III. ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

8. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Методические указания к решению задач

При решении задач о взаимодействии точечных зарядов нужно, сделав рисунок, обозначить на нем силы, действующие на интересующий нас заряд. Если по условию задачи заряд находится в покое, записывают условие равновесия заряда (так же, как и для материальной точки в механике). Если заряд движется в однородном электрическом поле, составляют уравнение движения (так же, как и в механике).

Если в задаче речь идет о работе сил электрического поля над зарядом, следует составить уравнение на основе закона сохранения и превращения энергии. При взаимодействии заряженных тел и происходящем при этом перераспределении зарядов уравнение составляют согласно закону сохранения заряда. Полученную систему уравнений решают относительно искомой величины.

При решении задач о взаимодействии заряженных тел обычно используют формулы, устанавливающие связь между зарядами и потенциалами. Если задана сложная схема соединения конденсаторов, надо попытаться заменить ее другой схемой, по которой можно легко установить тип соединения (параллельное, последовательное или их комбинации). Иногда для этого достаточно начертить схему несколько иначе. В других случаях такую замену можно сделать путем соединения на заданной схеме точек с одинаковым потенциалом; при этом заряды на конденсаторах и разности потенциалов между обкладками не будут изменяться. После преобразования схемы устанавливают связь между зарядами, разностями потенциалов и емкостями конденсаторов.

Основные законы и формулы

Закон Кулона: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов прямо пропорциональна произведению модулей зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2},$$

где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ – коэффициент пропорциональности в СИ; ε – диэлектрическая проницаемость среды; ε_0 – электрическая постоянная:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\ \text{Ф/м} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}.$$

Закон сохранения электрического заряда: в замкнутой (электрически изолированной) системе алгебраическая сумма зарядов всех частиц остается неизменной.

Напряженность электростатического поля в данной точке

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0,$$

где $\vec{F}$ – сила, с которой поле действует на положительный точечный заряд q_0, помещенный в эту точку.

Принцип суперпозиции полей: если в данной точке пространства различные заряженные частицы создают поля, напряженности которых $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, ..., $\vec{E}_n$, то результирующая напряженность поля в этой точке

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n.$$

Поверхностная плотность электрического заряда

$$\sigma = q/S,$$

где q – заряд, равномерно распределенный по поверхности тела площадью S.

Напряженность электростатического поля точечного заряда q на расстоянии r от него

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Напряженность электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0\varepsilon},$$

где σ – поверхностная плотность электрического заряда.

Напряженность электростатического поля металлической заряженной сферы радиуса R на расстоянии $r \geqslant R$ от центра сферы

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$

где q – заряд сферы. Внутри сферы ($r < R$) $E = 0$.

Потенциал электростатического поля в данной точке

$$\varphi = W_p / q_0,$$

где W_p – потенциальная энергия, которой обладает заряд q_0, помещенный в эту точку.

Потенциал поля, созданного несколькими точечными зарядами, равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых в данной точке каждым зарядом:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n,$$

где $\varphi_i > 0$ при $q_i > 0$; $\varphi_i < 0$ при $q_i < 0$.

Потенциал электростатического поля точечного заряда q на расстоянии r от него

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

Потенциал электростатического поля металлической заряженной сферы радиуса R на расстоянии $r \geqslant R$ от центра сферы

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r},$$

где q – заряд сферы.

Внутри сферы потенциал во всех точках такой же, как на поверхности сферы ($r = R$).

Работа, совершаемая электростатическим полем при перемещении заряда q из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2,

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Связь между напряженностью однородного электрического поля и разностью потенциалов выражается формулой

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/d,$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между точками, находящимися одна от другой на расстоянии d вдоль линии напряженности поля.

*Электрическая емкость** *проводника* – физическая величина, равная отношению заряда q, сообщенного проводнику, к его потенциалу φ:

$$C = q/\varphi.$$

Электрическая емкость конденсатора

$$C = q/U,$$

где q – заряд конденсатора; U – напряжение между обкладками конденсатора.

Емкость проводящей сферы радиуса R, находящейся в среде с диэлектрической проницаемостью ε,

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Емкость плоского конденсатора, площадь каждой пластины которого S, а расстояние между ними d,

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d,$$

где ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами.

Общая емкость конденсаторов, соединенных параллельно,

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n.$$

Общая емкость конденсаторов, соединенных последовательно, определяется по формуле

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}.$$

Энергия электрического поля заряженного конденсатора емкостью C

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2},$$

где U – напряжение между его обкладками, q – заряд конденсатора.

Примеры решения задач

488. В воздухе на некотором расстоянии друг от друга находятся два одинаковых маленьких шарика, имеющих заряды $q_1 = +0{,}5$ мкКл и $q_2 = -0{,}1$ мкКл. Шарики привели в соприкосновение, а затем раздвинули на расстояние

* Вместо терминов «электрическая емкость», «электрический заряд» применяются краткие формы: «емкость», «заряд».

$r = 10$ см. Найти силу взаимодействия шариков. Диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon = 1$.

Решение. После соприкосновения шариков их заряды стали одинаковыми. При этом, согласно закону сохранения заряда, сумма зарядов шариков осталась неизменной. Следовательно, после соприкосновения заряд каждого шарика

$$q = (q_1 + q_2)/2.$$

Шарики будут взаимодействовать с силой

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1+q_2)^2}{4\varepsilon r^2}, \quad F = 3{,}6\cdot10^{-2}\ \text{Н}.$$

489. Два одинаковых маленьких шарика массой $m = 0{,}4$ г каждый подвешены на непроводящих нитях длиной $l = 1$ м к одной точке. После того как шарикам были сообщены одинаковые заряды q, они разошлись на расстояние $r = 9$ см. Определить заряды шариков и силу натяжения нити. Диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon = 1$.

Решение. На каждый шарик (рис. 145) действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила взаимодействия $\vec{F}$. Шарик находится в равновесии. Следовательно, выполняется условие

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0},$$

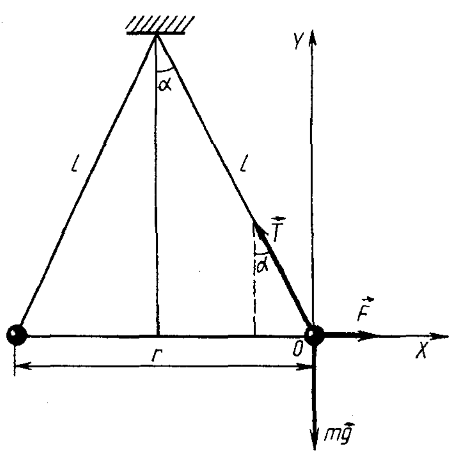


Рис. 145

поэтому суммы проекций сил на оси OX и OY равны нулю:

$$F - T\sin\alpha = 0,\ T\cos\alpha - mg = 0,$$

или

$$T\sin\alpha = F,\ T\cos\alpha = mg. \quad (1)$$

Разделив равенства (1) почленно первое на второе, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = F/(mg).$$

Так как угол α мал, то $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha = \frac{r/2}{l} = \frac{r}{2l}$, поэтому

$$\frac{r}{2l} = \frac{F}{mg}. \quad (2)$$

По закону Кулона

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Подставим это выражение в равенство (2):

$$\frac{r}{2l} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2 mg},$$

откуда

$$q = r\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon mgr}{l}},\ q = 1\cdot 10^{-8}\ \text{Кл}.$$

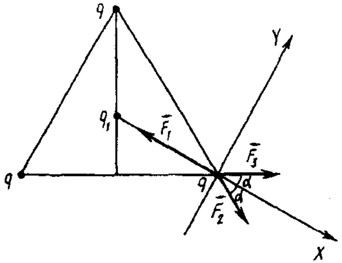
Из уравнения (1) найдем модуль силы натяжения нити:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\sqrt{1 - r^2/(4l^2)}} = \frac{2mgl}{\sqrt{4l^2 - r^2}},\ T = 4\cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

490. В вершинах правильного треугольника расположены одинаковые пожительные точечные заряды $q = 3{,}2 \cdot 10^{-8}$ Кл. Какой отрицательный заряд надо поместить в центр треугольника, чтобы вся система зарядов находилась в равновесии? Система находится в воздухе ($\varepsilon = 1$).

Решение. На каждый заряд q, находящийся в вершине треугольника, действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ со стороны отдельных трех зарядов (рис. 146). По закону Кулона найдем модули этих сил:

$$F_1 = k\frac{|q_1|q}{\varepsilon r^2},\ F_2 = F_3 = k\frac{q^2}{\varepsilon a^2}, \quad (1)$$



Р и с. 146

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ – расстояние от вершины до центра правильного треугольника. При равновесии сумма этих сил равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}.$$

Следовательно, сумма проекций сил на любую координатную ось равна нулю. Совместим начало координат с вершиной треугольника, а оси OX и OY направим так, как показано на рис. 146. Для проекций сил на ось OX получим

$$F_2 \cos\alpha + F_3 \cos\alpha - F_1 = 0. \qquad (2)$$

(Равенство нулю суммы проекций сил на ось OY очевидно, так как $F_2 \sin\alpha = F_3 \sin\alpha$ и $F_2 = F_3$.) Из рисунка видно, что $\alpha = 30°$, поэтому $\cos\alpha = \cos 30° = \sqrt{3}/2$. Подставив это значение и $r = a\sqrt{3}/3$ в равенства (1) и (2), получим после очевидных преобразований и вычислений:

$$|q_1| = \frac{q\sqrt{3}}{3},\ |q_1| = 1{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл},\ q_1 = -1{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл}.$$

491. Два одинаковых маленьких шарика подвесили на нитях равной длины, закрепленных в одной точке. Шарикам сообщили одинаковые одноименные заряды. После этого шарики погрузили в жидкий диэлектрик, плотность которого ρ_1. Плотность шариков ρ_2. Найти диэлектрическую проницаемость среды, если угол расхождения нитей в воздухе равен α, а в жидкости β.

Р е ш е н и е. До погружения в жидкость на каждый шарик действовали сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}_1$ и сила отталкивания $\vec{F}_1$ (рис. 147, *а*). Поскольку шарик находился в равновесии, то выполнялось условие $m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{F}_1 = \vec{0}$.

Для проекций на оси OX и OY сил, действующих на шарик, получим:

$$T_1 \sin\frac{\alpha}{2} = F_1,\ T_1 \cos\frac{\alpha}{2} = mg.$$

Отсюда, разделив почленно первое уравнение на второе, получим

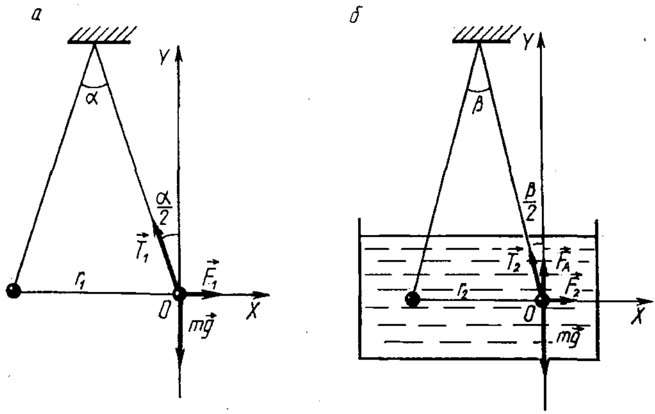


Рис. 147

$$F_1 = mg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Когда шарики погружены в жидкость (рис. 147, *б*), на каждый из них действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}_2$, архимедова сила $\vec{F}_\text{A}$ и сила отталкивания $\vec{F}_2$. Из условия равновесия шарика $m\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{F}_\text{A} + \vec{F}_2 = \vec{0}$ следует:

$$T_2 \sin\frac{\beta}{2} = F_2, \;\; T_2 \cos\frac{\beta}{2} = mg - F_\text{A}.$$

Отсюда

$$F_2 = (mg - F_\text{A})\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \qquad (2)$$

Модуль архимедовой силы $F_\text{A} = \rho_1 g V$, где V – объем шарика: $V = m/\rho_2$; m – масса шарика; ρ_2 – его плотность. Тогда

$$F_\text{A} = \rho_1 g m/\rho_2.$$

Подставив это выражение в формулу (2), получим

$$F_2 = mg\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \qquad (3)$$

По закону Кулона

$$F_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}, \;\; F_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2},$$

где q – модуль заряда каждого шарика; ε – диэлектрическая проницаемость жидкости (для воздуха $\varepsilon = 1$); r_1, r_2 – расстояния между шариками в воздухе и в жидкости соответственно.

Разделив почленно два последних равенства, найдем

$$\varepsilon = \frac{F_1}{F_2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2. \qquad (4)$$

Как видно из рис. 147,

$$r_1 = 2l\sin\frac{\alpha}{2}, \; r_2 = 2l\sin\frac{\beta}{2}, \qquad (5)$$

где l – длина нити.

Заменив в формуле (4) величины F_1, F_2, r_1 и r_2 их выражениями (1), (3) и (5), получим после преобразований

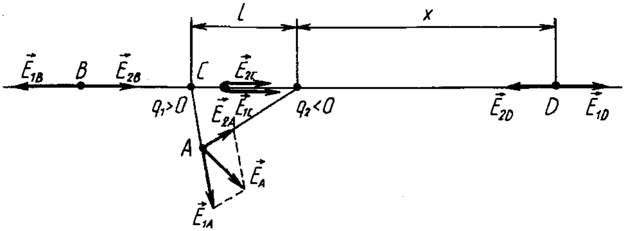
$$\varepsilon = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\sin^2\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}.$$

492. Два точечных заряда $q_1 = +2{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_2 = -0{,}91 \cdot 10^{-8}$ Кл находятся на расстоянии $l = 6$ см друг от друга. Определить положение точки, в которой напряженность поля равна нулю.

Р е ш е н и е. Результирующая напряженность в любой точке поля

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ – напряженности полей, создаваемых зарядами q_1 и q_2 в этой точке. Очевидно, что $\vec{E} = \vec{0}$ только в той точке, в которой векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ равны по модулю и противоположны по направлению. В любой точке A (рис. 148), кото-



Р и с. 148

рая не лежит на прямой, проходящей через заряды, результирующая напряженность $\vec{E}_A \neq \vec{0}$. Рассмотрим напряженность в точках прямой, соединяющей заряды.

В любой точке B на прямой слева от q_1 $\vec{E}_B \neq \vec{0}$, так как $|q_1| > |q_2|$. В любой точке C, расположенной между зарядами, векторы $\vec{E}_{1C}$ и $\vec{E}_{2C}$ направлены в одну сторону, поэтому их сумма отлична от нуля. Таким образом, мы приходим к выводу, что искомая точка D лежит на прямой, проходящей через данные заряды, справа от заряда q_2 на некотором расстоянии x от него. В этой точке $E_{1D} = E_{2D}$ или

$$\frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(l+x)^2} = \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon x^2}.$$

Отсюда

$$x = \frac{l\sqrt{|q_2|}}{\sqrt{|q_1|} - \sqrt{|q_2|}}, \quad x = 8{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

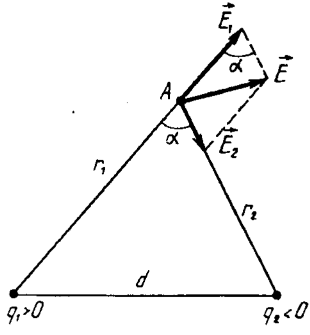
493. Два точечных заряда $q_1 > 0$ и $q_2 < 0$ расположены в воздухе на расстоянии d друг от друга. Найти напряженность и потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке A, находящейся на расстоянии r_1 от положительного заряда и на расстоянии r_2 от отрицательного. (Точка A не лежит на прямой, соединяющей заряды q_1 и q_2, $d < r_1 + r_2$.)

Р е ш е н и е. Согласно принципу суперпозиции полей, в точке A (рис. 149) напряженность электрического поля $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ – напряженности полей, создаваемых в этой точке зарядами q_1 и q_2 соответственно. Сложив векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ по правилу параллелограмма, найдем модуль вектора $\vec{E}$, воспользовавшись теоремой косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha},$$

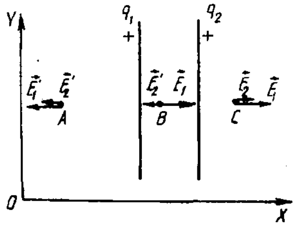
где $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$; $E_2 = \dfrac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$;

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$



Р и с. 149

В точке A потенциал поля $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где φ_1, φ_2 – потенциалы полей, создаваемых в этой точке зарядами q_1 и q_2:



Р и с. 150

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}, \ \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

494. Две параллельные металлические пластины, площадь каждой из которых равна S, несут положительные заряды q_1 и $q_2 < q_1$. Расстояние между пластинами много меньше их линейных размеров. Определить напряженность электростатического поля в точках A, B и C (рис. 150).

Р е ш е н и е. В любой точке пространства (между пластинами и вне их) напряженность поля, согласно принципу суперпозиции, равна векторной сумме напряженностей полей каждой пластины. Поэтому

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1' + \vec{E}_2', \ \vec{E}_B = \vec{E}_1 + \vec{E}_2', \ \vec{E}_C = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где $\vec{E}_1$, $\vec{E}_1'$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_2'$ – напряженности электростатических полей соответственно первой и второй пластин справа и слева от них.

Направим координатную ось OX перпендикулярно пластинам. Спроектировав векторы напряженности на эту ось, получим:

$$E_{Ax} = -(E_1' + E_2'), \ E_{Bx} = E_1 - E_2', \ E_{Cx} = E_1 + E_2.$$

Поскольку размеры пластин велики по сравнению с расстояниями от них до рассматриваемых точек, напряженности полей этих пластин можно вычислять так же, как для бесконечной плоскости. Поэтому

$$E_1 = E_1' = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0\varepsilon S}, \ E_2 = E_2' = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S},$$

где σ_1, σ_2 – поверхностные плотности зарядов; ε – диэлектрическая проницаемость воздуха: $\varepsilon = 1$. Следовательно,

$$E_{Ax} = -\frac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}, \ E_{Bx} = \frac{q_1 - q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}, \ E_{Cx} = \frac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

495. Положительно заряженный металлический шар (рис. 151) создает поле, напряженность которого в точке A $E_1 = 100$ В/м, а в точке C – $E_3 = 36$ В/м. Какова напряженность поля в точке B, лежащей посередине между точками A и C? Шар находится в воздухе.

Решение. Обозначим расстояние от центра шара O до точек A, B и C через r_1, r_2 и r_3 соответственно. Тогда напряженность поля в точке B

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}, \qquad (1)$$

где q — заряд шара; ε — диэлектрическая проницаемость воздуха: $\varepsilon = 1$.

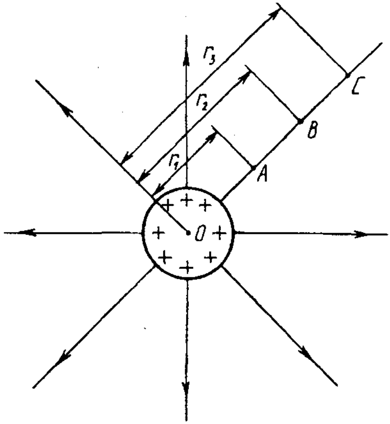


Рис. 151

Учитывая, что $AB = BC$, найдем

$$r_2 = r_1 + \frac{r_3 - r_1}{2} = \frac{r_1 + r_3}{2}. \qquad (2)$$

Напряженности поля в точках A и C равны соответственно:

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}, \quad E_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3^2}.$$

Выразим отсюда расстояния r_1 и r_3:

$$r_1 = \sqrt{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E_1}}, \quad r_3 = \sqrt{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E_3}}.$$

Учитывая эти значения, по формуле (2) находим

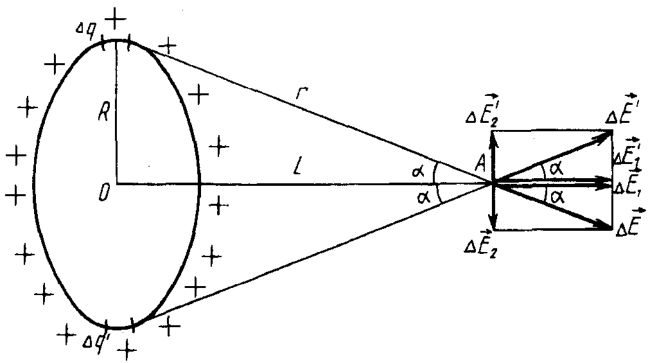
$$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}}\left(\sqrt{\frac{1}{E_1}} + \sqrt{\frac{1}{E_3}}\right). \qquad (3)$$

Подставив значение (3) в формулу (1), получим после преобразований и вычислений:

$$E_2 = \frac{4E_1E_3}{E_1 + 2\sqrt{E_1E_3} + E_3}, \quad E_2 = 56\ \text{В/м}.$$

496. По проволочному кольцу радиуса $R = 10$ см равномерно распределен положительный заряд $q = 5{,}0 \cdot 10^{-9}$ Кл. Найти напряженность электростатического поля на оси кольца в точках, расположенных от центра кольца на расстояниях $l_1 = 0$, $l_2 = 5{,}0$ см, $l_3 = 15$ см.

Р е ш е н и е. Разобьем кольцо на отрезки, малые по сравнению с расстоянием r до точки A (рис. 152). Тогда заряд Δq, находящийся на каждом отрезке, можно считать



Р и с. 152

точечным. Он создает в точке A поле напряженностью $\Delta\vec{E}$, модуль которой

$$\Delta E = \frac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Согласно принципу суперпозиции, результирующая напряженность в точке A равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых в этой точке каждым отрезком с зарядом Δq.

Разложим вектор $\Delta\vec{E}$ на две составляющие: $\Delta\vec{E}_1$, направленную вдоль оси кольца, и $\Delta\vec{E}_2$, направленную перпендикулярно этой оси. При сложении векторов напряженности полей, создаваемых всеми отрезками в точке A, сумма составляющих, направленных перпендикулярно оси, получится равной нулю. Это объясняется тем, что для каждого отрезка с зарядом Δq существует диаметрально противоположный отрезок с зарядом $\Delta q' = \Delta q$, поэтому

$$\Delta\vec{E}_2 + \Delta\vec{E}_2' = \vec{0}.$$

Следовательно, результирующая напряженность $\vec{E}$ в точке A равна сумме составляющих, направленных вдоль оси кольца, а модуль напряженности в точке A равен сумме модулей этих составляющих, так как направления их одинаковы.

Постольку $\Delta E_1 = (\Delta E)\cos\alpha = \frac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos\alpha$, то

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos\alpha.$$

Из рис. 152 видно, что

$$r^2 = R^2 + l^2, \quad \cos\alpha = l/\sqrt{R^2 + l^2}.$$

Учитывая это, получаем

$$E = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{(R^2 + l^2)^3}} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R^2 + l^2)^{3/2}}.$$

По этой формуле вычисляем модули напряженности в точках, находящихся на расстояниях $l_1 = 0$, $l_2 = 5{,}0$ см, $l_3 = 15$ см, учитывая при этом, что $\varepsilon = 1$ (воздух) и $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Н · м^2/Кл^2. Получаем: $E_1 = 0$, $E_2 = 1{,}6 \cdot 10^3$ В/м, $E_3 = 1{,}2 \cdot 10^3$ В/м.

497. Какую работу надо совершить, чтобы перенести точечный заряд $q = 6$ нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $l = 10$ см от поверхности металлического шарика, потенциал которого $\varphi = 200$ В, а радиус $R = 2$ см? Шарик находится в воздухе ($\varepsilon = 1$).

Решение. Работа A, которую надо совершить, чтобы перенести заряд из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2, отличается от работы $A_п$ электростатического поля только знаком: $A = -A_п$. А так как $A_п = q(\varphi_2 - \varphi_1)$, то

$$A = -q(\varphi_1 - \varphi_2) = q(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1)$$

В рассматриваемом случае начальная точка находится на бесконечности, поэтому $\varphi_1 = 0$. Найдем потенциал φ_2 в конечной точке. Пусть Q — заряд шарика. Тогда потенциал шарика

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}, \quad (2)$$

а потенциал в конечной точке, находящейся на расстоянии $l + R$ от центра шарика,

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R + l)}. \quad (3)$$

Разделив почленно равенство (3) на (2), найдем

$$\varphi_2 = \frac{R\varphi}{R+l}. \qquad (4)$$

Подставив в формулу (1) значения $\varphi_1 = 0$ и φ_2, получим:

$$A = \frac{qR\varphi}{R+l}, \quad A = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

498. Проводящий шар наэлектризован так, что поверхностная плотность заряда равна σ. На расстоянии l от поверхности шара потенциал поля равен φ. Какова емкость шара (шар находится в воздухе)?

Решение. Емкость проводящего шара

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R, \qquad (1)$$

где R – радиус шара. Чтобы найти радиус шара, запишем выражение для потенциала поля на расстоянии l от поверхности шара (т. е. на расстоянии $R + l$ от центра шара):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (R+l)},$$

где $q = \sigma S$ – заряд шара; $S = 4\pi R^2$ – площадь поверхности шара. Поэтому

$$\varphi = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 (R+l)}.$$

Отсюда

$$\sigma R^2 - \varphi\varepsilon_0 R - \varphi\varepsilon_0 l = 0. \qquad (2)$$

Решив это квадратное уравнение относительно R, получим

$$R = \frac{\varphi\varepsilon_0}{2\sigma}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma l}{\varphi\varepsilon_0}}\right). \qquad (3)$$

Второй корень уравнения (2) отрицательный, физического смысла не имеет.

Подставив значение R из формулы (3) в (1), найдем емкость шара:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0^2\varphi}{\sigma}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma l}{\varepsilon_0\varphi}}\right).$$

499. Определить потенциал большой шарообразной капли, получившейся в результате слияния $n = 1000$ одинаковых шарообразных малых капель воды, каждая из которых была заряжена до потенциала $\varphi = 0{,}01$ В.

Р е ш е н и е. Потенциал на поверхности большой шарообразной капли (с учетом $\varepsilon = 1$)

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}, \qquad (1)$$

где q_1 – заряд капли; R – ее радиус.

Потенциал на поверхности малой капли

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad (2)$$

где q – заряд капли; r – ее радиус.

Если n одинаковых капель сливаются в одну, ее заряд $q_1 = nq$. С учетом этого получим, разделив почленно равенство (1) на (2),

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} = n\frac{r}{R}. \qquad (3)$$

Очевидно, что объем большой капли равен сумме объемов малых капель:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

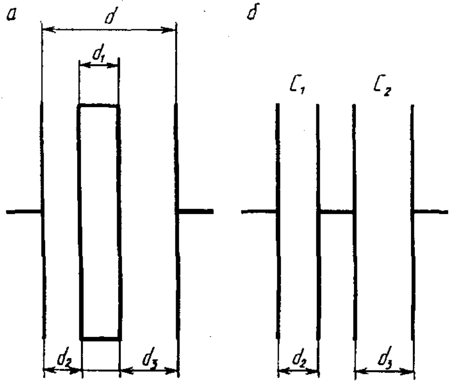
Отсюда $r/R = 1/\sqrt[3]{n}$. Подставив это значение в соотношение (3), получим:

$$\varphi_1 = \frac{n}{\sqrt[3]{n}}\varphi, \ \varphi_1 = 1 \text{ В}.$$

500. Однородное электростатическое поле, напряженность которого $E = 1 \cdot 10^4$ В/м, образовано двумя заряженными параллельными пластинами, расположенными на расстоянии $d = 2$ см друг от друга в воздухе. Какова разность потенциалов между пластинами? Чему будет равна разность потенциалов, если между пластинами параллельно им поместить металлический лист толщиной $d_1 = 0{,}5$ см?

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой, устанавливающей связь между напряженностью E однородного электрического поля и разностью потенциалов U: $E = U/d$. Отсюда

$$U = Ed. \qquad (1)$$



Р и с. 153

Если между пластинами параллельно им поместить металлический лист толщиной d_1 (рис. 153, *а*), это приведет к образованию двух последовательно соединенных конденсаторов с расстояниями между обкладками d_2 и d_3 (рис. 153, *б*). Емкости этих конденсаторов:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_2}, \ C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_3}, \qquad (2)$$

где S – площадь одной пластины. Пусть C – их общая емкость при последовательном соединении. Тогда

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2},$$

откуда

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Подставляя сюда значения (2) и учитывая, что $d_2 + d_3 = d - d_1$, получаем

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d - d_1}. \qquad (3)$$

Обозначим через C_0 емкость конденсатора, образованного двумя заряженными пластинами до внесения металлического листа. Заряд конденсатора до и после внесения листа один и тот же, так как конденсатор отключен от источника тока. Поэтому $q = C_0 U = C U_1$. Отсюда

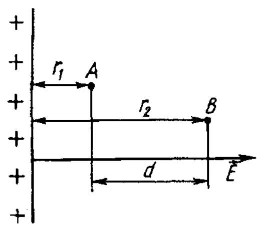
$$U_1 = C_0 U / C. \qquad (4)$$

Подставив в формулу (4) $C_0 = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$, а также значения (1) и (3), после очевидных преобразований получим:

$$U_1 = E(d - d_1),\ \ U_1 = 2 \cdot 10^2 \text{ В/м}. \qquad (5)$$

Формулы (3) и (5) показывают, что введение проводящей пластины толщиной d_1 между обкладками конденсатора эквивалентно уменьшению расстояния между обкладками на эту толщину. В отключенном от источника тока конденсаторе это приводит к уменьшению разности потенциалов между обкладками.

501. Точки A и B (рис. 154) находятся на расстояниях r_1 = 4,0 см и r_2= 12 см от бесконечной плоскости, на которой равномерно распределен положительный заряд. Разность потенциалов U между этими точками равна 1200 В. Найти поверхностную плотность заряда на плоскости.



Р и с. 154

Р е ш е н и е. Бесконечная плоскость, равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда $\sigma > 0$, создает в вакууме однородное электростатическое поле, модуль напряженности которого

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где ε_0 – электрическая постоянная; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Отсюда

$$\sigma = 2\varepsilon_0 E. \qquad (1)$$

В однородном поле напряженность и разность потенциалов связаны соотношением

$$E = U/d,$$

где d – расстояние между точками A и B вдоль линии напряженности поля. Линии напряженности перпендикулярны заряженной плоскости и направлены влево и вправо от нее. Из рисунка, где показана только одна линия напряженности $\bar{E}$, видно, что $d = r_2 - r_1$. Следовательно,

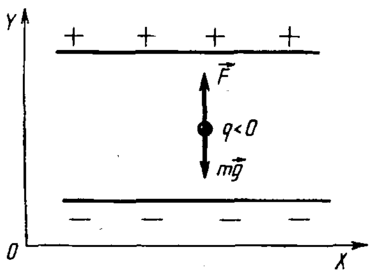
$$E = \frac{U}{r_2 - r_1}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим:

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0 U}{r_2 - r_1}, \ \sigma = 2{,}7 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2.$$

502. Капелька масла, заряженная отрицательно, помещена между пластинами горизонтально расположенного плоского конденсатора. Напряженность электростатического поля подобрана так, что капелька покоится. Определить заряд капельки, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 500$ В, расстояние между пластинами $d = 0{,}50$ см, радиус капельки $r = 7{,}6 \cdot 10^{-5}$ см, плотность масла $\rho = 0{,}90 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. На капельку, находящуюся в электростатическом поле конденсатора, действуют две силы (рис. 155): сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F} = q\vec{E}$ со стороны электростатического поля (m – масса капельки, q – ее заряд). Поскольку капелька находится в равновесии, сумма проекций этих сил на ось OY, направленную вертикально вверх, равна нулю: $qE - mg = 0$. Отсюда



Р и с. 155

$$q = mg/E. \tag{1}$$

Масса капельки $m = \rho V$, где $V = 4\pi r^3/3$ – ее объем. Напряженность электростатического поля $E = U/d$. Подставив значения m и E в формулу (1), получим:

$$q = \frac{4\pi r^3 \rho g d}{3U}, \ q = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

503. На точечный заряд, находящийся внутри конденсатора, действует некоторая сила. Напряжение на конденсаторе $U = 10$ кВ, его емкость $C = 100$ мкФ. Во сколько раз увеличится сила, действующая на заряд, если конденсатор в течение времени $t = 120$ с подзаряжать током, сила которого $I = 0{,}10$ А?

Р е ш е н и е. Обозначим через q заряд, находящийся внутри конденсатора. Пусть $\vec{F}_1$ – сила, действующая на заряд до подзарядки конденсатора, $\vec{F}_2$ – после подзарядки. Тогда

$$F_1 = qE_1,\ F_2 = qE_2, \qquad (1)$$

где E_1, E_2 – модули напряженности электростатического поля конденсатора в первом и во втором случаях:

$$E_1 = \frac{|\sigma_1|}{\varepsilon\varepsilon_0},\ E_2 = \frac{|\sigma_2|}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad (2)$$

σ_1, σ_2 – поверхностные плотности заряда.

Пусть S – площадь обкладки конденсатора, q_1 – начальный заряд конденсатора. За время t заряд конденсатора увеличится на $\Delta q = It$ и станет равным $q_2 = q_1 + It$. Следовательно,

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S},\ \sigma_2 = \frac{q_1 + It}{S}. \qquad (3)$$

На основании выражений (1)–(3) получим

$$\frac{F_2}{F_1} = 1 + \frac{It}{q_1},$$

а так как $q_1 = CU$, то

$$\frac{F_2}{F_1} = 1 + \frac{It}{CU},\ \frac{F_2}{F_1} = 13.$$

504. Проводящий шар A радиуса $R_1 = 10$ см зарядили до потенциала $\varphi_1 = 2700$ В и отключили от источника тока. После этого шар A соединили проволокой, емкостью которой можно пренебречь, с незаряженным проводящим шаром B радиуса $R_2 = 5$ см. Шары находятся в воздухе. Определить: начальный заряд шара A; заряды и потенциалы шаров после соединения; энергию обоих шаров после соединения; энергию, выделившуюся при соединении.

Р е ш е н и е. Емкости шаров A и B:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1,\ C_2 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2,$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}$ Ф/м; $\varepsilon = 1$ (воздух).

Начальный заряд шара A

$$q_1 = \varphi_1 C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1\varphi_1. \qquad (1)$$

После соединения заряд на шарах A и B распределится так, что потенциал φ их будет одинаков. Пусть q_2 – заряд шара B после соединения. Тогда на шаре A остался заряд $q_1' = q_1 - q_2$. Условие равенства потенциалов будет иметь вид

$$\frac{q_1 - q_2}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}, \text{ или } \frac{q_1 - q_2}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Отсюда

$$q_2 = \frac{q_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{2}$$

Потенциал шаров после соединения

$$\varphi = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_1 R_2}{(R_1 + R_2) C_2} = \varphi_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \tag{3}$$

Энергия шаров после соединения $W = q_1\varphi/2$ или с учетом равенств (1) и (3)

$$W = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon\varphi_1^2 R_1^2}{R_1 + R_2}. \tag{4}$$

Энергия, выделившаяся при соединении, равна разности энергий шаров до и после соединения:

$$W_1 = W_0 - W. \tag{5}$$

Так как до соединения заряжен был только шар A, то

$$W_0 = \frac{C_1\varphi_1^2}{2} = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1\varphi_1^2. \tag{6}$$

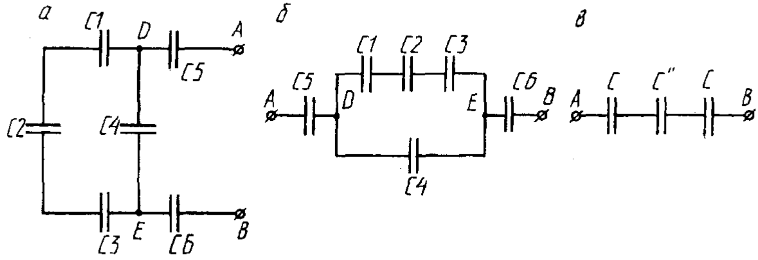
Подставив значения (4) и (6) в формулу (5), получим

$$W_1 = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1\varphi_1^2\left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right). \tag{7}$$

Подставив числовые значения величин в формулы (1)–(4), (7), найдем: $q_1 = 3 \cdot 10^{-8}$ Кл, $q_2 = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл, $q_1' = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл, $\varphi = 2 \cdot 10^3$ В, $W = 3 \cdot 10^{-5}$ Дж, $W_1 = 1 \times 10^{-5}$ Дж.

505. Найти емкость батареи конденсаторов, соединенных по схеме, приведенной на рис. 156, *а*. Все конденсаторы имеют одинаковую емкость $C = 11$ мкФ.

Р е ш е н и е. На рис. 156, *б* изображена схема, эквивалентная данной схеме. Конденсаторы С1, С2 и С3 соединены последовательно. Их общая емкость $C' = C/3$. Параллельно этой цепи подключен конденсатор С4. Значит, емкость цепи между точками D и E



Р и с. 156

$$C'' = C' + C = 4C/3.$$

Теперь имеем схему, изображенную на рис. 156, *в*. Емкость этой батареи $C_б$ найдем из формулы для последовательного соединения конденсаторов:

$$\frac{1}{C_б} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C''} + \frac{1}{C},$$

откуда

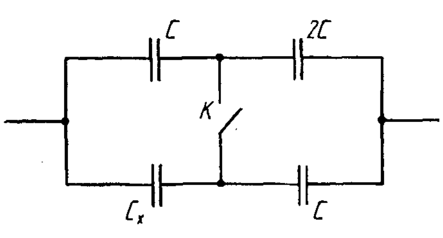
$$\frac{1}{C_б} = \frac{2}{C} + \frac{3}{4C},\ C_б = \frac{4}{11}C,\ C_б = 4\ мкФ.$$

506. Конденсаторы емкостями C, $2C$ и C_x соединены по схеме, приведенной на рис. 157. Емкость батареи не изменяется при замыкании ключа К. Определить емкость C_x.

Р е ш е н и е. Найдем сначала емкость батареи при разомкнутом ключе. Если соединены последовательно два конденсатора емкостями C_1 и C_2, то их общая емкость

$$C_{общ} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Воспользуемся этой формулой и найдем, что при разомкнутом ключе емкость верхней ветви, состоящей из



Р и с. 157

последовательно соединенных конденсаторов емкостями C и $2C$, равна

$$\frac{C \cdot 2C}{C+2C} = \frac{2}{3}C.$$

Емкость нижней ветви, состоящей из последовательно соединенных конденсаторов емкостями C_x и C, равна

$$\frac{C_x C}{C_x + C}.$$

Верхняя и нижняя ветви соединены между собой параллельно. Поэтому емкость батареи

$$C' = \frac{2}{3}C + \frac{C_x C}{C_x + C}. \tag{1}$$

При замкнутом ключе конденсаторы емкостями C и C_x соединены параллельно; их общая емкость равна $C + C_x$. Конденсаторы емкостями $2C$ и C тоже соединены параллельно; их общая емкость равна $2C + C = 3C$. Ветви, емкости которых $C + C_x$ и $3C$, соединены последовательно. Значит, при замкнутом ключе емкость батареи

$$C'' = \frac{3C(C+C_x)}{3C+C+C_x} = \frac{3C(C+C_x)}{4C+C_x}. \tag{2}$$

По условию $C' = C''$, поэтому на основании формул (1) и (2)

$$\frac{2}{3}C + \frac{C_x C}{C_x + C} = \frac{3C(C+C_x)}{4C+C_x}.$$

Решив это уравнение относительно C_x, получим значение искомой емкости: $C_x = C/2$.

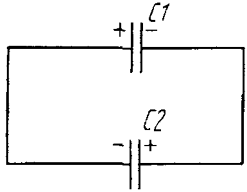
507. Два конденсатора одинаковой емкости зарядили до напряжений $U_1 = 100$ В и $U_2 = 200$ В соответственно, а затем одноименно заряженные обкладки конденсаторов соединили попарно. Какое установится напряжение между обкладками?

Решение. Пусть C – емкость одного конденсатора. Если соединить два таких конденсатора параллельно, получим батарею емкостью $C_1 = 2C$.

До соединения на конденсаторах были заряды $q_1 = CU_1$, $q_2 = CU_2$. После соединения суммарный заряд $q = q_1 + q_2 = C(U_1 + U_2)$. Следовательно, между обкладками напряжение

$$U = \frac{q}{C_1} = \frac{U_1 + U_2}{2}, \ U = 150 \text{ В}.$$

508. Два конденсатора C1 и C2 емкостями $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 3$ мкФ имеют электрические заряды $q_1 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл и $q_2 = 9 \cdot 10^{-6}$ Кл. Разноименно заряженные обкладки конденсаторов соединили попарно (рис. 158). Определить заряд каждого конденсатора после соединения.



Р и с. 158

Р е ш е н и е. После соединения разноименных обкладок конденсаторов общий заряд $q = q_2 - q_1$.

Общая емкость двух параллельно соединенных конденсаторов $C = C_1 + C_2$, а напряжение на каждом конденсаторе $U = \frac{q}{C} = \frac{q_2 - q_1}{C_1 + C_2}$. Учитывая это, находим заряды каждого конденсатора после соединения:

$$q_1' = C_1 U = \frac{C_1(q_2 - q_1)}{C_1 + C_2}, \ q_2' = C_2 U = \frac{C_2(q_2 - q_1)}{C_1 + C_2},$$

$$q_1' = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}, \ q_2' = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

509. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику электрического тока с постоянной ЭДС. Внутрь одного из них вносят диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon = 4$. Диэлектрик заполняет все пространство между обкладками. Как и во сколько раз изменится напряженность электростатического поля в этом конденсаторе?

Р е ш е н и е. Пусть U – напряжение, поддерживаемое источником тока на батарее, состоящей из двух последовательно соединенных конденсаторов емкостью C каждый. Тогда напряжение на каждом из них равно $U/2$, а напряженность поля в конденсаторе

$$E_1 = U/(2d), \quad (1)$$

где d – расстояние между пластинами конденсатора.

После внесения диэлектрика в один из конденсаторов емкость его увеличится в ε раз, и напряжения на конденсаторах будут равны соответственно:

$$U_1 = \frac{q}{C}, \ U_2 = \frac{q}{\varepsilon C} = \frac{U_1}{\varepsilon},$$

где q – заряд на конденсаторах.

Источник включен, поэтому

$$U = U_1 + U_2. \tag{2}$$

Подставив значения U_1 и U_2 в формулу (2), получим $U_2 = U/(\varepsilon + 1)$. Следовательно, теперь напряженность поля в конденсаторе с диэлектриком

$$E_2 = \frac{U_2}{d} = \frac{U}{(\varepsilon + 1)d}. \tag{3}$$

Разделив почленно равенство (3) на (1), получим:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2}{\varepsilon + 1}, \ \frac{E_2}{E_1} = 0{,}4.$$

510. Плоский воздушный конденсатор емкостью C = = 3,0 мкФ соединен с источником постоянного напряжения U = 20 В (рис. 159). Какую механическую работу надо совершить, чтобы расстояние между обкладками конденсатора увеличить в n = 3,0 раза? Какую работу совершает при этом источник? Рассмотреть два случая: 1) перед раздвиганием обкладок конденсатор отсоединяют от источника, т. е. ключ К разомкнут; 2) ключ К все время замкнут.

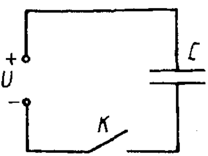


Рис. 159

Р е ш е н и е. Рассмотрим сначала первый случай. Заряженный конденсатор отсоединен от источника, поэтому заряд q конденсатора остается постоянным. До раздвигания обкладок энергия конденсатора

$$W_1 = \frac{q^2}{2C}.$$

После раздвигания обкладок емкость конденсатора уменьшилась в n раз (это следует из формулы емкости плоского конденсатора $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$). Следовательно, энергия конденсатора при этом увеличилась в n раз:

$$W_2 = \frac{nq^2}{2C}.$$

Механическая работа равна изменению энергии конденсатора:

$$A_{\text{мех}} = \Delta W = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{2C}(n-1).$$

Учитывая, что $q = CU$, получаем:

$$A_{\text{мех}} = \frac{CU^2}{2}(n-1), \; A_{\text{мех}} = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Работа источника напряжения $A_{\text{ист}} = 0$, так как он отключен.

Во втором случае ключ К замкнут, поэтому постоянным остается напряжение U на конденсаторе. Энергия конденсатора до раздвигания обкладок

$$W_1 = \frac{CU^2}{2}.$$

Так как после раздвигания обкладок емкость конденсатора уменьшилась в n раз, то и энергия конденсатора уменьшилась во столько же раз и стала равной

$$W_2 = \frac{CU^2}{2n}.$$

При этом уменьшается также и заряд конденсатора (это следует из формулы $q = CU$). Через источник в обратном направлении проходит заряд

$$\Delta q = q_2 - q_1 = \frac{C}{n}U - CU = -CU\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Если источником напряжения является конденсатор, то он заряжается. Источник совершает при этом работу

$$A_{\text{ист}} = U\Delta q = -CU^2\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{1}$$

Изменение энергии конденсатора

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{CU^2}{2n} - \frac{CU^2}{2} = -\frac{CU^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Это изменение равно сумме механической работы и работы источника, т. е. $\Delta W = A_{\text{мех}} + A_{\text{ист}}$. Отсюда следует, что

$$A_{\text{мех}} = \Delta W - A_{\text{ист}} = -\frac{CU^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + CU^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

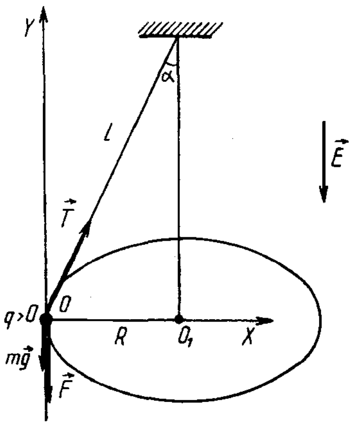
$$= CU^2\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{2}$$

В результате вычислений по формулам (1) и (2) получим:

$$A_{\text{ист}} = -8{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж},\ A_{\text{мех}} = 4{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж}.$$

511. В однородном электростатическом поле, вектор напряженности $\vec{E}$ которого направлен вертикально вниз, равномерно вращается шарик массой m с положительным зарядом q, подвешенный на нити длиной l. Угол отклонения нити от вертикали равен α. Найти силу натяжения нити и кинетическую энергию шарика.

Р е ш е н и е. Координатную ось OX направим горизонтально к центру O_1 окружности, а ось OY – вертикально вверх (рис. 160). На шарик действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила со стороны электростатического поля $\vec{F} = q\vec{E}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. По второму закону Ньютона



Р и с. 160

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{T} = m\vec{a},$$

где $\vec{a}$ – центростремительное ускорение шарика. Модуль этого ускорения $a = v^2/R$, где v – линейная скорость шарика, а R – радиус окружности.

Спроектировав силы и ускорение на ось OX, получим

$$T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}. \qquad (1)$$

Вдоль оси OY шарик не движется, поэтому сумма проекций сил на эту ось равна нулю: $T\cos\alpha - mg - qE = 0$. Отсюда сила натяжения

$$T = \frac{mg + qE}{\cos\alpha}.$$

Из рисунка видно, что $R = l\sin\alpha$. Подставив это значение и значение T в уравнение (1), получим

$$\frac{(mg + qE)l\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{mv^2}{l\sin\alpha}.$$

Отсюда найдем кинетическую энергию шарика:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mg + qE)l\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}.$$

512. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v_0 = 1{,}0 \cdot 10^7$ м/с. Напряженность поля в конденсаторе $E = 100$ В/см, длина конденсатора $l = 5{,}0$ см. Найти модуль и направление скорости электрона в момент вылета его из конденсатора. На сколько отклонится электрон от первоначального направления?

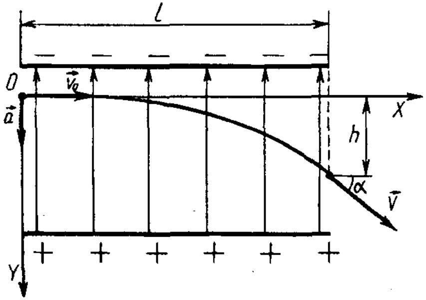


Рис. 161

Решение. Совместим начало координат с точкой, в которой находился электрон в момент влета в конденсатор, ось OX направим горизонтально, ось OY – вертикально вниз (рис. 161). В этой системе координат движение электрона можно представить как результат сложения двух прямолинейных движений: равномерного движения со скоростью $\vec{v}_0$ в горизонтальном направлении и равноускоренного движения с некоторым ускорением $\vec{a}$ вдоль оси OY. Наличие ускорения вдоль оси OY объясняется тем, что на электрон в этом направлении действует электрическая сила $\vec{F} = e\vec{E}$, где e – заряд электрона: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. (Силой тяжести, действующей на электрон, пренебрегаем по сравнению с силой $\vec{F}$.)

Проекцию ускорения $\vec{a}$ на ось OY найдем по второму закону Ньютона:

$$eE = m_e a_y,\ a_y = eE/m_e,$$

где m_e – масса электрона: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Выпишем начальные условия: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $v_{0y} = 0$. Значения проекций ускорения на оси координат: $a_x = 0$, $a_y = eE/m_e$. Тогда уравнения, определяющие зависимость координат x, y и проекций скорости v_x и v_y от времени, будут иметь вид:

$$x = v_0 t,\ y = eEt^2/(2m_e), \tag{1}$$

$$v_x = v_0,\ v_y = eEt/m_e. \tag{2}$$

В момент вылета электрона из конденсатора $x = l$, $y = h$, $t = t_1$. На основании уравнений (1) и (2) получим:

$$t_1 = \frac{l}{v_0},\ v_y = \frac{eEl}{m_e v_0},\ h = \frac{eEl^2}{2m_e v_0^2},\ h = 2{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Модуль вектора скорости $\vec{v}$ электрона в момент вылета

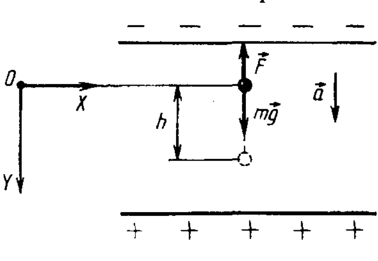
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eEl}{m_e v_0}\right)^2},\ v = 1{,}3 \cdot 10^7\ \text{м/с}.$$

Направление вектора скорости определяется углом α. Как видно из рисунка,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{eEl}{m_e v_0^2},\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{eEl}{m_e v_0^2},\ \alpha = 42°.$$

513. Между пластинами плоского воздушного горизонтально расположенного конденсатора находится заряженная капля масла массой $m = 3 \cdot 10^{-8}$ г. Заряд капли $q = 3 \cdot 10^{-15}$ Кл. При разности потенциалов между пластинами $U = 500$ В и начальной скорости $v_0 = 0$ капля проходит некоторое расстояние в 2 раза медленнее, чем при отсутствии электростатического поля. Найти расстояние между пластинами. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. При наличии электростатического поля на каплю действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F} = q\vec{E}$ со стороны электростатического поля (рис. 162). Под действием этих сил капля движется с ускорением $\vec{a}$, направленным вертикально вниз. По второму закону Ньютона



Р и с. 162

$$m\vec{g} + q\vec{E} = m\vec{a}.$$

В проекциях на ось OY уравнение примет вид

$$mg - qE = ma_y,$$

где a_y – проекция ускорения на ось OY. Отсюда

$$a_y = (mg - qE)/m.$$

Поскольку модуль напряженности электростатического поля $E = U/d$, где d – расстояние между пластинами конденсатора, то

$$a_y = \frac{mg - q(U/d)}{m}. \qquad (1)$$

Кинематическое уравнение движения капли имеет вид

$$y = a_y t^2/2.$$

Если капля проходит некоторое расстояние $y = h$ за время $t = t_1$, то

$$h = a_y t_1^2/2. \qquad (2)$$

При отсутствии поля капля будет свободно падать с ускорением $\vec{g}$, и поэтому, рассуждая аналогично, получаем

$$h = g t_2^2/2, \qquad (3)$$

где t_2 – время, за которое капля пройдет расстояние h.

Из соотношений (2) и (3) находим

$$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 = \frac{g}{a_y},$$

а так как $t_1/t_2 = 2$, то $4a_y = g$, или с учетом формулы (1)

$$4\frac{mg - q(U/d)}{m} = g.$$

Решив это уравнение относительно d, получим:

$$d = \frac{4qU}{3mg},\ d = 7 \cdot 10^{-3}\,\text{м}.$$

514. В однородном электростатическом поле, вектор напряженности которого направлен вертикально вниз и

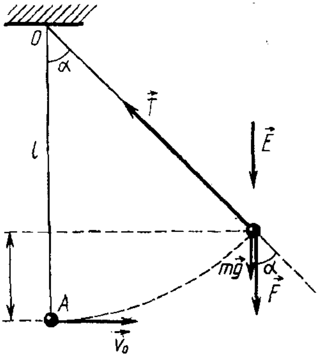


Рис. 163

по модулю равен 10 кВ/м, находится заряженный шарик A, подвешенный к точке O на тонкой изолирующей нити длиной l = 1 м (рис. 163). Заряд шарика $q = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл, масса m = 10 г. Шарику сообщили начальную скорость v_0 = 1 м/с, направленную перпендикулярно вектору напряженности $\vec{E}$. Найти силу натяжения нити в момент достижения шариком крайнего положения.

Решение. После сообщения скорости v_0 шарик движется по окружности, радиус которой равен длине нити l. Согласно второму закону Ньютона, сумма проекций всех действующих на шарик сил на координатную ось, направленную от шарика к центру окружности O, равна произведению массы шарика и его центростремительного ускорения $a = v^2/R = v^2/l$. Но в крайнем положении скорость шарика $v = 0$, поэтому и сумма проекций сил равна нулю.

На шарик действуют три силы: сила натяжения нити $\vec{T}$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила со стороны электростатического поля $\vec{F} = q\vec{E}$. Учитывая изложенное выше, составим уравнение:

$$T - (mg + qE)\cos\alpha = 0.$$

Отсюда

$$T = \frac{mg + qE}{\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Чтобы найти $\cos\alpha$, составим уравнение на основании закона сохранения энергии, принимая за нулевой уровень потенциальной энергии уровень начального положения шарика:

$$mv_0^2/2 = (mg + qE)h.$$

Как видно из рис. 163,

$$h = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha),$$

поэтому

$$mv_0^2/2 = (mg + qE)l(1 - \cos\alpha).$$

Отсюда

$$\cos\alpha = 1 - \frac{mv_0^2}{2(mg + qE)l}.$$

Подставив это значение в формулу (1), получим:

$$T = mg + qE - \frac{mv_0^2}{2l},\ T = 0{,}1\ \text{Н}.$$

515. В пространство, где одновременно действуют горизонтальное и вертикальное однородные электростатические поля, напряженности которых $E_г = 4 \cdot 10^2$ В/м и $E_в = 3 \cdot 10^2$ В/м, вдоль направления результирующего поля влетает электрон, скорость которого после прохождения пути $l = 2{,}7$ мм уменьшается в 2 раза. Определить скорость электрона в конце пути. Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{19}$ Кл.

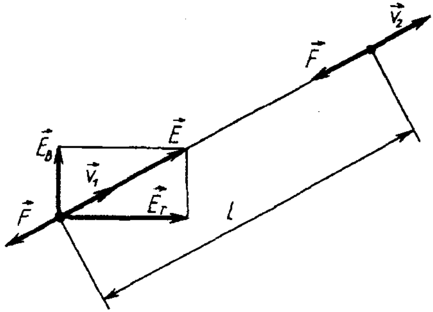
Р е ш е н и е. Согласно принципу суперпозиции, вектор напряженности результирующего электростатического поля является векторной суммой напряженностей двух полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_г + \vec{E}_в.$$

Этот вектор есть диагональ прямоугольника, построенного на векторах $\vec{E}_г$ и $\vec{E}_в$ (рис. 164), следовательно, модуль его $E = \sqrt{E_г^2 + E_в^2}$.

На электрон, влетевший вдоль силовой линии результирующего поля, действует направленная противоположно вектору $\vec{E}$ сила $\vec{F}$, модуль которой

$$F = eE = e\sqrt{E_г^2 + E_в^2}. \qquad (1)$$



Р и с. 164

Изменение кинетической энергии электрона равно работе действующей на него внешней силы $\vec{F}$ (силой тяжести пренебрегаем):

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -Fl.$$

Подставив в эту формулу вместо F ее значение (1), а также $v_1 = 2v_2$, получим

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{m(2v_2)^2}{2} = -el\sqrt{E_\text{г}^2 + E_\text{в}^2}.$$

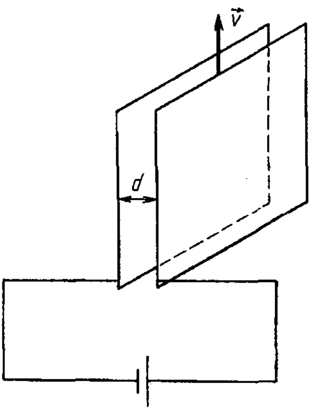
Отсюда

$$v_2 = \sqrt{\frac{2el}{3m}\sqrt{E_\text{г}^2 + E_\text{в}^2}},\ v_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

516. Пластины плоского конденсатора присоединены к источнику постоянного напряжения $U = 700$ В. Найти силу тока, который будет проходить по проводам при сдвигании одной пластины вдоль другой (рис. 165) со скоростью $v = 7$ м/с. Пластины конденсатора квадратные площадью $S = 400$ см^2. Расстояние между пластинами $d = 0{,}2$ см во время движения остается постоянным. Между пластинами находится воздух ($\varepsilon = 1$).

Р е ш е н и е. При движении пластины изменяется емкость конденсатора, а поскольку напряжение при этом поддерживается постоянным, то заряд конденсатора изменяется на некоторую величину Δq за время Δt. Вследствие этого по проводам будет проходить ток силой

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \qquad (1)$$



Р и с. 165

В начальный момент времени емкость конденсатора $C_1 = \varepsilon_0 S/d$. Спустя промежуток времени Δt после начала движения площадь пластин, по которой они перекрывают друг друга, будет $S - vl\Delta t$, где l – ширина пластины, а емкость

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0(S - vl\Delta t)}{d}.$$

При этом заряд конденсатора уменьшится на

$$\Delta q = C_1U - C_2U = U(C_1 - C_2).$$

Подставив в это выражение значения C_1 и C_2, получим

$$\Delta q = \frac{\varepsilon_0 U v l \Delta t}{d}.$$

Теперь по формуле (1), учитывая, что $l = \sqrt{S}$, найдем силу тока:

$$I = \frac{\varepsilon_0 U v \sqrt{S}}{d}, \quad I = 2 \cdot 10^{-9}\ \text{А}.$$

517. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком. При некоторой разности потенциалов между пластинами энергия конденсатора $W = 2 \cdot 10^{-5}$ Дж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик из конденсатора вынули. При этом против сил электростатического поля надо было совершить работу $A = 7 \cdot 10^{-5}$ Дж. Найти диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

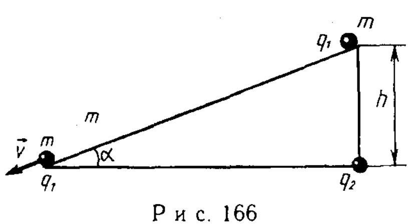
Р е ш е н и е. Пусть q — заряд конденсатора, C — его емкость при наличии диэлектрика между пластинами. Тогда энергия заряженного конденсатора $W = q^2/(2C)$.

После того как вынули диэлектрик, емкость конденсатора уменьшилась в ε раз: $C_1 = C/\varepsilon$, заряд остался прежним, а энергия приняла значение

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1} = \frac{\varepsilon q^2}{2C} = \varepsilon W.$$

Изменение энергии равно работе внешних сил: $W_1 - W = A$, или $\varepsilon W - W = A$. Отсюда $\varepsilon = 1 + A/W$, $\varepsilon = 5$.

518. Маленький шарик массой m, имеющий заряд q_1, скользит с высоты h по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α (рис. 166). В вершине прямого угла, образованного высотой h и горизонтом, находится неподвижный точечный заряд q_2. Определить скорость шарика



Р и с. 166

у основания наклонной плоскости, если начальная скорость шарика равна нулю. Трением пренебречь.

Р е ш е н и е. На основании закона сохранения и превращения энергии составим уравнение:

$$W_{k1} + W_{p1} = W_{k2} + W_{p2}, \qquad (1)$$

где W_{k1}, W_{p1} –кинетическая и потенциальная энергия шарика, находящегося на высоте h на наклонной плоскости; W_{k2}, W_{p2} – кинетическая и потенциальная энергия шарика у основания наклонной плоскости.

Нулевой уровень потенциальной энергии совместим с основанием наклонной плоскости. Тогда

$$W_{p1} = mgh + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon h}, \ W_{k1} = 0.$$

Второе слагаемое в выражении для W_{p1} представляет собой потенциальную энергию, обусловленную взаимным расположением зарядов q_1 и q_2. Пусть v – скорость шарика у основания наклонной плоскости. Тогда

$$W_{k2} = mv^2/2.$$

В это время расстояние между зарядами, как видно из рисунка, равно $h/\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому

$$W_{p2} = \frac{q_1 q_2 \operatorname{tg}\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon h}.$$

С учетом этих значений энергии уравнение (1) примет вид

$$mgh + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon h} = \frac{mv^2}{2} + \frac{q_1 q_2 \operatorname{tg}\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon h}.$$

Отсюда найдем скорость:

$$v = \sqrt{2gh + \frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon m h}(1 - \operatorname{tg}\alpha)}.$$

Предлагаем читателю самостоятельно определить, на какое расстояние смог бы приблизиться к заряду q_2 шарик, если бы он свободно падал с высоты h. Заряды одноименные, заряд q_2 укреплен неподвижно.

519. Карманный дозиметр радиоактивного облучения представляет собой воздушный конденсатор, заряженный до определенной разности потенциалов. Под влиянием облучения газ ионизируется, и ионы, перемещаясь к пластинам конденсатора, понижают разность потенциалов. При облучении в 1 рентген в каждом кубическом сантиметре воздуха при нормальных условиях образуется $n_0 = 2 \cdot 10^9$ пар ионов. Сколько рентген покажет дозиметр, если при емкости конденсатора $C = 3 \cdot 10^{-12}$ Ф разность потенциалов снизилась с $U_1 = 180$ В до $U_2 = 160$ В? Вместимость камеры $V = 1{,}8$ см^3. Полученный результат выразить в единицах СИ.

Р е ш е н и е. Вследствие ионизации воздуха заряд конденсатора уменьшился на величину

$$q = q_1 - q_2 = CU_1 - CU_2 = C(U_1 - U_2).$$

С другой стороны, при дозе 1 рентген общий заряд ионов одного знака, образуемых излучением в объеме V, $q_0 = en_0V$, где e – заряд электрона. Следовательно, доза излучения

$$X = \frac{q}{q_0} = \frac{C(U_1 - U_2)}{en_0V},\ X = 0{,}1 \text{ Р}.$$

Рентген (Р) – внесистемная единица экспозиционной дозы рентгеновского и гамма-излучения. В СИ единицей этой дозы является кулон на килограмм (Кл/кг): 1 Р = $= 2{,}58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг. Выразим X в единицах СИ:

$$X = 0{,}1 \cdot 2{,}58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/кг}.$$

520. В однородное электростатическое поле, напряженность которого $E = 100$ В/см, поместили систему из двух одинаковых и противоположно заряженных шариков, соединенных тонким изолирующим стержнем длиной $l = 5$ см (рис. 167). Масса каждого шарика $m = 5$ г. Модуль заряда каждого шарика $q = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл. На какой угол повернется эта система, если шарикам сообщить начальные скорости, равные $v_0 = 0{,}1$ м/с и направленные перпендикулярно линиям напряженности поля? Силой тяжести пренебречь.

Р е ш е н и е. Силы электростатического поля при повороте системы оказывают тормозящее действие. Работа этих сил равна изменению кинетической энергии шариков:

$$\Delta W_k = A, \qquad (1)$$

где $\Delta W_k = W_{k2} - W_{k1}$. Конечное значение кинетической энергии шариков (в момент остановки) $W_{k2} = 0$, начальное $W_{k1} = 2 \cdot \frac{mv_0^2}{2} = mv_0^2$. Следовательно,

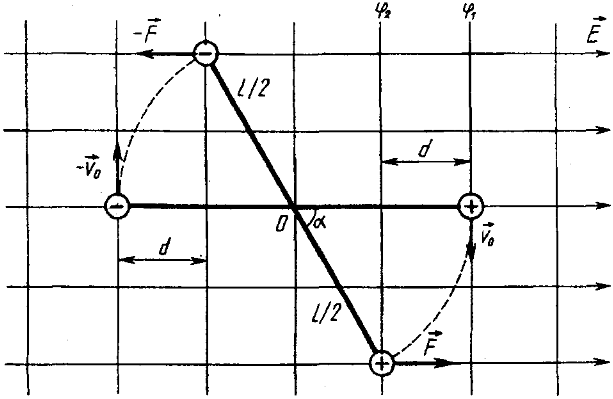


Рис. 167

$$\Delta W_k = -mv_0^2. \tag{2}$$

Совершаемая полем работа $A = A_1 + A_2$, где A_1 и A_2 – работа при перемещении положительного и отрицательного зарядов соответственно. На рис. 167 вертикальными линиями показаны эквипотенциальные поверхности. При перемещении положительного заряда q поле совершает работу $A_1 = -qEd$, где d – расстояние между двумя эквипотенциальными поверхностями. Из рисунка видно, что

$$d = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{l}{2}(1-\cos\alpha).$$

Тогда

$$A_1 = -\frac{1}{2}qEl(1-\cos\alpha).$$

Такую же работу совершает поле и над отрицательным зарядом q, т. е. $A_2 = A_1$. Следовательно,

$$A = 2A_1 = -qEl(1-\cos\alpha). \tag{3}$$

Подставив значения (2) и (3) в выражение (1), получим

$$mv_0^2 = qEl(1-\cos\alpha),$$

откуда $\cos\alpha = 1 - \frac{mv_0^2}{qEl}$. Следовательно,

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{mv_0^2}{qEl}\right), \ \alpha = 60°.$$