

волны электрона  $\lambda_C = 2,4$  пм, постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с.

**943.** В результате соударения со свободным электроном фотон отдает ему треть своей энергии. Угол рассеяния  $\theta = 60^\circ$ . Определить энергию и импульс рассеянного фотона. Скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с, комптоновская длина волны электрона  $\lambda_C = 2,4$  пм.

## 18. АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

### Методические указания к решению задач

При решении задач расчетного характера, связанных со строением атома и атомного ядра, используются в основном приведенные ниже формулы. Кроме того, применяются законы сохранения импульса, энергии, электрического заряда, а также закон взаимосвязи массы и энергии.

### Основные законы и формулы

*Первый постулат Бора:* атомная система может находиться только в особых стационарных, или квантовых, состояниях, каждому из которых соответствует определенная энергия  $E_n$ ; в стационарном состоянии атом не излучает.

Электроны в атоме могут двигаться вокруг ядра только по определенным круговым орбитам, радиусы которых устанавливаются следующим правилом квантования:

$$m_e v_n r_n = n \hbar,$$

где  $m_e$  — масса электрона;  $v_n$  — скорость электрона на  $n$ -й орбите;  $r_n$  — радиус  $n$ -й орбиты;  $n = 1, 2, 3, \dots$  — порядковый номер орбиты;  $\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с;  $h$  — постоянная Планка.

*Второй постулат Бора:* при переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается квант электромагнитной энергии.

*Энергия фотона* равна разности энергий атома в двух его стационарных состояниях:

$$h\nu_{mn} = E_m - E_n,$$

где  $h$  — постоянная Планка;  $\nu_{mn}$  — частота колебаний, соответствующая испускаемому (или поглощаемому) кванту излучения;  $m, n$  — номера стационарных состояний (или соответствующих этим состояниям электронных орбит);  $E_m, E_n$  — энергия атома в стационарных состояниях.

*Энергия связи атомного ядра*

$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta m,$$

где  $c$  — скорость света в вакууме;  $\Delta m$  — дефект массы, т. е. разность между суммой масс протонов и нейтронов, образующих ядро, и массой ядра.

*Дефект массы*

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_{\text{я}}, \quad (1)$$

где  $Z$  — число протонов в ядре;  $N$  — число нейтронов:  $N = A - Z$ ;  $m_p, m_n$  — массы свободных протона и нейтрона;  $m_{\text{я}}$  — масса ядра.

Следовательно, энергия связи

$$E_{\text{св}} = (Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}})c^2.$$

Обычно в таблицах масс изотопов даются массы нейтральных атомов, но не ядер. Поэтому формулу (1) целесообразно преобразовать так, чтобы в нее входила не масса ядра  $m_{\text{я}}$ , а масса  $m_a$  соответствующего нейтрального атома. Так как  $m_{\text{я}} = m_a - Zm_e$ , где  $m_e$  — масса электрона, то формулу (1) можно заменить следующей:

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - (m_a - Zm_e),$$

или

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + Nm_n - m_a.$$

Учитывая, что  $m_p + m_e = m_{\text{H}}$ , где  $m_{\text{H}}$  — масса атома водорода, получаем

$$\Delta m = Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m_a.$$

*Атомная единица массы* (а.е.м.) — масса, равная  $1/12$  массы атома изотопа углерода  $^{12}\text{C}$ :

$$1 \text{ а.е.м.} = 1,66053 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

*Электронвольт* (эВ) — единица энергии, равная энергии, которую приобретает частица, обладающая элементарным электрическим зарядом (зарядом, равным заряду электрона), проходя разность потенциалов 1 В:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

*Энергетический эквивалент атомной единицы массы*

$$(1 \text{ а.е.м.})c^2 = 931,5 \text{ МэВ.}$$

*Энергия связи атомного ядра* в мегаэлектронвольтах вычисляется по формуле

$$E_{\text{св}} = 931,5(Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}),$$

где массы протона  $m_p$ , нейтрона  $m_n$  и ядра  $m_{\text{я}}$  выражены в атомных единицах массы.

*Закон радиоактивного распада:*

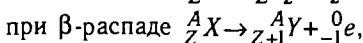
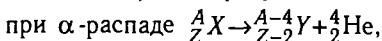
$$N = N_0 2^{-t/T},$$

где  $N$  – число нераспавшихся радиоактивных ядер в момент времени  $t$ ;  $N_0$  – число нераспавшихся ядер в начальный момент времени (при  $t_0 = 0$ );  $T$  – период полураспада. Этот закон можно также записать в виде

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где  $e$  – основание натуральных логарифмов;  $\lambda$  – постоянная радиоактивного распада для данного вида ядер. Постоянная распада связана с периодом полураспада соотношением  $T = \ln 2 / \lambda$ .

*Правила смещения при радиоактивных распадах:*



где  $X$  – символ материнского ядра;  $Y$  – символ дочернего ядра;  ${}^4_2 \text{He}$  – ядро гелия ( $\alpha$ -частица);  ${}^0_{-1} e$  – обозначение электрона (заряд его равен  $-1$ , а массовое число – нулю).

*Энергия (энергетический выход) ядерной реакции*

$$Q = c^2((m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)),$$

где  $m_1, m_2$  – массы ядра-мишени и бомбардирующей частицы;  $m_3 + m_4$  – сумма масс продуктов реакции (ядер и частиц); если  $m_1 + m_2 > m_3 + m_4$ , то энергия  $Q$  выделяется; если  $m_1 + m_2 < m_3 + m_4$ , – поглощается.

## Примеры решения задач

**944.** Во время перехода электрона в атоме водорода с третьей стационарной орбиты на вторую атом излучает фотон, энергия которого соответствует длине волны  $\lambda = 652 \text{ нм}$

(красная линия спектра). На сколько уменьшается при этом энергия атома водорода?

**Решение.** Согласно второму постулату Бора, энергия фотона равна разности энергий  $E_3$  и  $E_2$  стационарных состояний:

$$h\nu = \Delta E,$$

где  $h$  — постоянная Планка;  $\nu$  — частота:  $\nu = c/\lambda$ ;  $c$  — скорость света в вакууме;  $\lambda$  — длина волны;  $\Delta E = E_3 - E_2$ .

Таким образом,  $\Delta E = hc/\lambda$ . Подставив в эту формулу числовые значения длины волны  $\lambda$ , постоянной Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с и скорости  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, найдем  $\Delta E = 3 \cdot 10^{-19}$  Дж.

**945.** Пользуясь теорией Бора, найти радиус  $n$ -й электронной орбиты в атоме водорода, скорость и ускорение электрона на этой орбите.

**Решение.** Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода вращается вокруг ядра, совершая равномерное движение по круговой орбите в соответствии с законами Ньютона. При этом сила  $\vec{F}$  взаимодействия электрических зарядов ядра и электрона (рис. 287) сообщает электрону центростремительное ускорение

$$a_n = v_n^2 / r_n, \quad (1)$$

где  $v_n$  — скорость электрона на  $n$ -й орбите;  $r_n$  — радиус этой орбиты.

По закону Кулона сила взаимодействия электрона с ядром

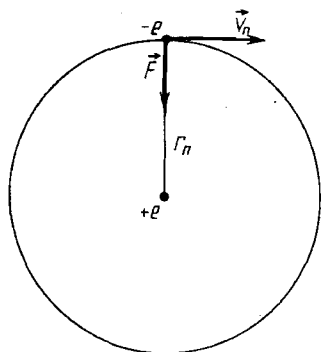
$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}. \quad (2)$$

Согласно второму закону Ньютона,  $F = m_e a_n$ , или с учетом формул (1) и (2)

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n}, \quad (3)$$

где  $m_e$  — масса электрона.

Согласно теории Бора, из всех возможных орбит разрешенными являются только те, для которых выполняется правило квантования



Р и с. 287

$$m_e v_n r_n = n \hbar, \quad (4)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\hbar = h/(2\pi)$ ;  $h$  — постоянная Планка.

Решив совместно уравнения (3) и (4) относительно  $r_n$  и  $v_n$ , найдем радиус  $n$ -й электронной орбиты и скорость электрона на ней:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2}, \quad (5)$$

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n \hbar}. \quad (6)$$

Подставив в выражение (1) значения (5) и (6), получим

$$a_n = \frac{m_e e^6}{64\pi^3 \epsilon_0^3 n^3 \hbar^4}.$$

**946.** Найти напряженность электрического поля на четвертой электронной орбите в атоме водорода.

**Решение.** Согласно теории Бора, радиус  $n$ -й орбиты в атоме водорода, как показано в решении предыдущей задачи,

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — электрическая постоянная;  $\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — постоянная Планка;  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг — масса электрона;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — заряд электрона.

Напряженность электрического поля на  $n$ -й орбите

$$E_n = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}.$$

Подставив это значение в формулу (1), получим

$$E_n = \frac{m_e^2 e^5}{64\pi^3 \epsilon_0^3 n^4 \hbar^4}. \quad (2)$$

Подставив в формулу (2) числовые значения величин и произведя вычисления, найдем напряженность электрического поля на четвертой ( $n = 4$ ) орбите:  $E_4 = 2 \cdot 10^9$  В/м.

**947.** Найти число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов магния:  ${}_{12}^{24}\text{Mg}$ ,  ${}_{12}^{25}\text{Mg}$ ,  ${}_{12}^{26}\text{Mg}$ .

**Р е ш е н и е.** Обычно нейтральный атом и его ядро обозначают одним и тем же символом

$${}^A_Z X, \quad (1)$$

где  $X$  — обозначение элемента:  $Z$  — число протонов в ядре (порядковый номер элемента в периодической системе Д. И. Менделеева);  $A$  — массовое число (сумма числа протонов и нейтронов в ядре, равная округленной до ближайшего целого числа массе атома, выраженной в а.е.м.).

Число нейтронов в ядре

$$N = A - Z. \quad (2)$$

На основании формул (1) и (2) находим, что ядро  ${}^{24}_{12}\text{Mg}$  содержит 12 протонов и  $24 - 12 = 12$  нейтронов, ядро  ${}^{25}_{12}\text{Mg}$  — 12 протонов и  $25 - 12 = 13$  нейтронов и ядро  ${}^{26}_{12}\text{Mg}$  — 12 протонов и  $26 - 12 = 14$  нейтронов.

**948.** Найти энергию связи ядра лития  ${}^7_3\text{Li}$ . Масса атома  ${}^7_3\text{Li}$   $m_a = 7,01601$  а.е.м., массы атома водорода  ${}^1_1\text{H}$  и нейтрона — соответственно  $m_{{}^1_1\text{H}} = 1,00783$  а.е.м. и  $m_n = 1,00867$  а.е.м.

**Р е ш е н и е.** Энергия связи атомного ядра определяется по формуле

$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta m,$$

где  $\Delta m$  — дефект массы:  $\Delta m = Zm_{{}^1_1\text{H}} + (A - Z)m_n - m_a$ .

Так как энергетический эквивалент атомной единицы массы равен 931,5 МэВ, то выраженная в мегаэлектронвольтах энергия связи ядра

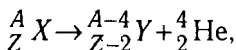
$$E_{\text{св}} = 931,5 \Delta m = 931,5 (Zm_{{}^1_1\text{H}} + (A - Z)m_n - m_a), \quad (1)$$

где  $m_{{}^1_1\text{H}}$ ,  $m_n$  выражены в а.е.м.

Для ядра  ${}^7_3\text{Li}$  имеем:  $A = 7$ ,  $Z = 3$ . Подставив числовые значения величин в формулу (1), получим  $E_{\text{св}} = 39,26$  МэВ.

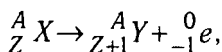
**949.** Какое количество  $\alpha$ - и  $\beta$ -распадов содержится в цепочке превращений урана  ${}^{235}_{92}\text{U}$  в свинец  ${}^{207}_{82}\text{Pb}$ ?

**Решение.** При  $\alpha$ -распаде зарядовое число  $Z$  уменьшается на 2, а массовое число  $A$  — на 4. Символически это можно записать так:



где  ${}^4_2 \text{He}$  — обозначение  $\alpha$ -частицы.

При  $\beta$ -распаде зарядовое число увеличивается на единицу, а массовое число не изменяется:



где  ${}^0_{-1} e$  — обозначение электрона.

Так как массовое число изменяется только при  $\alpha$ -распаде, то при превращении  ${}^{235}_{92} \text{U}$  в  ${}^{207}_{82} \text{Pb}$  количество  $\alpha$ -распадов

$$N_\alpha = \frac{235 - 207}{4} = 7.$$

В результате семи  $\alpha$ -распадов зарядовое число уменьшается на  $2 \cdot 7 = 14$ , а после  $N_\beta$  распадов оно увеличивается на  $N_\beta$ . Следовательно,

$$92 - 14 + N_\beta = 82,$$

откуда находим количество  $\beta$ -распадов:  $N_\beta = 4$ .

**950.** Определить, сколько атомов распадается в  $m = 1$  мг радиоактивного изотопа цезия  ${}^{137}_{55} \text{Cs}$  в течение промежутка времени  $t = 20$  дней. Период полураспада цезия  $T = 30$  дней.

**Решение.** За время  $t$  распадается количество атомов

$$\Delta N = N_0 - N, \quad (1)$$

где  $N_0$  — число нераспавшихся атомов в начальный момент времени  $t_0 = 0$ ;  $N$  — число нераспавшихся атомов через промежуток времени  $t$ . Согласно закону радиоактивного распада,

$$N = N_0 \cdot 2^{-t/T}. \quad (2)$$

Первоначальное число атомов

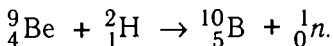
$$N_0 = \frac{m}{M} N_A, \quad (3)$$

где  $m$  — масса изотопа;  $M$  — его молярная масса:  $M = 137 \cdot 10^{-3}$  кг/моль;  $N_A$  — постоянная Авогадро.

Подставив выражения (2) и (3) в (1), получим:

$$\Delta N = N_0(1 - 2^{-t/T}) = \frac{m}{M} N_A (1 - 2^{-t/T}), \quad \Delta N = 2 \cdot 10^{19}.$$

**951.** Найти энергию ядерной реакции



Массы ядер  ${}^9_4\text{Be}$ ,  ${}^2_1\text{H}$ ,  ${}^{10}_5\text{B}$  равны соответственно 9,01219 а.е.м., 2,01410 и 10,01294 а.е.м, масса нейтрона  $m_n = 1,00867$  а.е.м.

**Решение.** Энергия ядерной реакции, выраженная в мегаэлектронвольтах,

$$Q = 931,5((m_{\text{Be}} + m_{\text{H}}) - (m_{\text{B}} + m_n)),$$

т. е. из суммы масс частиц до реакции вычитается сумма масс частиц после реакции и результат умножается на энергетический эквивалент атомной единицы массы. Подставив в это соотношение числовые значения, найдем  $Q = 4,359$  МэВ. Получили  $Q > 0$ . Следовательно, энергия выделяется.

**952.** Вычислить КПД двигателей атомного ледокола, если мощность их  $P = 3,2 \cdot 10^4$  кВт, а атомный реактор расходует  $m = 200$  г урана-235 в сутки. Вследствие деления одного ядра атома урана выделяется энергия  $E_0 = 200$  МэВ.

**Решение.** КПД двигателя

$$\eta = \frac{P}{P_n} \cdot 100\%, \quad (1)$$

где  $P_n$  — полная мощность:

$$P_n = E/t; \quad (2)$$

$E$  — энергия, выделяющаяся при делении урана, масса которого  $m$ , за время  $t$ . Число атомов, содержащихся в этом уране,

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

где  $M$  — молярная масса урана;  $N_A$  — постоянная Авогадро. Тогда

$$E = E_0 \frac{m}{M} N_A. \quad (3)$$



Из формул (1)–(3) следует, что

$$\eta = \frac{PMt}{E_0 m N_A} \cdot 100\%.$$

Подставим в последнюю формулу числовые значения, выраженные в СИ:  $P_1 = 3,2 \cdot 10^4 \cdot 10^3$  Вт;  $M = 235 \cdot 10^{-3}$  кг/моль;  $t = 1$  сут = 24 ч =  $24 \cdot 3600$  с = 86 400 с;  $E_0 = 200 \cdot 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж;  $m = 200 \cdot 10^{-3}$  кг;  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>. После вычислений получим  $\eta = 17\%$ .

**953.** Протон, летящий горизонтально со скоростью  $v = 4,6 \cdot 10^6$  м/с, сталкивается с неподвижным свободным атомом гелия. После удара протон отскакивает назад со скоростью  $v_1 = v/2$ , а атом переходит в возбужденное состояние. Вычислить длину волны света, который излучает атом гелия, возвращаясь в первоначальное состояние.

**Р е ш е н и е.** Возвращаясь в первоначальное состояние, атом излучает фотон, энергия которого  $E = W$ , где  $W$  – энергия возбуждения, т. е. энергия, которую получил атом при переходе в возбужденное состояние.

Энергия фотона  $E = h\nu = hc/\lambda$ , где  $h$  – постоянная Планка;  $\nu$  – частота света;  $c$  – скорость света в вакууме;  $\lambda$  – длина волны. Следовательно,  $hc/\lambda = W$ , откуда длина волны излучаемого света

$$\lambda = hc/W. \quad (1)$$

Чтобы найти энергию возбуждения  $W$ , составим уравнения на основании законов сохранения импульса и сохранения энергии:

$$m_1 v = -m_1 v/2 + m_2 v_2, \quad (2)$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 (v/2)^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + W, \quad (3)$$

где  $m_1$  – масса протона;  $m_2$  – масса атома гелия;  $v_2$  – скорость атома гелия после соударения.

Решив совместно уравнения (2) и (3) относительно  $W$ , найдем

$$W = \frac{3}{8} m_1 v^2 \left( 1 - \frac{3m_1}{m_2} \right). \quad (4)$$

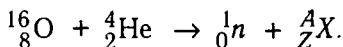
Подставив в выражение (1) значение  $W$ , полученное по формуле (4), найдем

$$\lambda = \frac{8hc}{3m_1v^2(1 - 3m_1/m_2)} \quad (5)$$

Масса протона  $m_1 = 1$  а.е.м. =  $1,66 \cdot 10^{-27}$  кг, масса атома гелия  $m_2 = 4$  а.е.м. =  $6,64 \cdot 10^{-27}$ , постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с, скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Подставив эти значения и значение скорости  $v$  в формулу (5), найдем  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$  м.

**954.** В ядро кислорода  ${}^{16}_8\text{O}$  ударяет  $\alpha$ -частица ( ${}^4_2\text{He}$ ) и застревает в нем, выбивая нейтрон ( ${}_0^1n$ ). Написать реакцию.

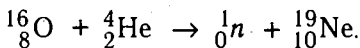
**Решение.** Пусть  ${}_Z^AX$  — ядро, образовавшееся в результате реакции. Тогда ядерную реакцию запишем так:



Учитывая, что в ядерной реакции сохраняется электрический заряд, т. е. сумма зарядов частиц и ядер, вступающих в реакцию, равна сумме зарядов образующихся частиц и ядер, составим равенство  $8 + 2 = 0 + Z$ , откуда  $Z = 10$ .

В ядерной реакции сохраняется полное число нуклонов, т. е. суммы массовых чисел частиц и ядер до и после реакции должны равняться друг другу. Поэтому  $16 + 4 = 1 + A$ , откуда  $A = 19$ .

По таблице Менделеева находим, что элемент, у которого ядро атома содержит 10 протонов, — это неон. Таким образом, ядерную реакцию можно окончательно записать так:



## Задачи для самостоятельного решения

**955.** Определить плотность ядерного вещества, считая радиус ядра атома  $R = R_0\sqrt[3]{A}$ , где  $R_0 = 1,3 \cdot 10^{-15}$  м,  $A$  — массовое число. Масса нуклона  $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг. Какова была бы масса тела объемом  $V = 1,0$  см<sup>3</sup>, если бы оно состояло из одних ядер?

**956.** В опытах Резерфорда  $\alpha$ -частицы в момент попадания на тонкую золотую фольгу имели скорость  $v = 2 \cdot 10^7$  м/с. Полагая вектор скорости  $\alpha$ -частицы совпадающим с прямой, соединяющей частицу и ядро атома золота (лобовое