778. Имеются два когерентных источника звука. В точке, отстоящей от первого источника на $l_1 = 2{,}3$ м, а от второго на $l_2 = 2{,}48$ м, звук не слышен. Минимальная частота колебаний, при которой это возможно, $\nu = 1$ кГц. Найти скорость звука.

779. Дорожный мастер, приложив ухо к рельсу, услышал звук начавшегося движения поезда, а через $t = 2$ с до него донесся гудок локомотива при отправлении. На каком расстоянии от станции отправления находился мастер? Скорости звуковых волн в воздухе и в стали принять равными $v_1 = 330$ м/с и $v_2 = 5000$ м/с соответственно.

780. Из пункта A в пункт B дважды был послан звуковой сигнал, частота которого $\nu = 50$ Гц, причем в первый раз скорость звука была $v_1 = 330$ м/с. Во второй раз температура воздуха была выше, поэтому скорость звука повысилась и стала равной $v_2 = 340$ м/с. Число волн, укладывающихся на расстоянии от A до B, во второй раз оказалось, как и в первый, целым, но на две волны меньше. Определить расстояние между пунктами.

12. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Методические указания к решению задач

Ряд задач на электромагнитные колебания решается с применением формулы Томсона, а также формулы емкости плоского конденсатора и формулы связи между длиной волны, скоростью распространения колебаний и периодом. При этом необходимо учитывать, что формула Томсона справедлива только в том случае, если активным сопротивлением колебательного контура можно пренебречь. В процессах, происходящих в колебательном контуре, выполняется закон сохранения и превращения энергии.

При решении задач на переменный ток необходимо помнить, что сила тока, напряжение и ЭДС в цепях переменного тока совершают гармонические колебания с различными фазами. Поэтому при последовательном соединении сила тока на всех участках цепи в один и тот же момент времени одинакова, а напряжение во всей цепи, в отличие от цепи постоянного тока, не равно арифметической сумме напряжений на отдельных участках. Оно находится по правилу сложения векторных величин, при этом учитывается наличие активного, индуктивного и емкостного сопротивлений.

Основные законы и формулы

Формула Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где T – период свободных электромагнитных колебаний в колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L.

Мгновенные значения ЭДС e, напряжения u и силы i переменного тока соответственно равны:

$$e = \mathscr{E}_m \sin(\omega t + \varphi),\ u = U_m \sin(\omega t + \varphi),\ i = I_m \sin \omega t,$$

где $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ – круговая (циклическая, угловая) частота; T – период; ν – частота; φ – начальная фаза ЭДС или напряжения (начальная фаза силы тока принята равной нулю); $\mathscr{E}_m$, U_m, I_m – амплитудные значения ЭДС, напряжения и силы тока.

Разность (сдвиг) фаз колебаний силы тока $i = I_m \sin \omega t$ и напряжения $u = U_m \sin(\omega t' + \varphi)$ определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R},$$

где L, C, R – соответственно индуктивность катушки, емкость конденсатора и активное сопротивление резистора, последовательно включенных в цепь переменного тока.

Индуктивное сопротивление катушки индуктивностью L

$$X_L = \omega L.$$

Емкостное сопротивление конденсатора емкостью C

$$X_C = 1/(\omega C).$$

Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Закон Ома для электрической цепи переменного тока:

$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \text{ или } I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}},$$

где I_m, U_m – амплитудные значения силы тока и напряжения, R – активное сопротивление; ωL – индуктивное сопротивление; $1/(\omega C)$ – емкостное сопротивление.

Действующие значения силы переменного тока, напряжения и ЭДС:

$$I = I_m/\sqrt{2}, \; U = U_m/\sqrt{2}, \; \mathcal{E} = \mathcal{E}_m/\sqrt{2},$$

где I_m, U_m, $\mathcal{E}_m$ – амплитудные значения.

Количество теплоты, выделяемое проводником, активное сопротивление которого R, при прохождении по нему переменного тока в течение времени t,

$$Q = I^2 R t.$$

На индуктивном и емкостном сопротивлениях теплота не выделяется.

Мощность переменного тока

$$P = IU\cos\varphi = \frac{I_m U_m}{2}\cos\varphi,$$

где $\cos\varphi$ – коэффициент мощности: $\cos\varphi = R/Z$; R – активное сопротивление цепи; Z – ее полное сопротивление.

Коэффициент трансформации

$$k = n_1/n_2 = U_1/U_2,$$

где n_1, n_2 – число витков первичной и вторичной обмоток трансформатора; U_1, U_2 – напряжения на первичной и вторичной обмотках.

Примеры решения задач

781. Сила тока в цепи изменяется с течением времени по закону $i = 5{,}0\sin 200\pi t$ А, где t выражается в секундах. Определить амплитудное значение силы тока, частоту и период. Найти силу тока для фазы $\varphi_1 = 3\pi/8$.

Решение. Задача решается аналогично задаче 731. Сопоставив уравнения $i = I_m \sin\omega t$ и $i = 5{,}0\sin 200\pi t$, найдем: $I_m = 5{,}0$ А, $\omega t = 200\pi t$ или $2\pi/T = 200\pi$, $T = 0{,}01$ с, $\nu = 100$ Гц.

Фазе $\varphi_1 = 3\pi/8$ соответствует сила тока

$$i_1 = 5{,}0 \sin \frac{3\pi}{8} \text{ А}, \ i_1 = 4{,}6 \text{ А}.$$

782. На какую длину волны настроен колебательный контур, если он состоит из катушки индуктивностью $L = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ Гн и плоского конденсатора? Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1{,}0$ см, диэлектрическая проницаемость вещества, заполнившего пространство между пластинами, $\varepsilon = 11$. Площадь каждой пластины $S = 800$ см^2.

Решение. Длина волны $\lambda = cT$, где c – скорость электромагнитных волн ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с); T – период колебаний. Период найдем по формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где L – индуктивность катушки; C – емкость конденсатора. Подставив в эту формулу значение емкости $C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$, получим

$$T = 2\pi\sqrt{L\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}}.$$

Следовательно, длина волны

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{L\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}}, \ \lambda = 2{,}4 \cdot 10^3 \text{ м}.$$

783. Определить сдвиг фаз колебаний напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ и силы тока $i = I_m \sin \omega t$ для электрической цепи, состоящей из последовательно включенных проводника с активным сопротивлением $R = 1$ кОм, катушки индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн и конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ. Определить мощность, которая выделяется в цепи, если амплитуда напряжения $U_m = 100$ В, а частота $\nu = 50$ Гц.

Решение. Сдвиг фаз между напряжением и силой тока, которые заданы уравнениями $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ и $i = I_m \sin \omega t$, определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

Циклическая частота $\omega = 2\pi\nu$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi\nu L - 1/(2\pi\nu C)}{R}. \qquad (1)$$

Мощность, которая выделяется в цепи, определим по формуле

$$P = \frac{I_m U_m}{2} \cos\varphi,$$

где I_m, U_m – амплитудные значения соответственно силы тока и напряжения. Так как $I_m = U_m / Z$, то

$$P = \frac{U_m^2}{2Z} \cos\varphi,$$

где Z – полное сопротивление цепи; его находим по формуле

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$P = \frac{U_m^2 \cos\varphi}{2\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}. \qquad (2)$$

Подставив числовые значения в формулу (1), найдем: $\operatorname{tg}\varphi = -3$, $\varphi = -72°$ (минус показывает, что напряжение отстает по фазе от тока), $\cos\varphi = 0{,}3$. Подставив числовые значения в формулу (2), получим $P = 0{,}5$ Вт.

784. Электропечь сопротивлением $R = 22$ Ом питается от генератора переменного тока. Определить количество теплоты, выделяемое печью за время $t = 1$ ч, если амплитуда силы тока $I_m = 10$ А.

Р е ш е н и е. Количество теплоты, выделяющееся в проводнике при прохождении по нему переменного тока,

$$Q = I^2 Rt,$$

где I – действующее значение силы тока. Поскольку $I = I_m / \sqrt{2}$, то

$$Q = I_m^2 Rt/2, \ Q = 4 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

785. Радиолокатор работает на длине волны $\lambda = 20$ см и дает в секунду $n = 5000$ импульсов длительностью $\tau = 0{,}02$ мкс каждый. Сколько колебаний составляют один импульс и каково максимальное расстояние, на котором может быть обнаружена цель?

Р е ш е н и е. Число колебаний в одном импульсе $N = \nu\tau$, где ν – частота колебаний. Так как $\nu = c/\lambda$, где c – скорость электромагнитных волн в вакууме: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; λ — длина волны, то

$$N = c\tau/\lambda, \ N = 30.$$

За промежуток времени $t = 1/n$ между двумя последовательными импульсами электромагнитные волны доходят до цели и, отразившись, возвращаются обратно. Поэтому $2s = ct$, где s — расстояние до цели. Таким образом,

$$s = ct/2 = c/(2n), \ s = 3 \cdot 10^4 \text{ м}.$$

786. К источнику постоянного тока параллельно подключены конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и катушка с индуктивностью $L = 0{,}02$ Гн. При этом напряжение на конденсаторе $U_1 = 100$ В, а сила тока в катушке $I_1 = 2$ А. Затем источник отключают. Какой заряд будет на конденсаторе в момент, когда сила тока в катушке $I_2 = 1$ А? Потерями энергии на нагревание пренебречь.

Р е ш е н и е. Согласно закону сохранения энергии, сумма энергии заряженного конденсатора и энергии магнитного поля тока остается постоянной:

$$W_1 + W_{м1} = W_2 + W_{м2},$$

где W_1, W_2 — начальная и конечная энергия конденсатора; $W_{м1}$ и $W_{м2}$ — начальная и конечная энергия магнитного поля тока. Выразив значения этих энергий, получим уравнение

$$\frac{CU_1^2}{2} + \frac{LI_1^2}{2} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI_2^2}{2},$$

где q — искомый заряд. Отсюда

$$q = \sqrt{C\left(CU_1^2 + L\left(I_1^2 - I_2^2\right)\right)}, \ q = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}.$$

787. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и воздушного конденсатора, настроен на длину волны $\lambda_1 = 300$ м. При этом расстояние между пластинами конденсатора $d_1 = 4{,}8$ мм. Каким должно быть это расстояние, чтобы контур был настроен на длину волны $\lambda_2 = 240$ м?

Р е ш е н и е. Длина волны в первом случае $\lambda_1 = cT_1$, во втором $\lambda_2 = cT_2$, где c — скорость электромагнитных волн в вакууме: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; T_1, T_2 — периоды колебаний контура. Выразив периоды по формуле Томсона, будем иметь:

$$\lambda_1 = 2\pi c\sqrt{LC_1}, \ \lambda_2 = 2\pi c\sqrt{LC_2},$$

где L – индуктивность катушки; C_1, C_2 – емкости конденсатора. Так как $C_1 = \varepsilon_0 S/d_1$, $C_2 = \varepsilon_0 S/d_2$, то

$$\lambda_1 = 2\pi c\sqrt{L\frac{\varepsilon_0 S}{d_1}}, \ \lambda_2 = 2\pi c\sqrt{L\frac{\varepsilon_0 S}{d_2}}.$$

Разделив почленно первое равенство на второе, получим $\lambda_1/\lambda_2 = \sqrt{d_2/d_1}$, откуда

$$d_2 = d_1(\lambda_1/\lambda_2)^2, \ d_2 = 7{,}5 \text{ мм}.$$

788. Имеются два колебательных контура с одинаковыми катушками и конденсаторами. В катушку одного из контуров вставили железный сердечник, увеличивший ее индуктивность в $n = 4$ раза. Найти отношение резонансных частот контуров и их энергий, если максимальные заряды на конденсаторах одинаковы.

Р е ш е н и е. Пусть L_1 – индуктивность катушки без сердечника. Тогда индуктивность катушки с сердечником $L_2 = nL_1$.

Резонансные длины волн контуров (см. решение предыдущей задачи):

$$\lambda_1 = 2\pi c\sqrt{L_1 C}, \ \lambda_2 = 2\pi c\sqrt{nL_1 C},$$

где c – скорость электромагнитных волн в вакууме: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; C – емкость конденсатора, одинаковая в обоих контурах. Разделив почленно первое равенство на второе, получим

$$\lambda_1/\lambda_2 = \sqrt{1/n}. \qquad (1)$$

Если ν_1 и ν_2 – резонансные частоты, то $\lambda_1 = c/\nu_1$, $\lambda_2 = c/\nu_2$. Подставив эти значения в выражение (1), получим:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1}{n}}, \ \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1}{2}.$$

789. Заряженный конденсатор емкостью $C = 0{,}2$ мкФ подключили к катушке индуктивностью $L = 8$ мГн. Через какое время от момента подключения энергия электрического поля конденсатора станет равной энергии магнитного поля катушки?

Р е ш е н и е. С течением времени t заряд конденсатора изменяется по закону

$$q = q_m \cos \omega t,$$

где q_m – амплитудное значение заряда; ω – циклическая частота.

Энергия электростатического поля конденсатора

$$W_э = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2 \omega t. \qquad (1)$$

Энергия магнитного поля катушки

$$W_м = LI^2/2,$$

где I – сила тока. Сила тока равна производной заряда по времени:

$$I = q' = -q_m \omega \sin \omega t.$$

Следовательно,

$$W_м = \frac{L}{2} q_m^2 \omega^2 \sin^2 \omega t. \qquad (2)$$

Через время t_1 от момента отключения будет $W_{э1} = W_{м1}$. На основании этого равенства и выражений (1) и (2) получим

$$\frac{q_m^2}{2C} \cos^2 \omega t_1 = \frac{L}{2} q_m^2 \omega^2 \sin^2 \omega t_1,$$

откуда

$$\frac{\cos^2 \omega t_1}{C} = L\omega^2 \sin^2 \omega t_1.$$

Подставив в это уравнение значение $\omega^2 = 1/(LC)$, получим

$$\cos^2 \omega t_1 = \sin^2 \omega t_1.$$

Отсюда находим $\operatorname{tg} \omega t_1 = 1$. Следовательно, $\omega t_1 = \pi/4$, а так как $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то $\frac{1}{\sqrt{LC}} t_1 = \frac{\pi}{4}$, откуда

$$t_1 = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4}, \; t = 3 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$