IV. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

11. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Методические указания к решению задач

Если в задаче дана формула, описывающая зависимость координаты колеблющегося тела от времени, то величины, характеризующие колебания (амплитуда, частота, фаза, начальная фаза, период), могут быть найдены путем сопоставления данной формулы и ее общего вида. Следует обратить внимание на то, что эту формулу можно записать как в виде $x = x_m \cos(\omega t + \varphi_{02})$, так и в виде $x = x_m \sin(\omega t + \varphi_{01})$, в зависимости от выбора начальной фазы.

В задачах о математическом маятнике необходимо учитывать, что если маятник находится в неинерциальной системе отсчета, т. е. в системе отсчета, которая движется относительно инерциальной системы с некоторым ускорением $\vec{a}$, то период колебаний его

$$T = 2\pi\sqrt{l/g_{\text{н}}},$$

где $g_{\text{н}}$ – ускорение свободного падения в неинерциальной системе отсчета. Это ускорение можно найти из векторного уравнения $\vec{g}_{\text{н}} = \vec{g} + (-\vec{a})$, где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения в инерциальной системе отсчета.

Например, при нахождении периода колебаний маятника, точка подвеса которого движется с ускорением $\vec{a}$, направленным горизонтально, надо учитывать, что в этом случае $g_{\text{н}} = \sqrt{g^2 + a^2}$. Такой результат получится, если геометрически найти вектор $\vec{g}_{\text{н}}$ в соответствии с приведенным выше векторным уравнением, а затем его модуль $g_{\text{н}}$.

Основные законы и формулы

Координата (смещение от положения равновесия) x гармонически колеблющегося тела (материальной точки) в момент времени t определяется формулой

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где x_m – амплитуда колебаний (модуль наибольшего смещения тела от положения равновесия); ω – круговая (циклическая, угловая) частота; $\omega t + \varphi_0 = \varphi$ – фаза колебаний в момент времени t; φ_0 – начальная фаза колебаний. Эта формула может быть записана также и с помощью синуса:

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi_1),$$

где $\varphi_1 = \varphi_0 + \pi/2$.

Обе формулы равнозначны и различаются только начальными фазами на величину $\pi/2$.

Период колебаний – это минимальный промежуток времени T, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих периодический колебательный процесс.

Частота колебаний, т. е. число колебаний, совершаемых за единицу времени,

$$\nu = 1/T,$$

где T – период.

Круговая (циклическая, угловая) частота колебаний

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T,$$

где ν – частота колебаний; T – период.

Проекция скорости тела, совершающего гармонические колебания,

$$v_x = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Проекция ускорения тела, совершающего гармонические колебания,

$$a_x = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x.$$

Проекция силы, под действием которой тело совершает гармонические колебания,

$$F_x = -kx,$$

где $k = m\omega^2$; m – масса тела; ω – круговая частота.

Полная механическая энергия колеблющегося тела

$$E = E_k + E_p = kx_m^2/2,$$

где E_k, E_p – соответственно кинетическая и потенциальная энергия.

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{m/k},$$

где m – масса груза, прикрепленного к пружине; k – жесткость (коэффициент упругости) пружины.

Связь между длиной волны λ, скоростью волны v и периодом T (или частотой ν) выражается формулой

$$v = \lambda/T = \lambda\nu.$$

Примеры решения задач

731. Материальная точка совершает гармонические колебания, при которых координата $x = 50\cos 100\pi t$ (длина выражена в миллиметрах, время – в секундах). Определить амплитуду, частоту и период колебаний. Найти смещение x_1 для фазы $\varphi_1 = 2\pi/9$.

Решение. Зависимость координаты гармонически колеблющейся точки от времени описывается уравнением

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Сопоставляя с ним заданное уравнение, находим, что амплитуда $x_m = 50$ мм, начальная фаза $\varphi_0 = 0$, фаза $100\pi t = \omega t$. Подставив в последнее равенство значение $\omega = 2\pi/T$, где T – период, получим $T = 0{,}02$ с. Тогда частота $\nu = 1/T$, $\nu = 50$ Гц.

Подставив в заданное уравнение значение фазы $\varphi_1 = 2\pi/9$, найдем для нее смещение:

$$x_1 = 50\cos\frac{2\pi}{9}, \; x_1 = 40 \text{ мм}.$$

732. Тело массой $m = 0{,}5$ г колеблется по закону $x = 10\cos 200\pi t$, где t выражено в секундах, x – в миллиметрах. Найти максимальное значение возвращающей силы.

Решение. При гармонических колебаниях ускорение колеблющейся точки изменяется по закону

$$a_x = -\omega^2 x = -\omega^2 x_m \cos\omega t,$$

если начальная фаза равна нулю. Проекция возвращающей силы

$$F_x = ma_x = -m\omega^2 x_m \cos\omega t.$$

Отсюда видно, что максимальное значение проекции возвращающей силы

$$F_{xm} = -m\omega^2 x_m. \quad (1)$$

Из заданного уравнения $x = 10\cos 200\pi t$, сопоставив его с уравнением $x = x_m \cos\omega t$, находим: $200\pi t = \omega t$, $\omega = 200\pi$, $x_m = 10$ мм $= 10 \cdot 10^{-3}$ м. Подставив значения x_m, m и ω в выражение (1), получим $F_{xm} = -2$ Н. Минус указывает на то, что направление силы противоположно направлению смещения. Максимальное значение возвращающей силы $F_m = 2$ Н.

733. К динамометру подвесили груз, вывели его из состояния равновесия и отпустили. При этом возникли колебания, частота которых $\nu = 2$ Гц. На каком расстоянии от нулевого положения остановится указатель динамометра после прекращения колебаний? Массу пружины не учитывать.

Р е ш е н и е. После прекращения колебаний груз будет находиться в состоянии равновесия. На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости $\vec{F}$, которые равны по модулю: $F = mg$. По закону Гука $F = k\Delta l$, где k – жесткость пружины; Δl – ее удлинение. Поэтому $k\Delta l = mg$, откуда

$$\Delta l = mg/k. \quad (1)$$

Из формулы периода колебаний пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ найдем жесткость:

$$k = 4\pi^2 m/T^2.$$

Так как частота $\nu = 1/T$, то $k = 4\pi^2 m\nu^2$. Подставив это значение в выражение (1), найдем:

$$\Delta l = \frac{g}{4\pi^2\nu^2}, \ \Delta l = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

734. Определить частоту звуковых колебаний в стали, если расстояние между ближайшими различающимися по фазе на $\Delta\varphi = 90°$ точками звуковой волны $l = 1{,}54$ м. Скорость звуковых волн в стали $v = 5000$ м/с.

Р е ш е н и е. Частота звуковых колебаний

$$\nu = v/\lambda, \qquad (1)$$

где v – скорость распространения волн; λ – длина волны.

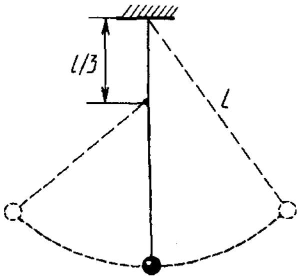
Две точки волны, расстояние между которыми l, различаются по фазе на $\Delta\varphi = 2\pi l/\lambda$. Отсюда

$$\lambda = \frac{2\pi l}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi l}{\pi/2} = 4l.$$

Подставив это значение в выражение (1), получим:

$$\nu = v/(4l), \quad \nu = 812 \text{ Гц}.$$

735. Математический маятник длиной l совершает колебания вблизи вертикальной стенки. Под точкой подвеса маятника на расстоянии $l/3$ от нее в стенку забит гвоздь (рис. 241). Найти период колебаний маятника.



Р и с. 241

Р е ш е н и е. Период колебаний маятника

$$T = t_1 + t_2, \qquad (1)$$

где t_1, t_2 – время движения маятника соответственно справа и слева от вертикали. Время t_1 равно половине периода колебаний маятника длиной l:

$$t_1 = \frac{T_1}{2} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Время t_2 равно половине периода колебаний маятника длиной $2l/3$:

$$t_2 = \frac{T_2}{2} = \pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

Подставив значения t_1 и t_2 в выражение (1), получим

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

736. В кабине лифта находится математический маятник. Когда кабина неподвижна, период его колебаний $T_0 = 1$ с. В движущейся с постоянным ускорением кабине период $T = 1{,}2$ с. Определить модуль и направление ускорения кабины.

Р е ш е н и е. В неподвижной кабине период колебаний маятника

$$T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}, \qquad (1)$$

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

В ускоренно движущейся кабине период

$$T = 2\pi\sqrt{l/g_н}, \qquad (2)$$

где $g_н$ – ускорение свободного падения в кабине.

Кабина, движущаяся с ускорением $\vec{a}$, представляет собой неинерциальную систему отсчета. Можно доказать, что $\vec{g}_н = \vec{g} + (-\vec{a})$. В частности (см. решение задачи 97), когда лифт поднимается с ускорением $\vec{a}$, направленным вверх, ускорение свободного падения в лифте равно по модулю $g + a$. Если же ускорение $\vec{a}$ направлено вниз, то в лифте тела свободно падают с ускорением $g - a$. Направление скорости лифта при этом не играет роли.

Согласно условию, $T > T_0$. Поэтому на основании формул (1) и (2) приходим к выводу, что $g_н < g$. Следовательно, ускорение лифта $\vec{a}$ направлено вниз, при этом $g_н = g - a$.

Возведя в квадрат левые и правые части равенств (1) и (2) и разделив их почленно, получим

$$\frac{T_0^2}{T^2} = \frac{g - a}{g},$$

откуда модуль ускорения лифта

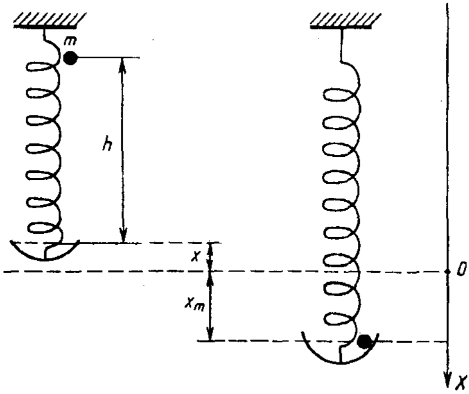
$$a = g(1 - T_0^2/T^2), \ a = 3 \text{ м/с}^2.$$

737. На чашку, подвешенную на пружине жесткостью k (рис. 242), с высоты h падает груз массой m и остается на чашке (удар абсолютно неупругий). Определить амплитуду колебаний. Массой чашки и пружины пренебречь.

Р е ш е н и е. В результате абсолютно неупругого удара чашка с грузом будет иметь скорость $\vec{u}$, модуль которой найдем из уравнения, составленного в проекциях на ось OX согласно закону сохранения импульса:

$$mv = (m + m_1)u, \qquad (1)$$

где m_1 – масса чашки, v – скорость груза в момент падения, ее мы найдем из закона сохранения энергии:



Р и с. 242

$mgh = mv^2/2$, откуда $v = \sqrt{2gh}$. Подставляя это значение скорости в уравнение (1) и учитывая, что $m_1 = 0$, получаем $u = \sqrt{2gh}$.

Кинетическая энергия чашки переходит в потенциальную энергию растянутой пружины. Система будет совершать гармонические колебания относительно некоторого положения равновесия. Относительно этого положения пружина в момент удара обладала потенциальной энергией

$$E_{p1} = kx^2/2,$$

где x – смещение, которое найдем из условия, что в положении равновесия $mg = kx$. Отсюда $x = mg/k$. Следовательно,

$$E_{p1} = m^2g^2/(2k). \tag{2}$$

Кинетическая энергия системы сразу после удара

$$E_{k1} = mu^2/2 = mgh. \tag{3}$$

Максимальная потенциальная энергия пружины

$$E_{pm} = kx_m^2/2, \tag{4}$$

где x_m – амплитуда колебаний.

Согласно закону сохранения энергии, составим уравнение:

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{pm}$$

или, учитывая значения (2)–(4),

$$mgh + \frac{m^2g^2}{2k} = \frac{kx_m^2}{2}.$$

Отсюда найдем амплитуду колебаний:

$$x_m = \frac{1}{k}\sqrt{(mg)^2 + 2mghk}.$$

738. Капли воды падают через одинаковые промежутки времени с некоторой высоты на пластину, закрепленную на пружине. Частота собственных колебаний пластины равна ω_0. Известно, что амплитуда колебаний пластины при этом оказывается максимальной. Найти расстояние между отрывающейся каплей и ближайшей к ней падающей каплей. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Расстояние между отрывающейся каплей и ближайшей к ней падающей каплей

$$h = g\tau^2/2, \qquad (1)$$

где τ – промежуток времени, через который падают капли.

Под действием падающих капель пластина совершает вынужденные колебания. Так как амплитуда их максимальна, это означает, что возник резонанс. При резонансе частота внешней силы (в данном случае частота падения капель) совпадает с частотой собственных колебаний системы: $\omega = \omega_0$. Отсюда следует, что промежуток времени τ равен периоду собственных колебаний пластины: $\tau = T_0 = 2\pi/\omega_0$. Подставив это значение в формулу (1), получим

$$h = 2\pi^2 g/\omega_0^2.$$

739. При какой скорости поезда рессоры вагонов будут особенно сильно колебаться под действием толчков колес на стыках рельсов? Длина рельса l, на рессору действует сила F_1, рессора прогибается на h при силе F_2.

Решение. Рессоры будут особенно сильно колебаться при возникновении резонанса; при этом период собственных колебаний рессор равен периоду внешней силы, т. е. промежутку времени между двумя соседними толчками:

$$T_0 = \tau. \qquad (1)$$

При скорости поезда v толчки повторяются через промежуток времени, за который поезд проходит путь, равный длине рельса:

$$\tau = l/v. \qquad (2)$$

Период собственных колебаний рессоры

$$T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}, \qquad (3)$$

где k – жесткость рессоры; m – масса груза, действующего на рессору с силой F_1. Так как $F_1 = mg$, то $m = F_1/g$. Жесткость $k = F_2/h$.

Подставив значения m и k в формулу (3), получим

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{F_1 h}{F_2 g}}. \qquad (4)$$

На основании условия (1) и выражений (2) и (4) имеем

$$2\pi\sqrt{\frac{F_1 h}{F_2 g}} = \frac{l}{v},$$

откуда

$$v = \frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{F_2 g}{F_1 h}}.$$

740. Маятниковые часы, точно идущие на уровне моря, подняты на высоту $h = 1000$ м. На сколько отстанут они за время $t_0 = 1$ сут $= 86\,400$ с? Радиус Земли $R = 6370 \cdot 10^3$ м. Маятник считать математическим.

Решение. Пусть t – показание часов на высоте h по истечении суток. Тогда отставание часов

$$\Delta t = t_0 - t, \qquad (1)$$

где t_0 – показание часов на уровне моря.

Показание часов пропорционально числу колебаний маятника:

$$t/t_0 = N/N_0, \qquad (2)$$

где N_0, N – число колебаний маятника за сутки соответственно на уровне моря и на высоте h.

С увеличением высоты уменьшается ускорение свободного падения, поэтому период колебаний маятника увеличивается, а следовательно, за сутки на высоте h маятник совершит меньше колебаний, чем за то же время на уровне моря ($N < N_0$), поэтому часы отстанут. Они покажут время

$$t = t_0 \frac{N}{N_0}, \qquad (3)$$

как это следует из выражения (2).

На уровне моря период колебаний маятника

$$T_0 = 2\pi\sqrt{l/g_0},$$

на высоте h

$$T = 2\pi\sqrt{l/g_h},$$

где g_0, g_h – ускорение свободного падения соответственно на уровне моря и на высоте h. Поэтому $N_0 = t_0/T_0$, $N = t_0/T$. Следовательно,

$$\frac{N}{N_0} = \frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g_h}{g_0}}. \qquad (4)$$

Но

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}, \quad g_h = G\frac{M}{(R+h)^2},$$

где G – гравитационная постоянная; M – масса Земли; R – радиус Земли. Поэтому

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2}.$$

Подставив значение этого отношения в формулу (4), получим

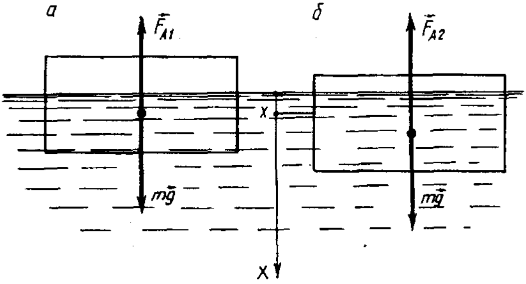
$$\frac{N}{N_0} = \frac{R}{R+h}. \qquad (5)$$

Теперь на основании формул (1), (3) и (5) найдем отставание часов за сутки:

$$\Delta t = \left(1 - \frac{N}{N_0}\right)t_0 = \left(1 - \frac{R}{R+h}\right)t_0 = \frac{h}{R+h}t_0, \quad \Delta t = 14 \text{ с}.$$

741. Деревянный брусок массой $m = 3{,}2$ кг с площадью основания $S = 400$ см^2 плавает в воде. Брусок слегка погрузили в воду глубже и отпустили. Найти частоту колебаний бруска. Силой трения пренебречь. Плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3.

Р е ш е н и е. При равновесии на брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и архимедова сила $\vec{F}_{A1}$ (рис. 243, *а*) и выполняется условие $m\vec{g} + \vec{F}_{A1} = \vec{0}$.



Р и с. 243

Проведем ось OX, направленную вертикально вниз, с началом на поверхности воды. Спроектировав силы на эту ось, получим $mg - F_{A1} = 0$. Отсюда, учитывая, что $F_{A1} = \rho g V_1$, где V_1 – объем погруженной части бруска, получим

$$mg - \rho g V_1 = 0. \tag{1}$$

Если брусок погрузить глубже на расстояние x (рис. 243, *б*), то архимедова сила станет равной $\vec{F}_{A2}$, а ее модуль $F_{A2} = \rho g(V_1 + xS)$. Равновесие нарушится, на брусок будет действовать результирующая сила

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_{A2}.$$

В проекциях на ось OX будем иметь

$$F_x = mg - \rho g(V_1 + xS). \tag{2}$$

Из уравнения (1) следует, что $mg = \rho g V_1$. Подставив это значение mg в формулу (2), получим $F_x = -\rho g S x$, или $F_x = -kx$, где $k = \rho g S$. Следовательно, период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}},$$

а частота

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho g S}{m}}, \ \nu = 1{,}8 \text{ Гц}.$$