ПРИЛОЖЕНИЯ

1. О приближенных вычислениях

При решении задач по физике надо помнить, что числовые значения физических величин являются *приближенными числами*. К приближенным числам относятся также табличные значения физических и математических величин, округленные значения точных чисел и др. Например, приближенными являются значения ускорения свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2, постоянной Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, числа $\pi = 3{,}14$, скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с и т. п.

Точными числами являются: числовые коэффициенты и показатели степени в формулах; коэффициенты, отражающие кратность и дольность единиц физических величин; числа, заданные определениями, и др. Например, в формуле объема шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ точными являются коэффициент $\frac{4}{3}$ и показатель степени 3; в равенстве 5 км = 5 · 1000 м число 1000 – точное.

Значащими цифрами приближенного числа (в десятичной записи) называются все его цифры, кроме нулей, стоящих в начале числа. Так, числа 0,0307; $2{,}019 \cdot 10^6$; 4,1228 имеют соответственно три, четыре и пять значащих цифр. Значащей цифра называется потому, что она означает соответствующий десятичный разряд этого числа. Например, в приближенном числе 2,03 цифра 2 означает разряд единиц, цифра 0 – разряд десятых долей, цифра 3 – разряд сотых долей. Тысячные и другие доли неизвестны, поэтому соответствующие разряды не означены никакими цифрами. В приближенном числе 0,0516 первые два нуля не являются значащими. Они служат только для указания соответствующих десятичных разрядов остальных цифр (цифр 5, 1 и 6). Приближенные числа 2,5 и 2,50 отличаются друг от друга тем, что в первом числе верными являются целые и десятые доли (сотые, тысячные и т. д. неизвестны), а во втором верными являются и сотые доли (т. е. известно, что их количество равно нулю). Этот пример показывает, что приписывание или отбрасывание нулей в последних разрядах приближенных чисел изменяет их точность. В случае точных чисел записи 2,5 и 2,50 не различаются.

Приближенные числа можно записывать в нормальной форме: первая значащая цифра ставится в разряд единиц, а остальные – в десятичные разряды после запятой и полученное число умножается на 10^n, где n – целое положительное или отрицательное число. Например, число 0,0516 в нормальной форме имеет вид $5{,}16 \cdot 10^{-2}$; число 2170 – $2{,}170 \cdot 10^3$.

Округление приближенного или точного числа – это уменьшение количества его значащих цифр. Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все его цифры, стоящие после n-го разряда. Если при этом первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя из сохраняемых не изменяется; если же первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя из сохраняемых увеличивается на единицу. Например, округлив число 25,84 до трех значащих цифр, получим 25,8, до двух – 26. Округление чисел 1782 и 0,0503 до двух значащих цифр дает соответственно $1{,}8 \cdot 10^3$ и $5{,}0 \cdot 10^{-2}$.

При решении задач следует соблюдать следующие *правила приближенных вычислений.*

1. *При сложении и вычитании* приближенных чисел в результате нужно сохранять столько десятичных знаков, сколько таких знаков в слагаемом с наименьшим их количеством. Например, $7{,}53 + 13{,}8 + 0{,}064 \approx 21{,}394 \approx 21{,}4$. Сумма округлена так, что она содержит один десятичный знак, как и второе слагаемое.

2. *При умножении и делении* в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько таковых в сомножителе с их наименьшим количеством. Например, $38{,}6 \cdot 0{,}52 \approx 20{,}072 \approx 20$. В промежуточных результатах нужно сохранять на одну значащую цифру больше. Например, $38{,}6 \cdot 0{,}52 \cdot 0{,}721 \approx 20{,}1 \cdot 0{,}721 \approx 14{,}4921 \approx 14$.

Если исходные сомножители различаются количеством значащих цифр на две и более, то сначала нужно все сомножители округлить так, чтобы каждый содержал значащих цифр на одну (запасную) больше, чем их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр, а затем перемножить. Например, $1{,}5 \cdot 4{,}825 \cdot 1{,}1936 \approx 1{,}5 \cdot 4{,}83 \cdot 1{,}19 \approx 8{,}62155 \approx 8{,}6$.

3. *При возведении в степень* в результате сохраняется столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное число, возводимое в степень. Например, $0{,}25^3 \approx 1{,}5625 \cdot 10^{-2} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-2}$.

4. *При извлечении корня* любой степени из приближенного числа в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении. Например, $\sqrt{2{,}12 \cdot 10^{-6}} \approx 1{,}45602 \approx 1{,}46 \cdot 10^{-3}$.

5. *При вычислении сложных выражений* нужно применять перечисленные выше правила в соответствии с видом математических действий. Например,

$$\frac{(12{,}438 + 5{,}7)\sqrt{7{,}39}}{8{,}32 \cdot 6{,}072 \cdot 4{,}3 \cdot 10^4}.$$

Сомножитель $4{,}3 \cdot 10^4$ имеет наименьшее число значащих цифр – две, поэтому результаты всех промежуточных вычислений нужно округлять до трех значащих цифр:

$$\frac{(12{,}438 + 5{,}7)\sqrt{7{,}39}}{8{,}32 \cdot 6{,}072 \cdot 4{,}3 \cdot 10^4} \approx \frac{18{,}1 \cdot 2{,}72}{50{,}5 \cdot 4{,}3 \cdot 10^4} \approx \frac{49{,}2}{2{,}17 \cdot 10^6} \approx 2{,}27 \cdot 10^{-5}.$$

Округлив до двух значащих цифр, получим $2{,}3 \cdot 10^{-5}$.

6. *Правило запасной цифры:* в промежуточных результатах, т. е. в тех приближенных числах, которые используются в последующих расчетах, следует сохранять на одну значащую цифру больше, чем это требуется правилами 1–5. В окончательном результате запасная цифра отбрасывается (см. предыдущий пример).