

843. Одна грань треугольной призмы с преломляющим углом $\varphi = 30^\circ$ посеребрена. Луч, падающий на другую грань под углом $\alpha = 45^\circ$, после преломления и отражения от посеребренной грани вернулся по прежнему направлению. Чему равен показатель преломления материала призмы?

844. Поперечное сечение стеклянной призмы имеет форму равностороннего треугольника. Луч света падает из воздуха на одну из граней призмы перпендикулярно ей. Найти угол между лучом, выходящим из призмы, и продолжением луча, падающего на призму. Показатель преломления стекла $n = 1,5$.

845. На какую максимальную глубину можно погрузить в воду точечный источник света, чтобы квадратный плот со стороной $a = 4,0$ м не пропускал свет в пространство над поверхностью воды? Показатель преломления воды $n = 1,33$, центр плота находится над источником света.

846. На какой угол отклоняется луч от первоначального направления, выходя из стекла (показатель преломления $n = 1,57$) в воздух при угле падения $\alpha = 30^\circ$? Может ли луч не выйти из стекла в воздух? Если да, то при каком условии?

847. Угол падения луча из воздуха на стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной d равен углу полного отражения для стекла, из которого изготовлена пластинка. Вычислить смещение луча в результате прохождения его сквозь пластинку. Показатель преломления стекла равен n .

14. СОБИРАЮЩИЕ И РАССЕИВАЮЩИЕ ЛИНЗЫ

Методические указания к решению задач

Решение задач, связанных с изображением предмета в линзе, рекомендуется начинать с построения изображения. При этом важно учитывать, как расположен предмет относительно характерных точек линзы, так как от этого зависит положение изображения. При построении изображения предмета надо найти изображение нескольких точек этого предмета, а затем по ним построить изображение всего

предмета. Например, для построения изображения отрезка прямой достаточно сначала построить изображение концов этого отрезка. Чтобы найти изображение точки, достаточно построить ход двух лучей, исходящих из этой точки.

После построения изображения составляют уравнение на основе формулы линзы, а также другие уравнения, следующие из чертежа, затем решают систему относительно искомой величины.

При решении задач на изображение предмета в оптической системе, состоящей из нескольких тонких линз, сложенных вплотную, нужно сначала найти фокусное расстояние системы. Оптическая сила системы равна сумме оптических сил составляющих ее линз (при суммировании оптические силы отдельных линз, сложенных вплотную, берут со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, собирающие они или рассеивающие). Фокусное расстояние системы – величина, обратная ее оптической силе. Когда фокусное расстояние определено, расчеты ведутся по формуле линзы.

При построении изображения в оптической системе, состоящей из нескольких линз, находящихся друг от друга на некотором расстоянии, сначала строят изображение, даваемое первой линзой. Это изображение рассматривается как предмет для второй линзы и т. д. Для расчета каждого изображения применяется формула линзы.

Основные законы и формулы

Формула тонкой линзы:

$$\pm \frac{1}{F} = \pm \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f},$$

где F – фокусное расстояние линзы; d – расстояние от предмета до линзы; f – расстояние от линзы до изображения. Правило расстановки знаков следующее: если фокус, предмет или изображение являются действительными, то перед соответствующими членами этой формулы ставится плюс, если мнимыми, – минус. Предмет считается мнимым, если на линзу падает сходящийся пучок лучей. Это возможно в оптических системах, где имеются две или несколько линз.

Оптическая сила линзы

$$D = 1/F,$$

где F – фокусное расстояние. Она может быть рассчитана по формуле

$$D = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где n_1, n_2 – абсолютные показатели преломления вещества линзы и окружающей среды; R_1, R_2 – радиусы кривизны поверхностей линзы. Радиусы выпуклых поверхностей берутся со знаком «плюс», вогнутых – со знаком «минус».

Оптическая сила системы линз, сложенных вплотную, равна алгебраической сумме оптических сил линз, входящих в систему:

$$D = D_1 + D_2 + \dots + D_n.$$

Линейное увеличение линзы

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d},$$

где H, h – линейные размеры соответственно изображения и предмета.

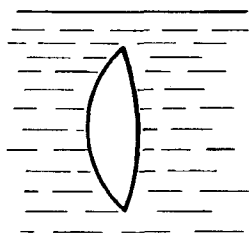
Увеличение лупы

$$\Gamma = d_0 / F,$$

где $d_0 = 25$ см – расстояние наилучшего видения для нормального глаза; F – фокусное расстояние лупы.

Примеры решения задач

848. Воздушная линза, образованная двумя тонкими стеклами с различными радиусами кривизны, помещена в воду (рис. 259). Найти фокусное расстояние этой линзы, зная, что стеклянная линза такой же формы имеет в воздухе фокусное расстояние $F_1 = 40$ см. Абсолютные показатели преломления стекла и воды – соответственно $n_1 = 1,5$ и $n_2 = 1,3$.



Р и с. 259

Р е ш е н и е. Пусть R_1 и R_2 – радиусы кривизны сферических поверхностей линз (у воздушной и стеклянной линз они, согласно условию, одинаковы), F_1 и F_2 – фокусные расстояния соответственно стеклянной линзы в воздухе и воздушной линзы в воде. Тогда, приме-

няя формулу для расчета фокусного расстояния линзы, будем иметь:

$$\frac{1}{F_1} = \left(\frac{n_1}{n_3} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{1}{F_2} = \left(\frac{n_3}{n_2} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2)$$

где n_3 — абсолютный показатель преломления воздуха: $n_3 = 1$.

Разделив почленно равенство (1) на (2), найдем:

$$F_2 = F_1 \frac{n_1/n_3 - 1}{n_3/n_2 - 1}, \quad F_2 = -87 \text{ см.}$$

Минус указывает на то, что линза рассеивающая.

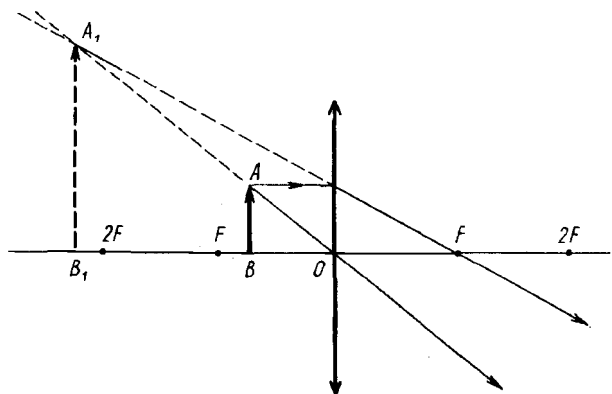
Полученный результат показывает, что двояковыпуклая линза является собирающей, если абсолютный показатель преломления среды, окружающей линзу, меньше абсолютного показателя преломления вещества линзы, или рассеивающей, если абсолютный показатель преломления среды больше абсолютного показателя преломления вещества линзы.

Читателю предлагается дать обоснованный ответ на вопрос: «Всегда ли двояковогнутая линза является рассеивающей?»

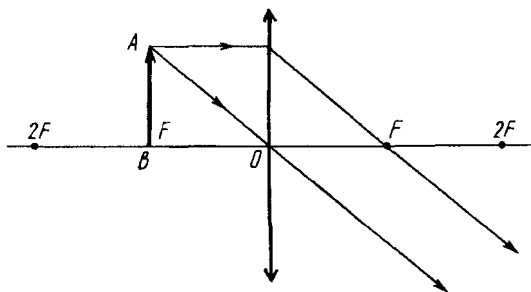
849. Плоский предмет AB установлен перпендикулярно главной оси оптической тонкой линзы. Построить изображение этого предмета в линзе при различных расстояниях d от предмета до линзы. Положения фокусов линзы и ее главной оптической оси заданы. Рассмотреть два случая: I — линза собирающая, II — линза рассеивающая.

Решение. I. Для построения изображения предмета необходимо найти изображение ряда точек этого предмета, а затем по ним построить изображение. Для построения изображения точки можно использовать любые два из следующих трех лучей: 1) луч, падающий на линзу параллельно главной оптической оси; 2) луч, проходящий через оптический центр линзы; 3) луч, проходящий через главный фокус. Ход этих лучей после прохождения через собирающую линзу известен: первый луч проходит через главный фокус линзы, второй не изменяет своего первоначального направления, а третий идет параллельно главной оптической оси.

На рис. 260–264 построено изображение A_1B_1 предмета AB в собирающей линзе для пяти различных случаев.



Р и с. 260



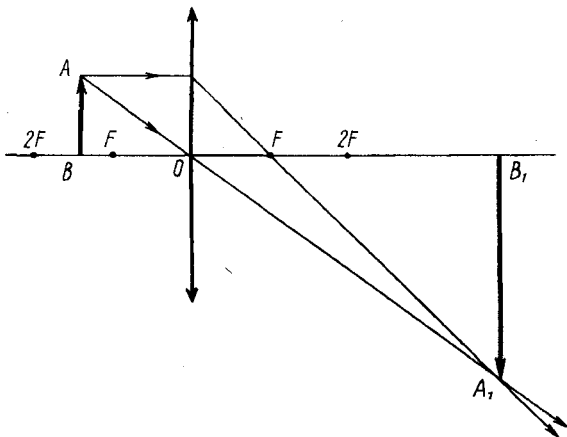
Р и с. 261

1. Если $d < F$, т. е. предмет находится между фокусом и линзой, то изображение мнимое, увеличенное и прямое (рис. 260).

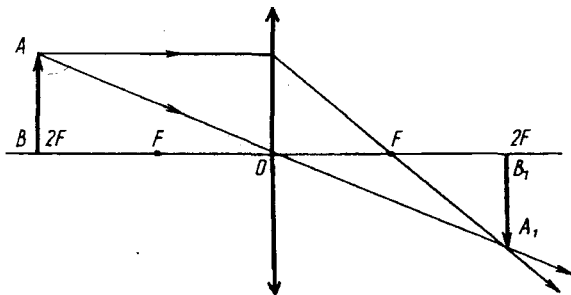
2. Если $d = F$, т. е. предмет находится на расстоянии, равном фокусному расстоянию, то изображение находится на бесконечности (рис. 261).

3. Если $F < d < 2F$, т. е. предмет находится между фокусом и точкой, отстоящей от линзы на расстоянии, равном двойному фокусному расстоянию, то изображение действительное, увеличенное и перевернутое (рис. 262).

4. Если $d = 2F$, т. е. предмет находится на расстоянии, равном двойному фокусному расстоянию, то изображение действительное, такое же по размеру, как и сам предмет, и перевернутое (рис. 263).



Р и с. 262

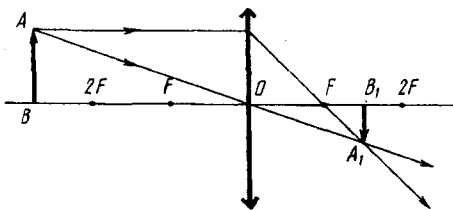


Р и с. 263

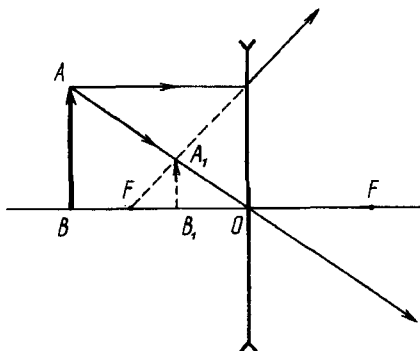
5. Если $d > 2F$, т. е. предмет находится от линзы на расстоянии, превышающем двойное фокусное расстояние, то изображение действительное, уменьшенное и перевернутое (рис. 264).

Полезно обратить внимание на то, что 1-й случай соответствует построению изображения в лупе, 3-й – в проекционном аппарате (кинопроекторе), 5-й – в фотоаппарате.

II. Если линза рассеивающая, то независимо от расстояния от предмета AB до линзы изображение A_1B_1 всегда получается мнимое, уменьшенное и прямое (рис. 265). При построении изображения в рассеивающей линзе использовались два луча: луч, идущий параллельно главной оптической оси, и луч, проходящий через оптический центр. Первый луч после преломления линзой идет так, что его



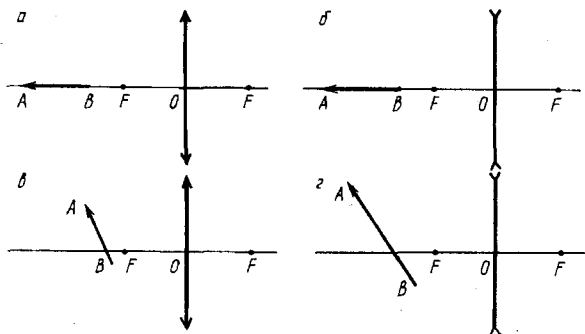
Р и с. 264



Р и с. 265

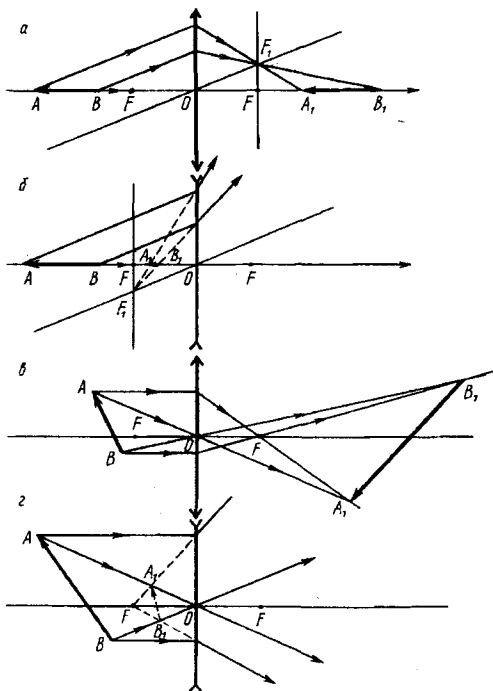
продолжение проходит через главный фокус, а второй луч, как и в случае собирающей линзы, не изменяет своего первоначального направления.

850. На рис. 266 показаны положения предмета AB . Построить изображения предмета.



Р и с. 266

Решение. Построение изображений показано на рис. 267. Поясним построение. Чтобы построить изображение предмета AB , лежащего на главной оптической оси (рис. 266, a), нужно найти изображения A_1 и B_1 точек A и B . Возьмем исходящие из точки A два луча: один – идущий вдоль главной оптической оси, другой – падающий на линзу под произвольным углом (рис. 267, a). Направление первого луча после прохождения через линзу не изменяется. Для определения хода второго луча проведем побочную оптическую ось, параллельную этому лучу, и фокальную плоскость, проходящую через задний фокус линзы. Точка пересечения побочной оптической оси с фокальной плоскостью является побочным фокусом F_1 . Через него и должен пройти второй луч после преломления в линзе. Точка A_1 пересечения первого и второго лучей, прошедших через линзу, является изображением точки A . Таким же способом строится изображение B_1 точки B .



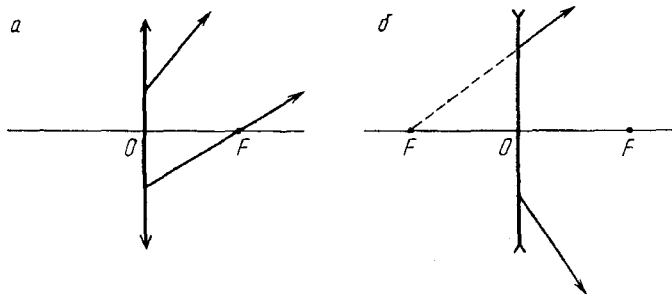
Р и с. 267

В случае рассеивающей линзы (рис. 266, б) построение выполняется аналогично (рис. 267, б). Отличие состоит в том, что луч, идущий параллельно побочной оптической оси, после преломления в линзе идет так, что его продолжение проходит через побочный фокус, являющийся точкой пересечения этой побочной оси с фокальной плоскостью, проведенной через передний фокус.

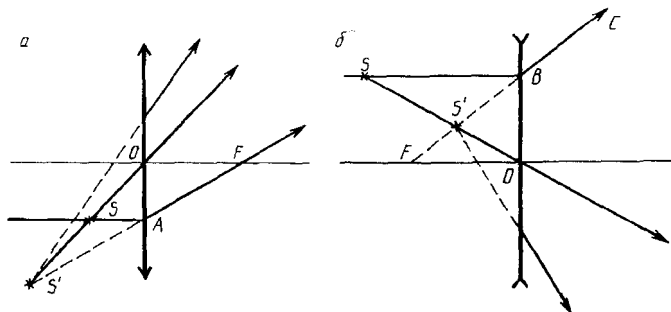
Для построения изображения предмета AB , расположенного под некоторым углом к главной оптической оси (рис. 266, в, г), строим изображения A_1 и B_1 точек A и B . Для этого берем по два луча, исходящих из каждой точки: луч, идущий параллельно главной оптической оси, и луч, идущий через оптический центр линзы (рис. 267, в, г). Первый луч, преломляясь в собирающей линзе, проходит через ее фокус; если же линза рассеивающая, то луч после преломления в линзе идет так, что его продолжение проходит через передний фокус линзы. Дальнейшие построения ясны из рисунков.

851. Найти построением положение светящейся точки, если известен ход лучей после их преломления в линзе. Один из этих лучей пересекается с главной оптической осью собирающей линзы в ее фокусе (рис. 268, а). В случае с рассеивающей линзой (рис. 268, б) один из лучей после преломления в линзе идет так, что его продолжение пересекается с главной оптической осью линзы в ее фокусе.

Решение. Рассмотрим сначала случай с собирающей линзой. Продолжив заданные лучи до их пересечения, получим изображение S' светящейся точки (рис. 269, а). Соединим точку S' с оптическим центром линзы O . Луч AF после преломления в линзе проходит через фокус, значит, до преломления он шел параллельно главной оптической



Р и с. 268



Р и с. 269

оси. Проведем $AS \parallel FO$. На пересечении AS и OS' лежит искомая светящаяся точка S .

В случае рассеивающей линзы (рис. 269, б) изображение S' светящейся точки получим так же, продолжив заданные лучи до их пересечения. Соединим точку S' с центром линзы O . Луч BC после преломления идет так, что его продолжение проходит через фокус линзы. Следовательно, до преломления он шел параллельно главной оптической оси линзы. Проведем $BS \parallel FO$. Искомая точка S лежит на пересечении OS' и BS .

852. Собирающая линза дает изображение некоторого предмета на экране. Высота изображения равна H_1 . Оставляя неподвижными экран и предмет, начинают двигать линзу к экрану и находят, что при втором четком изображении предмета высота изображения равна H_2 . Найти действительную высоту предмета.

Р е ш е н и е. Обозначим расстояние между предметом и экраном через l . Тогда при первом положении линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}, \quad f_1 + d_1 = l,$$

или

$$f_1 d_1 = Fl, \quad f_1 + d_1 = l, \quad (1)$$

где f_1, d_1 — расстояния от линзы соответственно до экрана и до предмета; F — фокусное расстояние линзы.

При втором положении линзы аналогично получим:

$$f_2 d_2 = Fl, \quad f_2 + d_2 = l. \quad (2)$$

На основании выражений (1) и (2) можно сделать вывод, что d_1 и f_1 , так же как d_2 и f_2 , являются корнями квадратного уравнения вида $x^2 - lx + Fl = 0$, т. е.

$$d_1 = x_1 = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - Fl}, \quad f_1 = x_2 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - Fl},$$

а также

$$d_2 = x_2 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - Fl}, \quad f_2 = x_1 = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - Fl}.$$

Таким образом, получаем:

$$d_1 = f_2, \quad f_1 = d_2. \quad (3)$$

Этот результат является следствием обратимости световых лучей.

Пусть h — действительная высота предмета. Тогда увеличение в первом случае

$$H_1/h = f_1/d_1, \quad (4)$$

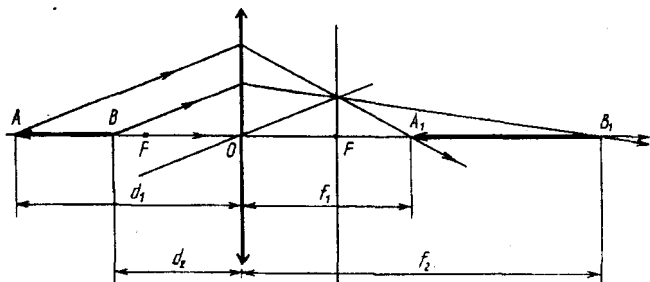
а во втором

$$H_2/h = f_2/d_2. \quad (5)$$

Перемножив почленно равенства (4) и (5), с учетом выражения (3) получим $H_1 H_2 / h^2 = 1$, откуда $h = \sqrt{H_1 H_2}$.

853. Стержень расположен вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы так, что его концы удалены от линзы на расстояния $d_1 = \frac{3}{2}F$ и $d_2 = \frac{5}{4}F$, где F — неизвестное фокусное расстояние линзы. Во сколько раз длина изображения больше длины самого предмета?

Решение. На рис. 270 построено изображение $A_1 B_1$ предмета AB (пояснения к построению смотрите в решении задачи 850). Из рисунка видно, что длина предмета $l = d_1 - d_2$, а длина изображения $L = f_2 - f_1$, где f_1, f_2 — расстояния от линзы до точек B_1 и A_1 соответственно,



Р и с. 270

являющихся изображениями точек B и A (концов стержня). Отношение этих длин, т. е. линейное увеличение,

$$\Gamma = \frac{L}{l} = \frac{f_2 - f_1}{d_1 - d_2}. \quad (1)$$

Так как изображение действительное, формулу линзы запишем в виде $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, откуда $f = Fd/(d - F)$.

На основании последней формулы выразим расстояния f_1 и f_2 :

$$f_1 = Fd_1/(d_1 - F), \quad f_2 = Fd_2/(d_2 - F).$$

Подставив эти значения в выражение (1), после преобразования получим:

$$\Gamma = \frac{F^2}{(d_2 - F)(d_1 - F)}, \quad \Gamma = 8.$$

854. С помощью тонкой линзы получают увеличенное в $\Gamma = 2$ раза действительное изображение предмета. Затем линзу передвигают на $l = 8$ см и получают мнимое изображение такого же размера. Определить фокусное расстояние линзы.

Решение. Если в первом случае предмет находится на расстоянии d от линзы, а изображение — на расстоянии f_1 от нее, то увеличение $\Gamma = f_1/d$, следовательно,

$$f_1 = \Gamma d. \quad (1)$$

Во втором случае расстояние от предмета до линзы равно $d - l$, а от изображения до линзы

$$f_2 = \Gamma(d - l). \quad (2)$$

Применив формулу тонкой линзы в первом и втором случаях, будем иметь:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1}, \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{d - l} - \frac{1}{f_2},$$

или с учетом выражений (1) и (2)

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\Gamma d}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d - l} - \frac{1}{\Gamma(d - l)}. \quad (4)$$

Из уравнения (3) найдем $d = F(1 + 1/\Gamma)$. Подставив это значение в уравнение (4), получим

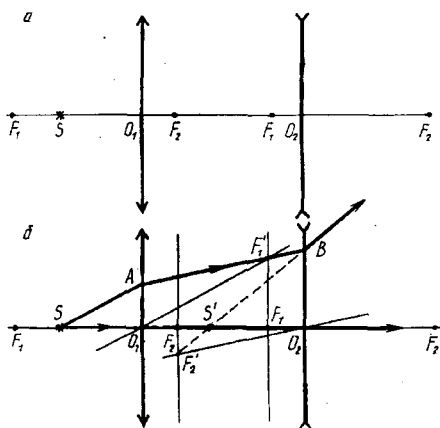
$$\frac{1}{F} = \frac{1 - 1/\Gamma}{F(1 + 1/\Gamma) - l}.$$

Решив это уравнение относительно F , найдем: $F = l\Gamma/2$, $F = 8$ см.

855. Собирающая и рассеивающая линзы расположены так, что имеют общую главную оптическую ось. На этой оси находится светящаяся точка S (рис. 271, а). Построением найти изображение этой точки.

Решение. Чтобы найти изображение точки S , рассмотрим ход исходящих из нее двух лучей: луча SF_2 , идущего вдоль главной оптической оси, и произвольного луча SA (рис. 271, б). Первый луч, проходя через оптические центры обеих линз, не изменяет своего первоначального направления. Чтобы найти ход луча SA после преломления в собирающей линзе, проведем параллельно этому лучу побочную оптическую ось O_1F_1' . Точка F_1' пересечения побочной оптической оси с фокальной плоскостью линзы является побочным фокусом, через который пройдет луч SA после собирающей линзы.

Для нахождения хода луча AF_1' после преломления в рассеивающей линзе найдем побочный фокус F_2' , т. е. точку пересечения побочной оптической оси $F_2'O_2$, проведенной параллельно лучу AF_1' , с фокальной плоскостью рас-



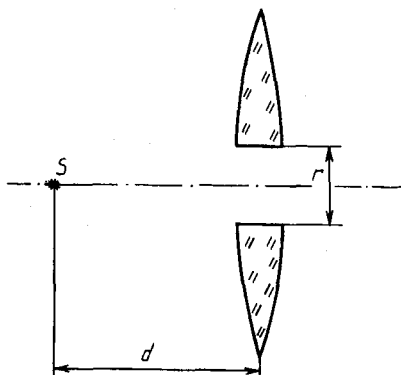
Р и с. 271

сеивающей линзы. После линзы луч пойдет так, что его продолжение пройдет через точку F_2' .

Таким образом, выбранные нами два луча, пройдя через обе линзы, расходятся. Поэтому изображение S' точки S мнимое и находится в точке пересечения луча SF_2 и продолжения луча $S'B$.

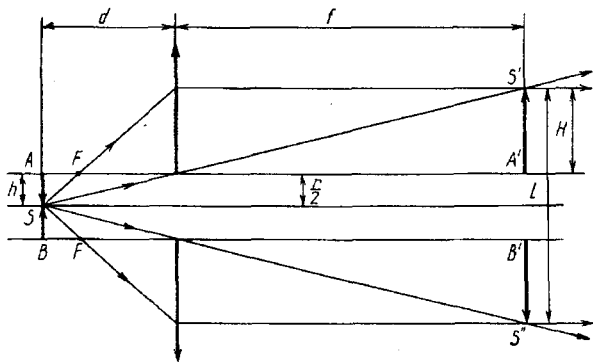
856. Точечный источник света находится на главной оптической оси тонкой собирающей линзы. Линзу разрезали на две половины, которые раздвинули на расстояние $r = 2$ мм (рис. 272). Найти расстояние от точечного источника света до линзы, если расстояние между действительными изображениями источника $l = 6$ мм. Фокусное расстояние линзы $F = 40$ см.

Решение. Каждая из раздвинутых половин линзы действует как целая линза, главная оптическая ось которой находится на расстоянии $h =$



Р и с. 272

$r/2$ от источника S (рис. 273). Для наглядности представим, что плоские предметы SA и SB установлены перпендикулярно главным оптическим осям этих линз, и построим их изображения $S'A'$ и $S''B'$. Ясно, что точки S' и S''



Р и с. 273

являются изображениями источника S . Как видно из рис. 273, высота h предмета SA равна $r/2$, а высота H изображения $S'A'$ равна $(l-r)/2$. Следовательно, увеличение одной из половин линзы

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{l-r}{r}. \quad (1)$$

Но, с другой стороны,

$$\Gamma = f/d, \quad (2)$$

где f — расстояние от изображения до линзы; d — расстояние от предмета до линзы.

Из формул (1) и (2) следует $(l-r)/r = f/d$, откуда $f = d(l-r)/r$. Подставив это значение в формулу тонкой линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, получим $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{r}{d(l-r)}$. Отсюда $d = Fl/(l-r)$, $d = 0,6$ м.

857. Небольшому шарикю, который находится на поверхности горизонтально расположенной тонкой собирающей линзы с оптической силой $D = 0,5$ дптр, сообщили вертикальную начальную скорость $v_0 = 10$ м/с. Сколько времени будет существовать действительное изображение шарика в этой линзе?

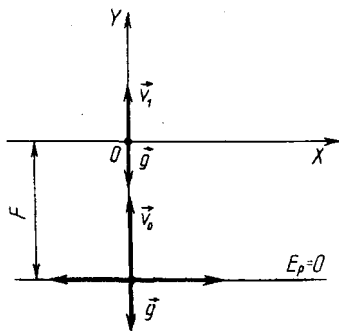
Решение. Изображение шарика будет действительным тогда, когда расстояние от шарика до линзы больше фокусного расстояния F этой линзы (см. решение задачи 849).

Выберем систему координат так, чтобы ось Ox была расположена в фокальной плоскости линзы, а начало координат O совпадало с ее главным фокусом (рис. 274). Время будем отсчитывать с того момента, когда шарик был в точке O . Тогда зависимость координаты y шарика от времени t выразится уравнением

$$y = v_1 t - gt^2/2, \quad (1)$$

где v_1 — скорость шарика в точке O ; g — ускорение свободного падения.

Найдем время τ , за которое шарик, вылетев из точки O , вернется в нее обратно. В момент падения на фокальную плоскость $t = \tau$, $y = 0$. Согласно уравнению (1),



Р и с. 274

$$0 = v_1 \tau - g \tau^2 / 2.$$

Решив это уравнение относительно τ , получим

$$\tau = 2v_1 / g. \quad (2)$$

(Второй корень $\tau = 0$ соответствует начальному моменту времени.) Скорость v_1 найдем на основании закона сохранения энергии. Будем считать, что на уровне линзы потенциальная энергия шарика $E_p = 0$. Тогда в точке O $E_{p1} = mgF$, где F — фокусное расстояние линзы. Кинетическая энергия шарика в этой точке $E_{k1} = mv_1^2 / 2$. В момент бросания кинетическая энергия $E_k = mv_0^2 / 2$.

По закону сохранения энергии

$$E_k + E_p = E_{k1} + E_{p1},$$

или

$$mv_0^2 / 2 = mv_1^2 / 2 + mgF.$$

$$\text{Отсюда } v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gF}.$$

Так как $F = 1/D$, то $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2g/D}$. Подставив это значение в формулу (2), найдем время τ , в течение которого изображение шарика будет действительным:

$$\tau = \frac{2}{g} \sqrt{v_0^2 - \frac{2g}{D}}, \quad \tau = 2 \text{ с.}$$

858. Фокусное расстояние объектива проекционного аппарата $F = 0,25$ м. Какое увеличение диапозитива дает этот аппарат, если экран удален от объектива на расстояние $f = 4$ м?

Решение. Диапозитив помещают вблизи фокальной плоскости объектива на расстоянии, большем его фокусного расстояния. Изображение получается действительное, увеличенное и обратное (см. рис. 262). Увеличение

$$\Gamma = \frac{f}{d} = f \frac{1}{d}, \quad (1)$$

где f — расстояние от экрана (изображения) до объектива; d — расстояние от диапозитива до объектива.

Из формулы линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$ находим

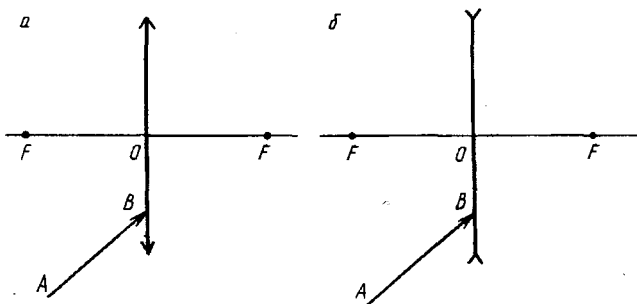
$$\frac{1}{d} = \frac{f - F}{Ff}$$

Подставив это значение в формулу (1), получим:

$$\Gamma = \frac{f - F}{F}, \Gamma = 15.$$

Задачи для самостоятельного решения

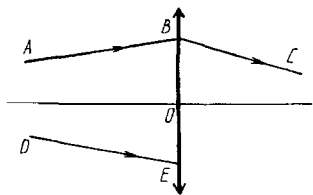
859. Построить ход луча AB , падающего под некоторым углом к главной оптической оси на собирающую (рис. 275, а) и рассеивающую (рис. 275, б) линзы. Положения главных оптических осей линз и их фокусы заданы.



Р и с. 275

860. На рис. 276 показан ход луча ABC через линзу. Построить ход луча DE после прохождения его через линзу.

861. Задан ход луча BC после преломления его в собирающей (рис. 277, а) и рассеивающей (рис. 277, б) линзах, а также положения главных оптических осей и фокусы линз. Найти построением ход луча до линзы в обоих случаях.



Р и с. 276

862. Заданы главная оптическая ось линзы OO' , светящаяся точка S и ее изображение в линзе S' (рис. 278). Найти построением положение фокуса линзы.

863. Построить изображение светящейся точки, лежащей на главной оптической оси линзы