

VI. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

17. СВЕТОВЫЕ КВАНТЫ

Методические указания к решению задач

Задачи этой главы связаны в основном с нахождением энергии и импульса фотонов, а также с фотоэффектом и эффектом Комптона.

В задачах на фотоэффект применяется уравнение Эйнштейна, которое выражает закон сохранения энергии при фотоэффекте. Если фотоэлектроны задерживаются тормозящим электрическим полем, то, согласно теореме об изменении кинетической энергии, максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона равна работе сил поля: $m_e v^2/2 = eU$. Поэтому в соответствии с уравнением Эйнштейна получим

$$h\nu = A + eU.$$

При решении задач на эффект Комптона следует иметь в виду, что, согласно квантовой теории, этот эффект рассматривается как упругое столкновение фотона с покоящимся электроном, которое подчиняется законам сохранения энергии и импульса. Фотон передает электрону часть своей энергии и часть импульса и изменяет направление своего движения, т. е. рассеивается. Уменьшение энергии фотона означает в соответствии с формулой $E = h\nu$ уменьшение частоты, т. е. увеличение длины волны.

В фотоэффекте и эффекте Комптона проявляются квантовые свойства электромагнитного излучения.

Основные законы и формулы

Энергия фотона

$$E = h\nu = \hbar\omega,$$

где $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка; ν — частота света; $\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с; ω — циклическая частота.

Импульс фотона

$$p = h\nu/c = h/\lambda,$$

где c — скорость света в вакууме: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; λ — длина световой волны.

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A + m_e v_{\max}^2 / 2,$$

где $h\nu$ — энергия фотона; A — работа выхода электрона; $m_e v_{\max}^2 / 2$ — максимальная кинетическая энергия вылетающего электрона; v_{\max} — его максимальная скорость.

Красная граница фотоэффекта

$$\nu_{\min} = A/h, \text{ или } \lambda_{\max} = hc/A.$$

Эффект Комптона: при рассеянии коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и гамма-излучения) на свободных или слабо связанных электронах длина волны его увеличивается на величину

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \text{ или } \Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta),$$

где $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$; λ, λ' — длина волны соответственно падающего и рассеянного излучения; m_e — масса покоя электрона; c — скорость света в вакууме; θ — угол рассеяния.

Величина $\lambda_C = h/(m_0 c)$ называется *комптоновской длиной волны электрона*: $\lambda_C = 2,4 \cdot 10^{-12}$ м. Поэтому $\Delta\lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta)$.

Примеры решения задач

921. Лазер, работающий в непрерывном режиме, излучает красный свет с длиной волны $\lambda = 630$ нм, развивая мощность $P = 40$ мВт. Сколько фотонов излучает лазер за время $t = 10$ с? Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Количество фотонов, излучаемых за время t ,

$$N = W/E,$$

где W — суммарная энергия фотонов: $W = Pt$; E — энергия фотона: $E = h\nu = hc/\lambda$. Следовательно,

$$N = \frac{Pt\lambda}{hc}, \quad N = 1,3 \cdot 10^{18}.$$

922. Максимальная кинетическая энергия электронов, вылетающих из рубидия при облучении его ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 3,17 \cdot 10^{-7}$ м, $E_{k \max} = 2,84 \cdot 10^{-19}$ Дж. Определить работу выхода электрона и красную границу фотоэффекта для рубидия. Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж \cdot с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта имеет вид

$$E = A + E_{k \max},$$

где E – энергия падающего на вещество фотона; A – работа выхода электрона; $E_{k \max}$ – максимальная кинетическая энергия вылетающего электрона. Отсюда $A = E - E_{k \max}$. Так как энергия фотона $E = h\nu = hc/\lambda$, то работа выхода

$$A = hc/\lambda - E_{k \max}, \quad A = 3,43 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Красной границе фотоэффекта соответствует длина волны $\lambda_{\max} = hc/A$. Следовательно,

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{hc - \lambda E_{k \max}}, \quad \lambda_{\max} = 5,8 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

923. На платиновую пластинку падает ультрафиолетовое излучение. Для прекращения фотоэффекта нужно приложить задерживающее напряжение $U_1 = 3,7$ В. Если платиновую пластинку заменить пластинкой из другого металла, то задерживающее напряжение нужно увеличить до $U_2 = 6,0$ В. Определить работу выхода электрона из этого металла. Работа выхода электрона из платины $A_1 = 6,3$ эВ ($1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Решение. Пусть ν – частота падающего излучения. Тогда для платиновой пластинки, согласно уравнению Эйнштейна, имеем

$$h\nu = A_1 + m_e v_{\max 1}^2 / 2,$$

где $v_{\max 1}$ – максимальная скорость вылетающих электронов.

Чтобы задержать вылетающие электроны, необходимо приложить задерживающее напряжение U_1 . Тогда

$$eU_1 = m_e v_{\max 1}^2 / 2,$$

где e – заряд электрона. Таким образом,

$$h\nu = A_1 + eU_1. \quad (1)$$

Аналогичное выражение запишем для пластинки из другого металла:

$$h\nu = A_2 + eU_2. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) находим:

$$A_2 = A_1 - e(U_2 - U_1), \quad A_2 = 6,4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

924. Энергия фотона рентгеновского излучения $E = 0,3 \text{ МэВ}$. Фотон был рассеян при соударении со свободным покоящимся электроном, в результате чего его длина волны увеличилась на $\Delta\lambda = 0,0025 \text{ нм}$. Определить: энергию рассеянного фотона; угол, под которым вылетел электрон отдачи; кинетическую энергию электрона отдачи. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$. Энергия покоя электрона $E_0 = m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$ ($1 \text{ МэВ} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$).

Решение. Увеличение длины волны рентгеновского излучения при его рассеянии на электронах (эффект Комптона) объясняется тем, что фотон, как и любая частица, обладает определенным импульсом и что акт рассеяния представляет собой упругое столкновение фотона с электроном, аналогичное соударению упругих шариков. При этом выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения энергии. Упруго соударяясь с электроном, фотон передает ему часть импульса и энергии. Энергия фотона определяется по формуле

$$E = h\nu = hc/\lambda, \quad (1)$$

где ν — частота; h — постоянная Планка; λ — длина волны. Отсюда видно, что уменьшение энергии фотона означает уменьшение частоты рентгеновского излучения и увеличение его длины волны.

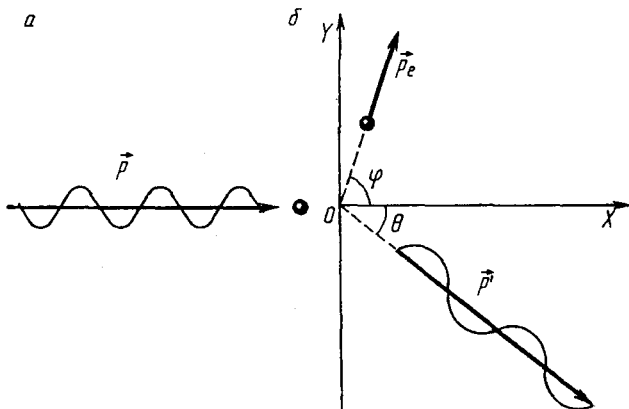
Найдем энергию E' рассеянного фотона. Согласно формуле (1),

$$E' = h\nu' = hc/\lambda',$$

где $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ — длина волны рассеянного рентгеновского излучения; λ — длина волны падающего излучения. $\lambda = c/\nu = hc/E$. Следовательно,

$$E' = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{hc}{hc/E + \Delta\lambda} = \frac{Ehc}{hc + E\Delta\lambda} = \frac{E}{1 + E\Delta\lambda/(hc)}. \quad (2)$$

Пусть \vec{p} – импульс падающего фотона, \vec{p}' – импульс рассеянного фотона, \vec{p}_e – импульс электрона отдачи. На рис. 285, *a* изображена ситуация до столкновения, на рис. 285, *б* – после столкновения. Положительное направление оси OX совпадает с направлением вектора \vec{p} , начало координат – с точкой, где находился электрон в момент соударения с фотоном.



Р и с. 285

Из закона сохранения импульса следует, что сумма проекций импульсов фотона и электрона на оси OX и OY до столкновения равна сумме проекций их импульсов на эти оси после столкновения:

$$p + 0 = p' \cos \theta + p_e \cos \varphi, \quad p_e \sin \varphi - p' \sin \theta = 0,$$

или

$$p_e \cos \varphi = p - p' \cos \theta, \quad p_e \sin \varphi = p' \sin \theta, \quad (3)$$

где φ – угол, под которым вылетел электрон отдачи; θ – угол рассеяния фотона.

Разделив почленно второе из уравнений (3) на первое, получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{p/p' - \cos \theta}. \quad (4)$$

Модуль импульса падающего фотона

$$p = E/c, \quad (5)$$

где E – энергия фотона.

Аналогичным соотношением связаны также импульс p' и энергия E' рассеянного фотона:

$$p' = E'/c. \quad (6)$$

Разделив равенство (5) почленно на равенство (6), получим $p/p' = E/E'$, или, учитывая значение (2),

$$p/p' = (hc + E\Delta\lambda)/(hc). \quad (7)$$

На основании выражений (4) и (7) будем иметь

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{(hc + E\Delta\lambda)/(hc) - \cos \theta}. \quad (8)$$

Косинус угла рассеяния θ определим, воспользовавшись формулой Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta),$$

где λ_C комптоновская длина волны электрона. Отсюда

$$\cos \theta = 1 - \Delta\lambda/\lambda_C. \quad (9)$$

Тогда

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_C}\right)^2} = \frac{\sqrt{(2\lambda_C - \Delta\lambda)\Delta\lambda}}{\lambda_C}. \quad (10)$$

Подставив в выражение (8) вместо $\cos \theta$ и $\sin \theta$ их значения (9) и (10), после преобразований получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2\lambda_C/(\Delta\lambda) - 1}}{E\lambda_C/(hc) + 1}. \quad (11)$$

Так как $\lambda_C = h/(m_e c)$, то

$$\frac{E\lambda_C}{hc} = \frac{E}{m_e c^2} = \frac{E}{E_0}, \quad (12)$$

где $E_0 = m_e c^2$ — энергия покоя электрона.

Подставив значение отношения (12) в формулу (11), получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2\lambda_C/(\Delta\lambda) - 1}}{E/E_0 + 1}. \quad (13)$$

На основании закона сохранения энергии кинетическая энергия электрона отдачи равна разности между энергией E падающего фотона и энергией E' рассеянного фотона:

$$E_k = E - E' = E - \frac{Ehc}{hc + E\Delta\lambda}.$$

После преобразований получим

$$E_k = \frac{E}{hc/(\Delta\lambda) + 1}. \quad (14)$$

Теперь, подставив числовые значения величин в формулы (2), (13), (14), получим: $E = 0,2$ МэВ, $\operatorname{tg} \varphi = 0,6$, $\varphi = 31^\circ$, $E_k = 0,1$ МэВ.

Задачи для самостоятельного решения

925. Определить энергию и импульс фотона видимого света, длина волны которого $\lambda = 0,6$ мкм. Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

926. В среде распространяется свет, имеющий длину волны $\lambda = 300$ нм и энергию фотона $E = 4,4 \cdot 10^{-19}$ Дж. Определить абсолютный показатель преломления среды. Скорость света в вакууме $c = 3,0 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

927. Человеческий глаз может воспринимать световой поток мощностью $P = 2 \cdot 10^{-17}$ Вт. Найти число фотонов света с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм, попадающих в глаз за время $t = 1$ с при указанной мощности. Скорость света в вакууме $c = 3,0 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

928. Источник света излучает $N = 1 \cdot 10^{19}$ фотонов за время $t = 1$ с. Длина волны излучения $\lambda = 4,95 \cdot 10^{-5}$ см. Какую мощность потребляет этот источник, если в энергию света переходит $\eta = 0,1$ потребляемой энергии? Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

929. Некоторый металл освещается светом, длина волны которого $\lambda = 0,25$ мкм. Пренебрегая импульсом фотона, найти максимальный импульс, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона, если красная граница фотоэффекта для этого металла $\lambda_{\max} = 0,28$ мкм. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

930. Фотоэлемент облучается монохроматическим желтым светом, длина волны которого $\lambda = 600$ нм. За некото-