II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

6. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Методические указания к решению задач

Задачи на газовые законы можно решать по следующему плану.

Если в задаче задано одно состояние газа и требуется определить какой-либо параметр этого состояния, нужно воспользоваться уравнением Менделеева–Клапейрона. Если значения давления и объема явно не заданы, их выражают через заданные величины, подставляют в записанное уравнение и, решив его, находят неизвестный параметр.

В том случае, когда в задаче рассматриваются два различных состояния газа, нужно установить, изменяется ли масса газа при переходе из одного состояния в другое. Если масса газа остается постоянной, можно записать уравнение Клапейрона (уравнение объединенного газового закона). Если же при постоянной массе в данном процессе не изменяется какой-либо из параметров p, V или T (давление, объем, температура), применяют уравнение соответствующего закона (Гей-Люссака, Шарля или Бойля–Мариотта). Если в двух состояниях масса газа разная, для каждого состояния записывают уравнение Менделеева–Клапейрона. Затем систему уравнений решают относительно искомой величины.

Молярную массу вещества можно найти с помощью периодической системы элементов Д. И. Менделеева. Например, химическая формула углекислого газа CO_2. По таблице находим, что относительная атомная масса углерода приблизительно равна 12, кислорода – 16. Значит, относительная молекулярная масса углекислого газа $M_r = 12 + 2 \cdot 16 = 44$. Следовательно, его молярная масса $M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

При решении задач на пары и влажность применяют законы идеального газа (Бойля–Мариотта, Гей-Люссака, Шарля, Дальтона), уравнения Клапейрона, Менделеева–Клапейрона. Однако нужно обратить внимание на следующие особенности:

1) параметры двух различных состояний насыщенного пара не подчиняются объединенному газовому закону, так как в этих состояниях насыщенный пар имеет различную массу;

2) по заданной температуре насыщенного пара можно, пользуясь таблицами, найти его плотность и давление;

3) по заданной температуре T_1 ненасыщенного пара и его точке росы $T_р$ можно с помощью таблиц найти абсолютную влажность, так как при температуре $T_р$ этот пар станет насыщенным;

4) параметры каждого состояния насыщенного пара связаны между собой уравнением Менделеева–Клапейрона.

В задачах, связанных с силами поверхностного натяжения, необходимо учитывать, что эти силы направлены вдоль поверхности жидкости перпендикулярно линии, ограничивающей эту поверхность, и стремятся сократить ее. В капиллярах смачивающие жидкости поднимаются, а несмачивающие – опускаются.

Основные законы и формулы

Количество вещества

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_А},$$

где m – масса вещества; M – его молярная масса; N – число молекул; $N_А$ – постоянная Авогадро: $N_А = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа:

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \langle v_{кв} \rangle^2,$$

где p – давление газа; m_0 – масса молекулы; n – концентрация молекул; $\langle v_{кв} \rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул.

Средняя квадратичная скорость молекул газа

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\left\langle v^2 \right\rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

где $\left\langle v^2 \right\rangle$ – средний квадрат скорости молекул; k – постоянная Больцмана: $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; T – термодинамическая (абсолютная) температура газа.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы газа

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Зависимость давления газа от концентрации его молекул и температуры выражается формулой

$$p = nkT.$$

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона)

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

где p – давление; V – объем; m – масса газа; M – молярная масса газа; R – универсальная (молярная) газовая постоянная: $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К); T – термодинамическая температура газа.

Закон Бойля–Мариотта: для газа данной массы при постоянной температуре (m = const, T = const – изотермический процесс)

$$pV = \text{const}.$$

Для любых двух состояний газа при изотермическом процессе

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Закон Гей-Люссака: для газа данной массы при постоянном давлении (m = const, p = const – изобарный процесс)

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0 \alpha T, \text{ или } V/T = \text{const},$$

где V – объем газа при t °С; V_0 – объем газа при 0 °С; α – температурный коэффициент объемного расширения: $\alpha \approx \frac{1}{273}$ К$^{-1}$ для всех газов.

Для любых двух состояний газа при изобарном процессе

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Закон Шарля: для газа данной массы при постоянном объеме (m = const, V = const – изохорный процесс)

$$p = p_0(1 + \gamma t) = p_0 \gamma T, \text{ или } P/T = \text{const},$$

где p – давление газа при t °С; p_0 – давление газа при 0 °С; γ – температурный коэффициент давления: $\gamma \approx \frac{1}{273}$ К$^{-1}$ для всех газов.

Для любых двух состояний газа при изохорном процессе

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

Уравнение Клапейрона (объединенный газовый закон): для газа данной массы (m = const)

$$pV/T = \text{const}.$$

Для любых двух состояний

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

Термодинамическая температура

$$T = t + 273{,}15,$$

где t – температура Цельсия. Изменение термодинамической температуры равно изменению температуры Цельсия: $\Delta T = \Delta t$.

Нормальные условия: давление p_0 = 101 325 Па (760 мм рт. ст.), температура T_0 = 273,15 К (0 °С).

Закон Дальтона: давление смеси химически не взаимодействующих идеальных газов равно сумме парциальных давлений этих газов:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

Относительная влажность воздуха

$$\varphi = \frac{p}{p_0} \cdot 100\%,$$

где p – парциальное давление водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре; p_0 – давление насыщенного водяного пара при той же температуре.

Относительная влажность может быть определена также по формуле

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot 100\%,$$

где ρ – *абсолютная влажность воздуха* при данной температуре (величина, равная массе водяного пара, содержащегося в 1 м^3 воздуха); ρ_0 – плотность насыщенного водяного пара при той же температуре.

Сила поверхностного натяжения жидкости

$$F = \sigma l,$$

где σ – поверхностное натяжение; l – длина границы поверхностного слоя жидкости.

Высота поднятия (или *опускания*) *жидкости в капилляре*

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g R},$$

где θ – краевой угол; g – ускорение свободного падения; R – радиус капилляра. При полном смачивании $\theta = 0$, а при полном несмачивании $\theta = 180°$.

Примеры решения задач

384. Вычислить массу одной молекулы кислорода.

Р е ш е н и е. В одном моле любого вещества (твердого, жидкого или газообразного) содержится одно и то же число молекул или других структурных единиц (например, атомов, ионов), равное числовому значению постоянной Авогадро

$$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Если M – молярная масса, то масса одной молекулы

$$m_0 = M/N_A. \qquad (1)$$

Для кислорода $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Следовательно, масса одной молекулы кислорода $m_0 = 5{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг.

По формуле (1) можно найти массу одной молекулы любого вещества, зная его молярную массу.

385. За время $t = 10$ сут из стакана полностью испарилось $m = 100$ г воды. Сколько в среднем молекул вылетало с поверхности воды за 1 с?

Р е ш е н и е. Пусть в стакане содержалось N молекул воды. Тогда за каждую секунду вылетало в среднем $n = N/t$ молекул. Очевидно, что $N = \nu N_A$, где ν – количество вещества воды в стакане. Поскольку масса воды m, то $\nu = m/M$, где $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воды. Следовательно,

$$n = \frac{mN_A}{Mt},\ n = 4 \cdot 10^{18}\ \text{с}^{-1}.$$

386. Резиновый шар содержит 2 л воздуха, находящегося при температуре 20 °С и атмосферном давлении $1 \cdot 10^5$ Па. Какой объем займет воздух, если шар будет опущен в воду на глубину 10 м? Температура воды 4 °С.

Высота поднятия (или *опускания*) *жидкости в капилляре*

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g R},$$

где θ – краевой угол; g – ускорение свободного падения; R – радиус капилляра. При полном смачивании $\theta = 0$, а при полном несмачивании $\theta = 180°$.

Примеры решения задач

384. Вычислить массу одной молекулы кислорода.

Решение. В одном моле любого вещества (твердого, жидкого или газообразного) содержится одно и то же число молекул или других структурных единиц (например, атомов, ионов), равное числовому значению постоянной Авогадро

$$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}.$$

Если M – молярная масса, то масса одной молекулы

$$m_0 = M/N_A. \qquad (1)$$

Для кислорода $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Следовательно, масса одной молекулы кислорода $m_0 = 5{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг.

По формуле (1) можно найти массу одной молекулы любого вещества, зная его молярную массу.

385. За время $t = 10$ сут из стакана полностью испарилось $m = 100$ г воды. Сколько в среднем молекул вылетало с поверхности воды за 1 с?

Решение. Пусть в стакане содержалось N молекул воды. Тогда за каждую секунду вылетало в среднем $n = N/t$ молекул. Очевидно, что $N = \nu N_A$, где ν – количество вещества воды в стакане. Поскольку масса воды m, то $\nu = m/M$, где $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воды. Следовательно,

$$n = \frac{mN_A}{Mt},\ n = 4 \cdot 10^{18}\ \text{с}^{-1}.$$

386. Резиновый шар содержит 2 л воздуха, находящегося при температуре 20 °С и атмосферном давлении $1 \cdot 10^5$ Па. Какой объем займет воздух, если шар будет опущен в воду на глубину 10 м? Температура воды 4 °С.

Давлением, обусловленным кривизной поверхности, пренебречь.

Решение. Пусть до погружения в воду воздух в шаре имел объем V_1, температуру T_1, давление p_1, а после погружения – соответственно V_2, T_2, p_2. Поскольку масса воздуха не изменяется, то выполняется объединенный газовый закон:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}. \qquad (1)$$

На глубине h полное давление

$$p_2 = \rho g h + p_{атм},$$

где $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3 – плотность воды. Под таким же давлением будет находиться и воздух в шаре, погруженном на эту глубину. До погружения давление воздуха $p_1 = p_{атм}$.

Подставив значения p_1 и p_2 в формулу (1), получим после очевидных преобразований и вычислений:

$$V_2 = \frac{p_{атм}V_1T_2}{T_1(\rho g h + p_{атм})},\ V_2 = 9 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^3.$$

387. В запаянной с одного конца длинной узкой стеклянной трубке, расположенной горизонтально, находится столбик воздуха длиной $l_1 = 307$ мм, запертый столбиком ртути длиной $l = 216$ мм. Какой будет длина воздушного столбика, если трубку поставить вертикально: отверстием вверх; отверстием вниз? Атмосферное давление $p_{атм} = 747$ мм рт. ст. Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Ртуть из трубки не выливается.

Решение. Если трубка расположена горизонтально (рис. 136, *а*), объем воздуха в закрытой части трубки и его давление выразятся так:

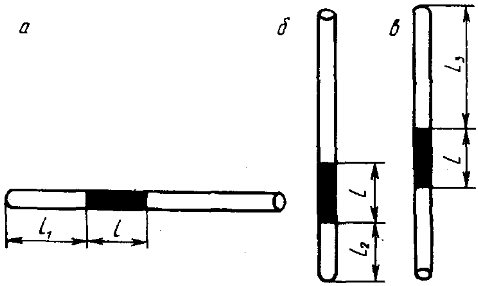
$$V_1 = l_1S,\ p_1 = p_{атм},$$

где S – площадь поперечного сечения трубки.

Если трубка расположена отверстием вверх (рис. 136, *б*), объем воздуха в закрытой части трубки и его давление равны соответственно:

$$V_2 = l_2S,\ p_2 = p_{атм} + \rho g l,$$

где ρ – плотность ртути.



Р и с. 136

Поскольку масса и температура воздуха не изменяются, то, согласно закону Бойля–Мариотта, $p_1V_1 = p_2V_2$, или

$$p_{\text{атм}}l_1S = (p_{\text{атм}} + \rho gl)l_2S.$$

Отсюда

$$l_2 = \frac{p_{\text{атм}}l_1}{p_{\text{атм}} + \rho gl}. \qquad (1)$$

Если трубка расположена отверстием вниз (рис. 136, *в*), объем воздуха в запертой части и его давление выразятся так:

$$V_3 = l_3S,\ p_3 = p_{\text{атм}} - \rho gl.$$

По закону Бойля–Мариотта $p_1V_1 = p_3V_3$, или

$$p_{\text{атм}}l_1S = (p_{\text{атм}} - \rho gl)l_3S.$$

Отсюда

$$l_3 = \frac{p_{\text{атм}}l_1}{p_{\text{атм}} - \rho gl}. \qquad (2)$$

Подставив числовые значения, получим: $l_2 = 238 \cdot 10^{-3}$ м, $l_3 = 432 \cdot 10^{-3}$ м.

З а м е ч а н и е. Расчетные формулы (1) и (2) можно упростить, выразив давление столба ртути высотой l и атмосферное давление в миллиметрах ртутного столба. Тогда:

$$l_2 = \frac{p_{\text{атм}}l_1}{p_{\text{атм}} + l} = 238 \text{ мм},\ l_3 = \frac{p_{\text{атм}}l_1}{p_{\text{атм}} - l} = 432 \text{ мм}.$$

Однако, если бы в трубке была не ртуть, а какая-либо другая жидкость, такое упрощение невозможно. Таким образом, формулы (1) и (2) являются общим решением, пригодным для любой жидкости.

388. Сосуд, содержащий $m_1 = 2$ г гелия, разорвался при температуре $t_1 = 400$ °С. Найти максимальную массу азота, который может храниться в таком сосуде при температуре $t_2 = 30$ °С и пятикратном запасе прочности.

Решение. Для гелия в момент разрыва сосуда уравнение состояния будет иметь вид

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT_1, \qquad (1)$$

где V – объем гелия; $M_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – его молярная масса; $T_1 = 400 + 273 = 673$ К – термодинамическая температура в момент разрыва.

Для азота в условиях хранения уравнение состояния запишется так:

$$p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT_2, \qquad (2)$$

где $M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса азота; $T_2 = 30 + 273 = 303$ К – температура азота.

Разделив почленно равенство (1) на (2), получим

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1 T_1 M_2}{m_2 T_2 M_1}.$$

Отсюда

$$m_2 = \frac{m_1 T_1 M_2}{T_2 M_1 (p_1/p_2)}. \qquad (3)$$

Подставив в формулу (3) числовые значения и $p_1/p_2 = 5$, найдем $m_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ кг.

389. Баллон содержит сжатый газ при температуре $t_1 = 27$ °С и давлении $p_1 = 2$ МПа. Каково будет давление, если из баллона выпустить $n = 0{,}3$ массы газа, а температуру понизить до $t_2 = 12$ °С?

Решение. Рассмотрим два состояния газа: до разрежения и после, когда осталось $1 - n$ массы. Параметры каждого из этих состояний связаны уравнением Менделеева–Клапейрона:

$$p_1 V = \frac{m}{M} RT_1, \quad p_2 V = \frac{(1-n)m}{M} RT_2,$$

где V – объем газа; m – масса; M – молярная масса; p_1, T_1, p_2, T_2 – соответственно давление и температура газа до и после выпуска.

Разделив почленно первое равенство на второе, получим

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{T_1}{(1-n)T_2},$$

откуда

$$p_2=\frac{(1-n)p_1T_2}{T_1},\ p_2=1\ \text{МПа}.$$

390. Газ находится в цилиндре под невесомым поршнем, площадь которого $S = 100$ см^2. При температуре $T_1 = 280$ К на поршень положили гирю массой $m = 10$ кг. При этом поршень несколько опустился. На сколько нужно нагреть газ в цилиндре, чтобы поршень оказался на прежней высоте? Атмосферное давление $p_1 = 101$ кПа.

Р е ш е н и е. В первоначальном состоянии и после нагревания газ занимает один и тот же объем. Масса газа постоянна. Следовательно, на основании закона Шарля

$$p_1/T_1=p_2/T_2, \tag{1}$$

где p_1, T_1, p_2, T_2 – соответственно давление и температура газа в начальном и конечном состояниях.

Гиря массой m, положенная на поршень, создает добавочное давление $p = mg/S$, поэтому $p_2 = p_1 + p = p_1 + mg/S$. Подставив это значение в формулу (1), получим

$$\frac{p_1}{T_1}=\frac{1}{T_2}\left(p_1+\frac{mg}{S}\right),$$

откуда

$$\Delta T=T_2-T_1=\frac{mgT_1}{Sp_1},\ \Delta T=27\ \text{К}.$$

391. Начертить график изменения плотности газа в изобарном процессе и график зависимости плотности газа от давления в изотермическом процессе.

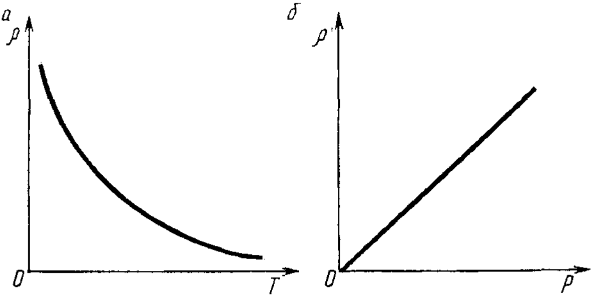
Р е ш е н и е. Из уравнения Менделеева–Клапейрона

$$pV=\frac{m}{M}RT,$$

учитывая, что $m/V=\rho$, получим выражение для плотности газа:

$$\rho=\frac{pM}{RT}, \tag{1}$$

отсюда $\rho T = pM/R$.



Р и с. 137

При изобарном процессе правая часть равенства (1) есть величина постоянная. Следовательно, ρT = const. Поэтому график изменения плотности газа в изобарном процессе будет иметь вид, показанный на рис. 137, *а*.

Если процесс изотермический, то из формулы (1) получим

$$\frac{\rho}{p} = \frac{M}{RT}.$$

В этом выражении правая часть — величина постоянная при T = const. Поэтому ρ / p = const. Следовательно, график зависимости плотности ρ газа от давления p в изотермическом процессе представляет собой прямую (рис. 137, *б*).

392. При температуре t = 36 °С давление насыщенного водяного пара p_0 = 5,945 кПа. Влажный воздух при этой температуре, относительной влажности φ = 80 % и давлении p = 101,3 кПа занимает объем V = 1 м^3. Определить его массу.

Р е ш е н и е. Масса влажного воздуха равна сумме массы m_1 водяного пара и массы m_2 воздуха:

$$m = m_1 + m_2. \tag{1}$$

Пусть p_1 — давление, которое оказывал бы водяной пар, если бы воздух отсутствовал (парциальное давление пара), p_2 — давление, которое оказывал бы воздух, если бы пара не было (парциальное давление воздуха). Тогда по закону Дальтона давление влажного воздуха $p = p_1 + p_2$, откуда

$$p_2 = p - p_1. \tag{2}$$

Запишем уравнения состояния для пара и для воздуха:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT, \quad p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT, \tag{3}$$

где M_1, M_2 – молярные массы соответственно водяного пара и воздуха; $T = (36 + 273)$ К = 309 К – термодинамическая температура. Из уравнений (3) находим:

$$m_1 = p_1 M_1 \frac{V}{RT}, \quad m_2 = p_2 M_2 \frac{V}{RT}. \tag{4}$$

Давление водяного пара $p_1 = \varphi p_0$, где $\varphi = 0{,}80$ – относительная влажность. Поэтому, согласно равенству (2), $p_2 = p - \varphi p_0$. Подставив значения давлений p_1 и p_2 в формулы (4), получим:

$$m_1 = \varphi p_0 M_1 \frac{V}{RT}, \quad m_2 = (p - \varphi p_0) M_2 \frac{V}{RT}. \tag{5}$$

На основании формул (1) и (5) найдем массу влажного воздуха:

$$m = \frac{V \varphi p_0}{RT}\left(M_1 + \left(\frac{p}{\varphi p_0} - 1\right) M_2\right).$$

Подставив в эту формулу числовые значения заданных величин и $M_1 = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $M_2 = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К), получим $m = 1$ кг.

393. В закрытом сосуде вместимостью $V = 2$ м^3 находится $m_1 = 0{,}9$ кг воды и $m_2 = 1{,}6$ кг кислорода. Найти давление в сосуде при температуре $t = 500$ °С, зная, что при этой температуре вся вода превращается в пар.

Р е ш е н и е. После испарения воды в сосуде находится смесь двух газов – водяного пара и кислорода. Давление смеси

$$p = p_1 + p_2, \tag{1}$$

где p_1 – давление водяного пара; p_2 – давление кислорода.

Из уравнения Менделеева–Клапейрона имеем:

$$p_1 = \frac{m_1}{M_1 V} RT, \quad p_2 = \frac{m_2}{M_2 V} RT. \tag{2}$$

На основании формул (1) и (2) получаем

$$p = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V}, \tag{3}$$

где $M_1 = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $M_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярные массы водяного пара и кислорода соответственно.

Подставив в выражение (3) числовые значения, получим $p = 3 \cdot 10^5$ Па.

На основании формулы (3) можно получить выражение для молярной массы газовой смеси. Перепишем формулу (3) в таком виде:

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT. \qquad (4)$$

Обозначим теперь через $M_{см}$ молярную массу смеси и запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси:

$$pV = \frac{m_1 + m_2}{M_{см}} RT. \qquad (5)$$

Сравнив выражения (4) и (5), найдем формулу для молярной массы смеси двух газов:

$$M_{см} = \frac{m_1 + m_2}{m_1/M_1 + m_2/M_2}.$$

Нетрудно показать, что в случае смеси n различных газов эта формула имеет вид

$$M_{см} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{m_1/M_1 + m_2/M_2 + \ldots + m_n/M_n},$$

где m_1, m_2, ..., m_n – массы отдельных газов, составляющих смесь; M_1, M_2, ..., M_n – молярные массы этих газов.

394. Вечером температура воздуха была $t_1 = 16$ °С, относительная влажность 65%. Ночью температура воздуха понизилась до $t_2 = 4$ °С. Была ли роса? При температуре 16 °С плотность насыщенного водяного пара $\rho_{01} = 13{,}6$ г/м^3, а при 4 °С – $\rho_{02} = 6{,}4$ г/м^3.

Р е ш е н и е. Насыщенный пар – это пар, имеющий максимальную плотность при данной температуре. Поэтому, чтобы узнать, была ли роса, нужно найти плотность ρ_1 водяного пара при температуре t_1 и сравнить ее с плотностью ρ_{02} насыщенного водяного пара при температуре t_2. Если $\rho_1 < \rho_{02}$, пар конденсироваться не будет (не будет росы). Если же $\rho_1 > \rho_{02}$, то роса будет, причем масса пара, сконденсировавшегося из объема V,

$$m = (\rho_1 - \rho_{02})V.$$

Так как относительная влажность $\varphi = \rho_1/\rho_{01}$, то $\rho_1 = \varphi\rho_{01} = 0{,}65 \cdot 13{,}6$ г/м^3 = 8,8 г/м^3. Сравнивая это значение с $\rho_{02} = 6{,}4$ г/м^3, делаем вывод: роса была, причем из $V = 1$ м^3 влажного воздуха сконденсировалось $m = 2{,}4$ г пара.

395. Найти абсолютную и относительную влажность воздуха в комнате при температуре $t_1 = 20$ °C, если точка росы $t_2 = 9$ °C. Как изменится относительная влажность при понижении температуры до $t_3 = 16$ °C, если абсолютная влажность останется прежней? Плотности насыщенного водяного пара при температурах t_1, t_2 и t_3 равны соответственно: $\rho_{01} = 17{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, $\rho_{02} = 8{,}8 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, $\rho_{03} = 13{,}6 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. При температуре t_2, которая является точкой росы, водяной пар в комнате становится насыщенным. Плотность ρ_{01} этого пара известна. Такую же плотность имеет этот пар при температуре t_1, т. е. при температуре t_1 абсолютная влажность воздуха $\rho_1 = \rho_{02} = 8{,}8 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3. Относительная влажность при этой температуре

$$\varphi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{01}} \cdot 100\%, \ \varphi_1 = 51\%.$$

При температуре t_3 относительная влажность

$$\varphi_3 = \frac{\rho_3}{\rho_{03}} \cdot 100\%.$$

Так как по условию абсолютная влажность осталась прежней, то $\rho_3 = \rho_1$. Следовательно, изменение относительной влажности

$$\Delta\varphi = \varphi_3 - \varphi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{03}} \cdot 100\% - \varphi_1, \ \Delta\varphi = 14\%.$$

Таким образом, с понижением температуры относительная влажность воздуха возрастет ($\Delta\varphi > 0$) на 14% и станет равной 65%.

396. Баллон разделен перегородкой на две части. В первой части вместимостью V_1 находится идеальный газ под давлением p_1, имеющий температуру T_1. Во второй части вместимостью V_2 находится такой же газ под давлением p_2, имеющий температуру T_2. Какое давление установится в баллоне, если перегородку убрать, а температуру газа сделать равной T?

Р е ш е н и е. После того как уберут перегородку, газ займет объем, равный $V_1 + V_2$, а масса газа в баллоне будет равна $m_1 + m_2$. Уравнение состояния газа имеет вид

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M} RT,$$

где M – молярная масса газа; R – универсальная газовая постоянная. Отсюда находим давление:

$$p = \frac{(m_1 + m_2)RT}{M(V_1 + V_2)}. \qquad (1)$$

Применив уравнение Менделеева–Клапейрона к газу, находящемуся в первой и второй частях сосуда с перегородкой, найдем:

$$\frac{m_1}{M} = \frac{p_1 V_1}{RT_1}, \quad \frac{m_2}{M} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Сложив эти уравнения, получим

$$m_1 + m_2 = \frac{M}{R}\left(\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2}\right).$$

Подставив это значение в формулу (1), будем иметь

$$p = \left(\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2}\right)\frac{T}{V_1 + V_2}.$$

397. При нормальных физических условиях ($p_0 =$ $= 101\,325$ Па, $T_0 = 273{,}15$ К) плотность воздуха $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3. На некоторой высоте давление воздуха $p = 1{,}1 \cdot 10^4$ Па, а температура $T = 220$ К. Определить плотность воздуха на этой высоте.

Р е ш е н и е. Считая воздух идеальным газом, из уравнения Менделеева–Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

где M – молярная масса, найдем плотность воздуха при температуре T и давлении p:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \qquad (1)$$

При нормальных условиях плотность воздуха

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{R T_0}. \qquad (2)$$

Разделив левые и правые части уравнений (1) и (2), получим

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p T_0}{p_0 T}.$$

Отсюда искомая плотность воздуха

$$\rho = \rho_0 \frac{p T_0}{p_0 T}, \ \rho = 1{,}8 \cdot 10^{-1} \text{ кг/м}^3.$$

398. В баллоне вместимостью $V = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ м^3 находится газ под давлением $p = 5{,}0 \cdot 10^4$ Па. Сколькими ходами поршневого насоса, вместимость камеры которого $V_0 = 200$ см^3, можно откачать воздух из баллона до давления $p_n = 6{,}65$ Па? Процесс откачки происходит при постоянной температуре.

Р е ш е н и е. Перед первым ходом поршня насоса газ занимает объем V при давлении p. При первом ходе поршня газ заполнит объем, равный сумме вместимостей баллона и камеры насоса, т. е. $V + V_0$, а давление станет равным p_1. Поскольку температура газа и его масса при этом неизменны, то, согласно закону Бойля–Мариотта, $pV = p_1(V + V_0)$. Отсюда

$$p_1 = p \frac{V}{V + V_0}.$$

Затем газ из камеры насоса удаляется в атмосферу, и начинается второй ход поршня; при этом начальное давление будет равно p_1, а в конце процесса засасывания – p_2. Снова применив закон Бойля–Мариотта, получим:

$$p_1 V = p_2(V + V_0), \ p_2 = p_1 \frac{V}{V + V_0} = p \frac{V^2}{(V + V_0)^2}.$$

Рассуждая аналогично, найдем, что после третьего хода давление

$$p_3 = p_2 \frac{V}{V + V_0} = p \frac{V^3}{(V + V_0)^3}.$$

После n-го хода поршня давление в сосуде

$$p_n = p\frac{V^n}{(V+V_0)^n}.$$

Прологарифмировав это уравнение и решив его затем относительно n, получим

$$n = \frac{\lg(p_n/p)}{\lg\frac{V}{V+V_0}},\ n = 49.$$

399. Металлическое кольцо, внешний диаметр которого $d_1 = 54$ мм, а внутренний $d_1 = 50$ мм, подвесили горизонтально на пружине жесткостью $k = 1{,}1$ Н/м. При этом пружина удлинилась на $\Delta l_1 = 15$ мм. Затем кольцо привели в соприкосновение с поверхностью жидкости и стали медленно опускать сосуд с жидкостью. В момент отрыва он нее кольца удлинение пружины $\Delta l_2 = 40$ мм. Определить поверхностное натяжение σ жидкости.

Решение. До соприкосновения с жидкостью сила тяжести $m\vec{g}$ кольца уравновешивалась силой упругости $\vec{F}$ пружины, и поэтому

$$F_1 = mg. \qquad (1)$$

При отрыве кольца от поверхности жидкости на него действуют направленная вертикально вверх сила упругости $\vec{F}_2$, а также сила тяжести $m\vec{g}$ и сила поверхностного натяжения $\vec{F}_3$, которые направлены вертикально вниз, поэтому

$$F_2 = mg + F_3. \qquad (2)$$

Длина линии, ограничивающей поверхность жидкости, равна сумме длин наружной и внутренней окружностей кольца, т. е. $\pi d_1 + \pi d_2$. Следовательно,

$$F_3 = \sigma\pi(d_1 + d_2). \qquad (3)$$

Подставив в уравнение (2) значения (1), (3), $F_1 = k\Delta l_1$ и $F_2 = k\Delta l_2$, получим $k\Delta l_2 = k\Delta l_1 + \sigma\pi(d_1 + d_2)$. Отсюда

$$\sigma = \frac{k(\Delta l_2 - \Delta l_1)}{\pi(d_1 + d_2)},\ \sigma = 8{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{Н/м}.$$

400. Каким должен быть диаметр трубки ртутного барометра, чтобы поправка Δh, вносимая в его показания с учетом капиллярного опускания ртути, была равна 3,0 мм? Поверхностное натяжение ртути $\sigma = 472$ мН/м, ее плотность $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Под действием сил поверхностного натяжения ртуть в трубке, диаметр которой d, опустится на

$$\Delta h = \frac{2\sigma}{\rho g R} = \frac{4\sigma}{\rho g d}.$$

Отсюда находим $d = \dfrac{4\sigma}{\rho g \Delta h}$, $d = 4{,}7 \cdot 10^{-3}$ м.

Задачи для самостоятельного решения

401. Сколько молекул содержится в насыщенном водяном паре массой $m = 1$ кг и сколько в ненасыщенном водяном паре, имеющем такую же массу? Молярная масса воды $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ моль$^{-1}$.

402. Водород массой $m = 0{,}3$ г находится в сосуде вместимостью $V = 2$ л под давлением $p = 200$ кПа. Определить среднюю квадратичную скорость и среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул водорода. Молярная масса водорода $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

403. Найти концентрацию газа при нормальных условиях. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

404. Под каким давлением находится в баллоне кислород, если вместимость баллона $V = 5$ л, а средняя кинетическая энергия поступательного движения всех молекул кислорода $E = 6$ кДж?

405. Определить массу водорода и число молекул, содержащихся в сосуде вместимостью $V = 20$ л при давлении $p = 2{,}5 \cdot 10^5$ Па и температуре $t = 27$ °С. Молярная масса водорода $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К). Постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

406. Газ массой $m = 2{,}0$ кг занимает объем $V = 9{,}03$ м^3 при давлении $p = 100$ кПа. Вычислить среднюю квадратичную скорость молекул этого газа.

407. Баллон вместимостью $V = 50$ л содержит $m = 2{,}2$ кг углекислого газа. Баллон выдерживает давление не выше