, поэтому $F_A = 0$. Сверху же на брусок действует сила, обусловленная давлением жидкости и атмосферы:

$$F_1 = (\rho_2 g(h_2 - h_1) + p_{атм})S.$$

(Обратим внимание на то, что в первом случае сила, обусловленная давлением жидкости сверху, учтена в архимедовой силе: $F_A = F_2 - F_1$, где F_2 – сила, обусловленная давлением жидкости снизу.) На брусок действуют также сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила реакции дна $\vec{N}_2$ (рис. 120, *б*). Спроектировав силы на ось OY, запишем условие равновесия бруска: $N_2 - F_т - F_1 = 0$, или

$$N_2 - \rho_1 S h_1 g - (\rho_2 g(h_2 - h_1) + p_{атм})S = 0.$$

Отсюда

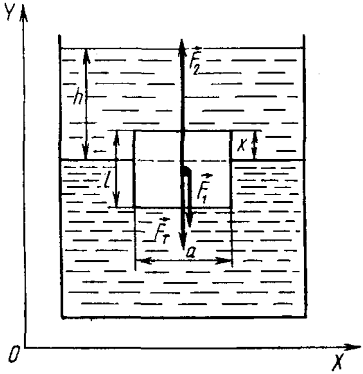
$$N_2 = Sg(\rho_1 h_1 + \rho_2(h_2 - h_1) + p_{атм}/g).$$

С такой же по модулю силой действует брусок на дно: $F_{д2} = N_2$.

325. В сосуде находятся две несмешивающиеся жидкости, плотности которых различны: $\rho_1 < \rho_2$. На границе раздела жидкостей плавает однородный прямоугольный брусок, погруженный целиком в жидкость. Плотность ρ_3 материала бруска больше плотности ρ_1 верхней жидкости, но меньше плотности ρ_2 нижней жидкости ($\rho_1 < \rho_3 < \rho_2$). Какая часть объема бруска будет находиться в верхней жидкости?

Р е ш е н и е. Обозначим размеры бруска a, b и l ($l < a$, $l < b$, $a > b$). Пусть верхняя грань бруска находится на высоте x над границей раздела жидкостей (рис. 121). Тогда объем части бруска, находящейся в верхней жидкости, $V_1 = abx$. Следовательно, в верхней жидкости находится часть объема

$$\frac{V_1}{V} = \frac{abx}{abl} = \frac{x}{l}. \qquad (1)$$



Р и с. 121

На брусок действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g} = \rho_3 abl\vec{g}$, сила $\vec{F}_1$, действующая на верхнюю грань, и сила $\vec{F}_2$, действующая на нижнюю грань. Так как тело плавает, то выполняется условие равновесия $\vec{F}_т + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$.

Для проекций на ось OY получим

$$F_2 - F_1 - F_т = 0. \quad (2)$$

На верхнюю грань действует сила

$$F_1 = (\rho_1 g(h - x) + p_{атм})ab,$$

на нижнюю грань — сила

$$F_2 = (\rho_1 gh + \rho_2 g(l - x) + p_{атм})ab.$$

Подставив значения F_1, F_2 и $F_т$ в формулу (2), получим после преобразований $(\rho_2 - \rho_1)x = (\rho_2 - \rho_3)l$. Отсюда

$$\frac{x}{l} = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (3)$$

Сравнивая формулы (1) и (3), находим

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_2 - \rho_1}.$$

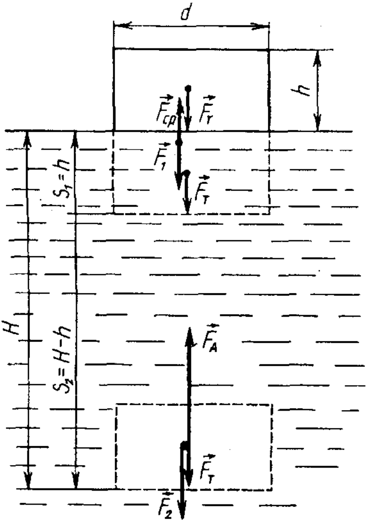
326. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно погрузить в жидкость на глубину H вертикально ориентированный однородный цилиндр плотностью ρ_1, высотой h и диаметром d, если плотность жидкости ρ_2 и перед погружением нижнее основание цилиндра касалось поверхности жидкости? Плотность жидкости больше плотности цилиндра ($\rho_2 > \rho_1$).

Р е ш е н и е. При погружении цилиндра на него, кроме силы тяжести $\vec{F}_т$ и приложенной силы, действует архимедова сила, направленная вертикально вверх (рис. 122).

Пока цилиндр погружается в жидкость до верхнего основания, архимедова сила линейно возрастает от нуля до максимального значения F_A. Поэтому переменную архимедову силу при перемещении $s_1 = h$ можно заменить средней архимедовой силой:

$$F_{ср} = \frac{0 + F_A}{2} = \frac{F_A}{2},$$

считая ее постоянной. Чтобы медленно (равномерно) погружать цилиндр, к нему нужно приложить такую силу F_1, чтобы выполнялось условие равновесия



Р и с. 122

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_т + \vec{F}_{ср} = \vec{0}.$$

Спроектировав все силы на вертикальное направление, получим

$$F_1 + F_т - F_{ср} = 0.$$

Отсюда $F_1 = F_{ср} - F_т$. Совершаемая этой силой работа $A = F_1 s_1$, или

$$A_1 = (F_A/2 - F_т)h.$$

Когда цилиндр полностью находится в жидкости, архимедова сила постоянна. Поэтому при перемещении $s_2 = H - h$ к цилиндру нужно приложить такую силу, чтобы выполнялось равенство $F_2 + F_т - F_A = 0$. Следовательно, $F_2 = F_A - F_т$. Работа этой силы

$$A_2 = F_2 s_2 = (F_A - F_т)(H - h).$$

Вся работа, совершаемая при погружении цилиндра,

$$A = A_1 + A_2 = (F_A/2 - F_т)h + (F_A - F_т)(H - h) =$$
$$= F_A(h/2 + H) - F_т H. \quad (1)$$

Учитывая, что $F_т = mg = \rho_1 Vg$, $F_A = \rho_2 gV$, где V – объем цилиндра, формулу (1) можно переписать так:

$$A = gV(\rho_2 h/2 + (\rho_2 - \rho_1)H).$$

Подставив сюда значение $V = \pi d^2 H/4$, найдем работу, совершаемую при погружении:

$$A = \frac{1}{4}\pi d^2 gH\left(\frac{\rho_2 h}{2} + (\rho_2 - \rho_1)H\right).$$

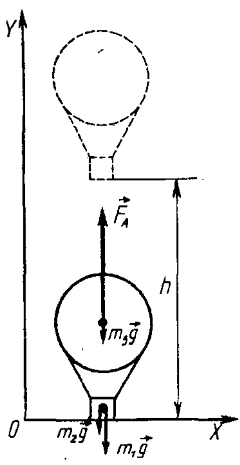
327. Определить минимальный объем наполненного водородом шара, который может поднять человека массой $m_1 = 70$ кг на высоту $h = 100$ м за время $t = 30$ с. Общая масса оболочки шара и корзины $m_2 = 20$ кг, плотность воздуха и водорода принять равными соответственно $\rho_1 = 1{,}3$ кг/м^3 и $\rho_2 = 0{,}10$ кг/м^3. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. Направим координатную ось OY вертикально вверх (рис. 123). Вдоль этой оси шар движется равноускоренно, поэтому

$$h = a_y t^2/2,$$

где a_y – проекция ускорения шара на ось OY. Отсюда

$$a_y = 2h/t^2. \qquad (1)$$



Р и с. 123

На шар действуют следующие силы: сила тяжести человека $m_1\vec{g}$, оболочки и корзины $m_2\vec{g}$, водорода $m_3\vec{g}$, архимедова сила $\vec{F}_A$. Составим на основании второго закона Ньютона уравнение движения шара:

$$\vec{F}_A + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = m\vec{a}.$$

Для проекций на ось OY получим

$$F_A - m_1 g - m_2 g - m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3)a_y, \qquad (2)$$

где m_3 – масса водорода.

Пусть V – искомый объем шара. Тогда

$$F_A = \rho_1 g V, \; m_3 = \rho_2 V. \quad (3)$$

Подставив значения (1) и (3) в уравнение (2), получим

$$\rho_1 g V - m_1 g - m_2 g - \rho_2 g V = (m_1 + m_2 + \rho_2 V) 2h/t^2.$$

Отсюда найдем объем шара:

$$V = \frac{(m_1 + m_2)(2h + gt^2)}{gt^2(\rho_1 - \rho_2) - 2h\rho_2}, \; V = 77 \text{ м}^3.$$

328. Рассчитать, как изменится потенциальная энергия погруженного в жидкость тела, если его поднять в жидкости на высоту h. Плотность жидкости ρ_1, плотность тела ρ_2, объем тела V.

Решение. Примем за нулевой уровень потенциальной энергии уровень дна. Пусть тело находилось на высоте h_1 над уровнем дна. Чтобы поднять тело на высоту $h = h_2 - h_1$, нужно приложить к нему силу $\vec{F}$ (рис. 124). Работа этой силы равна изменению механической энергии тела: $A = \Delta E_k + \Delta E_p$, где ΔE_k, ΔE_p – изменения соответственно кинетической и потенциальной энергии.

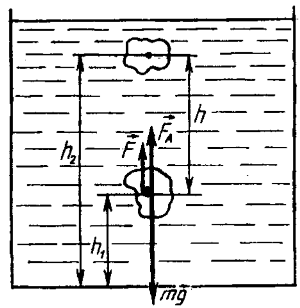


Рис. 124

Если тело поднимается равномерно, то $\Delta E_k = 0$, следовательно,

$$A = \Delta E_p. \quad (1)$$

Для равномерного поднятия тела к нему нужно приложить такую силу, чтобы выполнялось условие равновесия, т. е. сумма проекций всех сил на вертикальное направление была равна нулю: $F + F_A - mg = 0$. Отсюда $F = mg - F_A$. При перемещении h работа этой силы $A = Fh$ или

$$A = (mg - F_A)h. \quad (2)$$

С учетом того, что $m = \rho_2 V$, $F_A = \rho_1 g V$, на основании равенств (1) и (2) можно записать:

$$\Delta E_p = (\rho_2 - \rho_1) g V h.$$

Если $\rho_2 > \rho_1$, то $\Delta E_p > 0$ – потенциальная энергия увеличивается; если $\rho_2 < \rho_1$, то $E_p < 0$ – потенциальная энергия уменьшается. При неравномерном поднятии изменение потенциальной энергии будет таким же.

Формулу (1) можно переписать так:

$$E_{p2} - E_{p1} = (mg - F_A)h_2 - (mg - F_A)h_1.$$

Так как при $h = 0$ (на дне) $E_p = 0$, получаем:

$$E_{p1} = (mg - F_A)h_1, \; E_{p2} = (mg - F_A)h_2.$$

Следовательно, потенциальная энергия тела, находящегося в жидкости на высоте H от нулевого уровня энергии, выражается так:

$$E_p = (mg - F_A)H. \qquad (3)$$

329. В баке находится вода. Расположенный у ее поверхности камень был брошен вертикально вниз в воду с начальной скоростью v_0 и опустился на дно. Масса камня m, объем V, вода налита до высоты H. Какое количество теплоты выделилось при падении камня?

Решение. По закону сохранения энергии механическая энергия камня превратилась в выделившееся количество теплоты:

$$Q = E_k + E_p, \qquad (1)$$

где E_k, E_p – соответственно кинетическая и потенциальная энергия.

Дно примем за поверхность нулевого уровня потенциальной энергии. Тогда на основании формулы (3) из задачи 328 потенциальная энергия камня в начальном состоянии

$$E_p = (mg - F_A)H.$$

Поскольку $F_A = \rho_1 gV$, где ρ_1 – плотность воды, то

$$E_p = (m - \rho_1 V)gH. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия камня в момент бросания

$$E_k = mv_0^2/2. \qquad (3)$$

Учитывая формулы (1)–(3), получаем

$$Q = mv_0^2/2 + (m - \rho_1 V)gH.$$

330. Стеклянный шарик падает в воде с ускорением $a = 5{,}8$ м/с^2. Найти плотность стекла, если плотность воды $\rho_1 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3. Трение не учитывать.

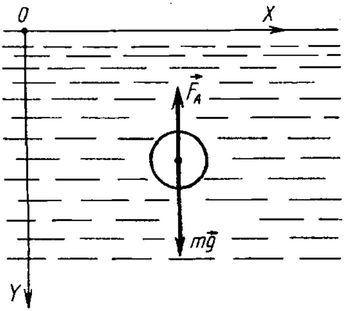
Р е ш е н и е. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и архимедова сила $\vec{F}_A$. Направим ось OY вертикально вниз (рис. 125). Составим уравнение движения шарика в векторной форме:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A = m\vec{a}.$$

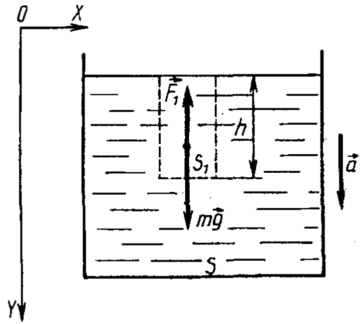
Для проекций на ось OY получим

$$mg - F_A = ma, \tag{1}$$

где m — масса шарика.



Р и с. 125



Р и с. 126

Пусть V — объем шарика, ρ_2 — плотность стекла. Тогда $m = \rho_2 V$, $F_A = \rho_1 g V$. Подставив эти значения в формулу (1), получим $\rho_2 Vg - \rho_1 Vg = \rho_2 Va$, откуда

$$\rho_2 = \rho_1 g/(g - a), \quad \rho_2 = 2{,}5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

331. Сосуд с жидкостью, плотность которой ρ, падает с ускорением $\vec{a}$, направленным вниз. Определить давление жидкости на глубине h и силу, с которой жидкость давит на дно сосуда. Высота уровня жидкости в сосуде H, площадь дна сосуда S.

Р е ш е н и е. Выделим внутри жидкости столбик высотой h и площадью основания S_1 (рис. 126). На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F}_1$, обусловленная давлением и направленная вверх. Ось OY направим вертикально вниз. Уравнение движения столбика жидкости, согласно второму закону Ньютона, имеет вид

$$m\vec{g} + \vec{F}_1 = m\vec{a}.$$

В проекциях на ось OY получим

$$mg - F_1 = ma, \qquad (1)$$

где m – масса столбика жидкости.

Пусть p – давление на глубине h. Тогда $F_1 = pS_1$. Кроме того, $m = \rho S_1 h$. Поэтому уравнение (1) можно переписать так:

$$\rho S_1 hg - pS_1 = \rho S_1 ha.$$

Отсюда $p = \rho(g - a)h$.

Сила, с которой жидкость действует на дно сосуда,

$$F = \rho(g - a)HS. \qquad (2)$$

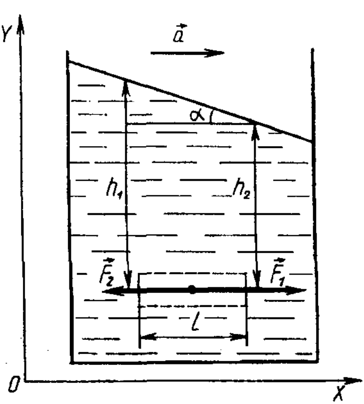
Анализ формулы (2) показывает, что сила, с которой жидкость действует на дно сосуда, тем меньше, чем больше ускорение сосуда a. При $a = g$ (свободное падение) $F = 0$, т. е. наступает состояние невесомости. При $a > g$ жидкость будет свободно падать с ускорением g, а сосуд – с бо́льшим ускорением, вследствие чего жидкость выйдет из сосуда.

332. Сосуд с жидкостью движется горизонтально с ускорением $\vec{a}$. Как расположена при этом свободная поверхность жидкости?

Р е ш е н и е. Выделим тонкий горизонтальный столбик жидкости длиной l и площадью поперечного сечения S, проведенного перпендикулярно направлению движения жидкости (рис. 127). Составим для этого столбика уравнение движения:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a},$$

где $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ – силы, обусловленные давлением на столбик соответственно слева и справа.



Р и с. 127

Для проекций на горизонтальную ось OX получим

$$F_1 - F_2 = ma. \qquad (1)$$

Так как вдоль оси OY ускорения нет, давление на глубине h определяется по формуле $p = \rho g h$. Поэтому давление на столбик слева $p_1 = \rho g h_1$, справа $p_2 = \rho g h_2$. Масса рассматриваемого столбика жидкости $m = \rho S l$. Учитывая эти значения, перепишем уравнение (1):

$$\rho g h_1 S - \rho g h_2 S = \rho S l a.$$

Отсюда

$$g(h_1 - h_2) = la,$$

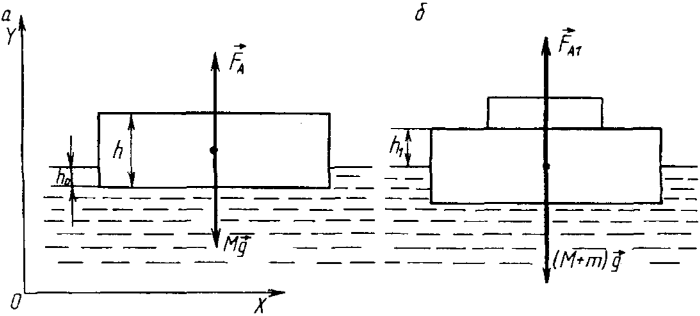
или

$$\frac{h_1 - h_2}{l} = \frac{a}{g}.$$

Но $(h_1 - h_2)/l = \mathrm{tg}\,\alpha$. Следовательно, поверхность жидкости будет представлять собой плоскость, наклоненную к горизонту под углом $\alpha = \mathrm{arctg}(a/g)$.

333. Прямоугольный понтон, масса которого $M = 700$ кг, имеет длину $l = 5$ м, ширину $d = 3$ м и высоту $h = 0{,}7$ м. Найти осадку понтона без груза и предельную грузоподъемность при высоте бортов над ватерлинией $h_1 = 0{,}2$ м. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. На понтон без груза действуют сила тяжести $M\vec{g}$ и архимедова сила $\vec{F}_A$ (рис. 128, *а*). Он находится в равновесии, следовательно, $\vec{F}_A + M\vec{g} = \vec{0}$, поэтому сумма проекций этих сил на ось OY равна нулю: $F_A - Mg = 0$. Находим:



Р и с. 128

$$F_A = \rho g V,$$

где V – объем погруженной в воду части понтона. При осадке h_0 этот объем $V = h_0 l d$. Следовательно,

$$F_A = \rho g h_0 l d,\ \rho g h_0 l d - Mg = 0.$$

Отсюда осадка понтона без нагрузки

$$h_0 = M/(\rho l d),\ h_0 = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Если на понтоне лежит груз массой m (рис. 128, *б*), то условие равновесия будет иметь вид $F_{A1} - (M+m)g = 0$. При этом $F_{A1} = \rho g l d(h - h_1)$. Следовательно,

$$\rho g l d(h - h_1) - (M+m)g = 0.$$

Отсюда $m = \rho l d(h - h_1) - M$, $m = 7 \cdot 10^3$ кг.

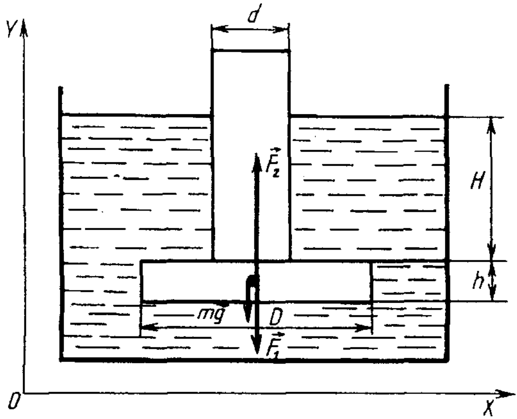
334. В бак с жидкостью опущена длинная трубка диаметром d, к которой снизу плотно прилегает диск толщиной h и диаметром $D > d$. Плотность материала диска ρ_1 больше плотности жидкости ρ_2. Трубку медленно поднимают вверх. Определить, на каком уровне диск оторвется от трубки.

Р е ш е н и е. На диск действуют три силы: сила $\vec{F}_1$, обусловленная атмосферным и гидростатическим давлениями, направленная вертикально вниз; сила $\vec{F}_2$, обусловленная гидростатическим давлением и направленная вертикально вверх; сила тяжести $m\vec{g}$ (рис. 129). Диск оторвется от трубки в тот момент, когда будет выполняться условие равновесия: сумма проекций на ось OY всех сил, действующих на диск, равна нулю, т. е.

$$mg + F_1 - F_2 = 0. \quad (1)$$

Выразим модули сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Сила $\vec{F}_1$ действует на верхнее основание диска, которое находится на расстоянии H от поверхности жидкости. Давление на этом уровне $p_1 = \rho_2 g H + p_{атм}$, где $p_{атм}$ – атмосферное давление. При этом сила, обусловленная атмосферным давлением, действует на все основание, а сила, обусловленная гидростатическим давлением, – только на площадь $S_1 = \pi D^2/4 - \pi d^2/4$. Следовательно,

$$F_1 = \rho_2 g H\left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}\right) + p_{атм}\frac{\pi D^2}{4}. \quad (2)$$



Р и с. 129

Модуль силы $\vec{F}_2$

$$F_2 = p_2 S = p_2 \frac{\pi D^2}{4}.$$

Здесь p_2 – давление на глубине $H + h$, на которой находится нижнее основание диска. Но $p_2 = \rho_2 g(H + h) + p_{\text{атм}}$, поэтому

$$F_2 = (\rho_2 g(H + h) + p_{\text{атм}})\frac{\pi D^2}{4}. \qquad (3)$$

Масса диска

$$m = \rho_1 V = \rho_1 \frac{\pi D^2}{4} h. \qquad (4)$$

Подставив теперь значения (2)–(4) в уравнение (1), получим

$$\rho_1 \frac{\pi D^2}{4} hg + \rho_2 g H\left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}\right) + p_{\text{атм}} \frac{\pi D^2}{4} -$$

$$- (\rho_2 g(H + h) + p_{\text{атм}})\frac{\pi D^2}{4} = 0,$$

или после очевидных преобразований

$$\rho_1 D^2 h + \rho_2 H(D^2 - d^2) - \rho_2 D^2 (H + h) = 0.$$

Решив это уравнение относительно H, будем иметь

$$H = \frac{D^2 h(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2 d^2}.$$

335. Гидравлический пресс, заполненный водой, имеет поршни, площади которых $S_1 = 200$ см^2 и $S_2 = 20$ см^2. На большой поршень положили груз массой $m = 60$ кг. На какую высоту поднимется после этого малый поршень? Плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Допустим, что в отсутствие груза малый поршень пресса находился выше большого на h (рис. 130, *а*) в состоянии равновесия. При равновесии давление в точках A и B, принадлежащих поверхности одного уровня, одинаковое: $p_A = p_B$, или

$$\frac{m_1 g}{S_1} = \frac{m_2 g}{S_2} + \rho g h, \qquad (1)$$

где m_1, m_2 — массы большого и малого поршней соответственно.

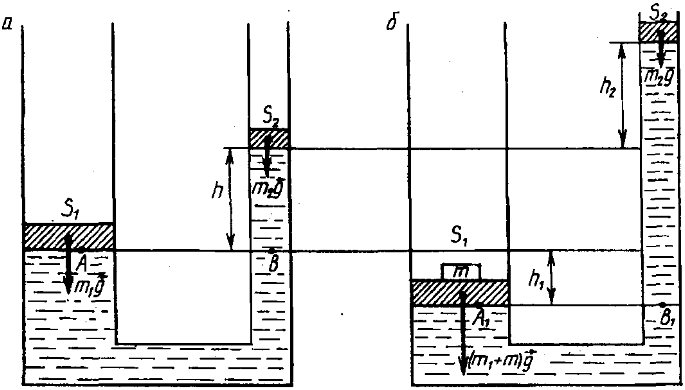


Рис. 130

После того как положили груз (рис. 130, *б*), малый поршень поднялся на некоторую высоту h_2, а большой опустился на h_1. Запишем для этого состояния условие равновесия как равенство давлений в точках A_1 и B_1 поверхности одного уровня: $p_{A_1} = p_{B_1}$, или

$$\frac{(m_1 + m)g}{S_1} = \frac{m_2 g}{S_2} + \rho g(h_1 + h + h_2).$$

После преобразований с учетом условия (1) получим

$$m/S_1 = \rho h_1 + \rho h_2. \qquad (2)$$

Из условия несжимаемости жидкости следует, что $S_1h_1 = S_2h_2$. Отсюда $h_1 = S_2h_2/S_1$. Подставив это значение в уравнение (2) и решив его, найдем:

$$h_2 = \frac{m}{\rho(S_1 + S_2)}, \quad h_2 = 2{,}7 \text{ м}.$$

336. Определить объем куска меди, который в воде имеет вес $P = 20$ Н. Плотность меди $\rho_1 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_2 = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. Воспользуемся выведенной при решении задачи 322 формулой для веса тела массой m в жидкости, плотность которой ρ:

$$P = (m - \rho_2V)g,$$

где m – масса куска меди; V – его объем. Учитывая, что $m = \rho_1V$, получаем $P = (\rho_1V - \rho_2V)g$, откуда

$$V = \frac{P}{g(\rho_1 - \rho_2)}, \quad V = 2{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

337. Тело объемом $V = 1500$ см^3 при взвешивании в воздухе на равноплечих рычажных весах было уравновешено латунными гирями массой $m_1 = 1700$ г. Найти массу уравновешивающих гирь при взвешивании этого тела в вакууме. Плотность латуни $\rho_1 = 8500$ кг/м^3, плотность воздуха $\rho_2 = 1200$ г/м^3.

Р е ш е н и е. При взвешивании в воздухе на одну чашу весов действует вес тела $\vec{P}$, на другую – вес гирь $\vec{P}_1$ (см. решение задачи 280). При равновесии на равноплечих весах будет выполняться равенство $P = P_1$.

На основании формулы (1) из решения задачи 322 запишем выражения для веса тела и гирь в воздухе:

$$P = (m - \rho_2V)g, \quad P_1 = (m_1 - \rho_2V_1)g,$$

где m – масса тела; V_1 – объем гирь. Так как $V_1 = m_1/\rho_1$, то

$$P_1 = m_1(1 - \rho_2/\rho_1)g.$$

При равновесии в воздухе $P = P_1$, т. е.

$$(m - \rho_2V)g = m_1(1 - \rho_2/\rho_1)g.$$

Отсюда находим массу тела:

$$m = m_1(1 - \rho_2/\rho_1) + \rho_2 V,\ \ m = 1702\text{ г}.$$

При взвешивании в вакууме архимедова сила равна нулю. На одну из чаш действует вес тела, численно равный mg, на другую – вес уравновешивающих гирь, численно равный $m_2 g$, причем $m_2 \neq m_1$. Условие равновесия в этом случае имеет вид $mg = m_2 g$, откуда $m_2 = m$. Таким образом, масса уравновешивающих гирь при взвешивании в вакууме равна массе тела.

338. В жидкости плотностью ρ_1 плавает полый шар объемом V, изготовленный из материала плотностью ρ_2. Каков объем полости шара, если известно, что объем погруженной в жидкость части шара составляет $n = 0{,}75$ всего объема шара?

Решение. На шар действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и архимедова сила $\vec{F}_\text{А}$ (рис. 131). Поскольку шар плавает, то выполняется условие равновесия $m\vec{g} + \vec{F}_\text{А} = \vec{0}$. Следовательно,

$$mg = F_\text{А}, \tag{1}$$

где m – масса шара. Если $V_\text{п}$ – объем полости шара, то $m = \rho_2(V - V_\text{п})$.

Модуль архимедовой силы $F_\text{А} = \rho_1 g V_1$, где V_1 – объем погруженной в жидкость части шара.

Подставив значения m и $F_\text{А}$ в выражение (1), получим

$$\rho_2(V - V_\text{п})g = \rho_1 g V_1$$

или с учетом того, что $V_1 = nV$,

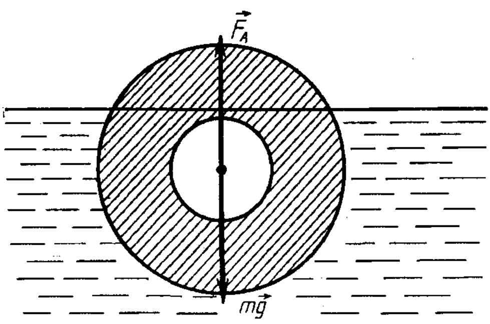
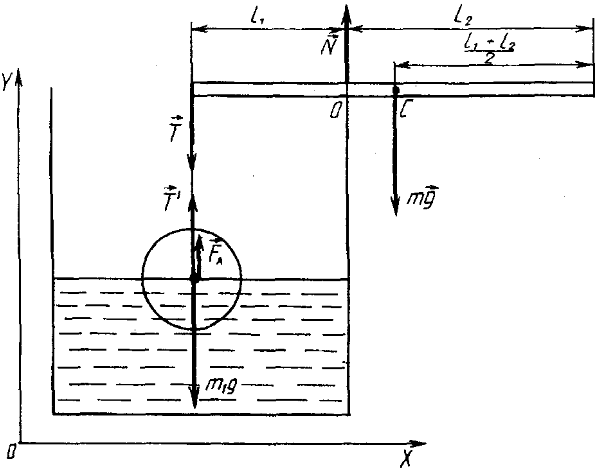


Рис. 131



Р и с. 132

$$\rho_2(V - V_п) = \rho_1 n V.$$

Отсюда $V_п = V(1 - n\rho_1/\rho_2)$.

339. К концу однородного стержня массой $m = 4{,}0$ г подвешен на нити алюминиевый шарик радиуса $R = 50$ мм. Стержень кладут на край стакана с водой, добиваясь такого положения равновесия, при котором погруженной в воду оказывается половина шарика (рис. 132). Определить, в каком отношении делится длина стержня точкой опоры. Плотность алюминия $\rho_1 = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_2 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. На стержень действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Стержень находится в равновесии, поэтому сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через точку O, равна нулю. Обозначим l_1 и l_2 длины частей стержня, на которые его делит точка опоры. Сила тяжести $m\vec{g}$ приложена в точке C, делящей стержень пополам. Тогда условие равновесия можно записать так:

$$mg\left(l_2 - \frac{l_1 + l_2}{2}\right) - Tl_1 = 0,$$

или

$$mgl_2 - mgl_1 - 2Tl_1 = 0.$$

Разделив это уравнение на l_1, получим

$$mg\frac{l_2}{l_1} - mg - 2T = 0,$$

откуда

$$\frac{l_2}{l_1} = 1 + \frac{2T}{mg}. \qquad (1)$$

Модуль силы натяжения $\vec{T}$ равен модулю силы $\vec{T}'$, с которой нить действует на шарик. На шарик действуют еще две силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$ и архимедова сила $\vec{F}_\text{A}$. Поскольку шарик находится в равновесии, то

$$\vec{F}_\text{A} + \vec{T}' + m_1\vec{g} = \vec{0}.$$

Следовательно, сумма проекций этих сил на ось OY равна нулю:

$$F_\text{A} + T' - m_1 g = 0,$$

или с учетом того, что $T' = T$,

$$F_\text{A} + T - m_1 g = 0, \qquad (2)$$

где m_1 – масса шарика:

$$m_1 = \rho_1 V; \qquad (3)$$

V – объем шарика.

Учитывая, что в воде находится половина шарика, находим модуль архимедовой силы:

$$F_\text{A} = \rho_2 g\frac{V}{2}. \qquad (4)$$

На основании выражений (2)–(4)

$$T = \frac{Vg(2\rho_1 - \rho_2)}{2}.$$

Объем шарика $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, поэтому

$$T = \frac{2\pi R^3 g(2\rho_1 - \rho_2)}{3}.$$

Подставив теперь это значение в формулу (1), найдем, что длина стержня делится точкой опоры в отношении

$$\frac{l_2}{l_1} = 1 + \frac{4\pi R^3(2\rho_1 - \rho_2)}{3m}, \quad \frac{l_2}{l_1} = 1{,}6.$$