ДОПОЛНЕНИЕ

§ 1. Еще о множествах

Понятия и предложения, которые составили главу I нашей книги, называют иногда «наивной теорией множеств». Дело в том, что уже на ранней стадии развития теории множеств в ней были обнаружены парадоксы и противоречия, которые показывали, что теория множеств не может развиваться без четкой аксиоматики и правил вывода. Особенно много сомнений было высказано в свое время в связи с так называемой «аксиомой выбора», или эквивалентной ей леммой Цорна (см. ниже). Этот вопрос приобрел большую актуальность еще потому, что аксиома выбора оказалась необходимой для развития высших разделов самого анализа и других ветвей математики. Начиная с двадцатых годов, было предложено несколько систем теории множеств с аксиомами и правилами вывода, предохраняющими от классических парадоксов; к сожалению, ни для одной из этих систем не было доказано внутренней непротиворечивости. К. Гёдель показал (1938), что в одну из них, называемую «системой Неймана — Бернайса», присоединение аксиомы выбора не может внести противоречия, если сама эта система (без аксиомы выбора) является непротиворечивой. С другой стороны, Спеккер (1933) показал, что аксиома выбора не имеет места в другой системе, «системе Куайна», допускающей бо́льшую свободу в обращении с множествами. Наши дальнейшие построения будут относиться к множествам в смысле Неймана—Бернайса; мы не приводим здесь соответствующей аксиоматики, и читатель должен будет поверить нам, что эти построения выполнены в пределах названной системы.

Определение. Некоторое множество A называется *частично упорядоченным*, если для некоторых пар его элементов, называемых *сравнимыми*, определено *соотношение сравнения* $\leqslant$ (меньше или равно), причем выполнены следующие условия:

1) $x \leqslant x$ для каждого $x \in A$;
2) если $x \leqslant y$, $y \leqslant x$, то $x = y$;
3) если $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.

Каждое множество A можно считать частично упорядоченным, если считать, что соотношение сравнения $x \leqslant y$ определено только при $y = x$. Это — тривиальная частичная упорядоченность, которую естественнее было бы называть неупорядоченностью. Противоположный случай будет иметь место, если любые два элемента x, y множества A сравнимы, так что всегда выполняется соотношение $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$. В этом случае множество A называют просто *упорядоченным* или *линейно упорядоченным*.

Примеры. 1. Множество целых чисел линейно упорядочено при обычном определении знака $\leqslant$. Таково же множество вещественных чисел.

2. Множество точек плоскости (x, y) частично упорядочено, если считать, что $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$, если $y_1 = y_2$, $x_1 \leqslant x_2$.

3. Совокупность A, B ... подмножеств данного множества E частично упорядочена, если $A \leqslant B$ означает включение $A \subset B$.

Каждое подмножество частично упорядоченного множества также является частично упорядоченным с тем же отношением сравнения. При этом в частично упорядоченном множестве, вообще говоря, можно выделять и линейно упорядоченные подмножества, как в примере 2 подмножество точек (x, y), расположенное на одной горизонтальной прямой. Назовем линейно упорядоченное подмножество B частично упорядоченного подмножества A *максимальным*, если не существует более широкого линейно упорядоченного подмножества $B_1 \supset B$. Так, в частично упорядоченном множестве всех точек плоскости (пример 2) множество всех точек любой горизонтальной прямой является максимальным линейно упорядоченным подмножеством.

В дальнейшем существенную роль будет играть следующая аксиома.

Аксиома (Цорн, 1935). *Каждое частично упорядоченное множество содержит максимальное линейно упорядоченное подмножество.*

Введем еще два важных понятия.

Пусть имеется частично упорядоченное множество A и его подмножество B. Множество B называется *ограниченным* в A, если существует элемент $b_0 \in A$ такой, что $b \leqslant b_0$ при всех $b \in B$; всякий элемент $b_0 \in A$, удовлетворяющий этому условию, называется *верхней границей* множества B. Элемент x частично упорядоченного множества A называется *максимальным*, если не существует элемента $y \neq x$ большего, чем x.

В тривиальной частичной упорядоченности, о которой шла речь выше, каждый элемент x является максимальным. С другой стороны, частично упорядоченное множество может вовсе не иметь максимальных элементов (как множество целых чисел).

Следующая теорема дает достаточное условие существования максимальных элементов в данном частично упорядоченном множестве:

Теорема 1. (Цорн). *Если каждое линейно упорядоченное подмножество B частично упорядоченного множества A ограничено, то A содержит максимальный элемент.*

Доказательство. Пусть B_0 — максимальное линейно упорядоченное подмножество множества A; в силу аксиомы Цорна таковое существует. Пусть, далее, b_0 есть верхняя граница множества B_0. Мы утверждаем, что b_0 есть максимальный элемент. Действительно, если бы существовал элемент $a_0 \in A$ бо́льший, чем b_0, то множество $B_0 + a_0$ было бы снова линейно упорядоченным и более широким, чем B_0, что противоречило бы максимальности B_0.

На теореме 1 основано доказательство весьма важной в теории множеств теоремы, носящей название *теоремы выбора*. Коротко говоря, эта теорема утверждает, что если задана система множеств $\{A_\alpha\}$, то существует множество Z, содержащее ровно по одной точке из каждого из множеств A_α.

Теорема 2. (теорема выбора). *Пусть каждому индексу α из некоторой совокупности Λ отнесено множество A_α. Тогда существует множество элементов a_α такое, что при каждом фиксированном α элемент a_α принадлежит множеству A_α, и при этом индекс α пробегает все Λ.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathfrak{A}$ всех функций x_α, определенных на подмножествах множества Λ и принимающих значения в множествах A_α. Каждый фиксированный элемент y_α множества A_α определяет одну из таких функций, определенную только при одном значении α. Таким образом, $\mathfrak{A}$ не пусто. Между функциями x_α можно установить отношение сравнения, считая $x_\alpha \leqslant y_\alpha$, если функция y_α определена во всяком случае для тех же значений α, что и функция x_α (и, может быть, для иных значений α), и на области определения функции x_α мы имеем $y_\alpha = x_\alpha$. Рассмотрим любое линейно упорядоченное подмножество $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$. Пусть Λ_0 — объединение всех подмножеств множества Λ, на которых заданы функции $x_\alpha \in \mathfrak{A}_0$. В каждой точке $\alpha_0 \in \Lambda_0$ определены некоторые из функций $x_\alpha \in \mathfrak{A}_0$, причем из сравнимости этих функций вытекает, что все они принимают при $\alpha = \alpha_0$ одно и то же значение x_{α_0}. Это единственным образом определяемое значение задает на Λ_0 однозначную функцию y_α. Ясно, что она сравнима со всеми функциями $x_\alpha \in \mathfrak{A}_0$, и именно $x_\alpha \leqslant y_\alpha$. Мы видим, что линейно упорядоченное подмножество $\mathfrak{A}_0$ ограничено в $\mathfrak{A}$. По теореме 1 в $\mathfrak{A}$ имеется максимальный элемент a_α. Мы утверждаем, что функция a_α определена на всем множестве Λ. Действительно, если бы элемент $\alpha_0 \in \Lambda$ не входил в ее область определения, мы с помощью какого-нибудь элемента $y_0 \in A_{\alpha_0}$ могли бы расширить ее область определения, добавив значение y_0 в точке α_0, и a_α не была бы в $\mathfrak{A}$ максимальным элементом. Таким образом, a_α есть искомая функция.

На теореме выбора, явно или неявно, основаны многие построения анализа. Например, доказательство существования неизмеримого множества (стр. 161) фактически требует применения этой теоремы. Но и в более элементарных рассуждениях можно обнаружить использование теоремы выбора. Рассмотрим, например, доказательство эквивалентности двух известных определений непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 метрического пространства («$\varepsilon - \delta$-определение» и «lim-определение»). Обычное сведение второго определения к первому делается «от противного»: предполагается, что первое определение не выполнено; тогда при некотором $\varepsilon > 0$, придавая числу δ последовательно значения $\delta_n \to 0$ и выбирая в соответствующей δ_n-окрестности точки x_0 точку x_n так, чтобы иметь $|f(x_0) - f(x_n)| > \varepsilon$, получаем противоречие со вторым определением. Мы видим, что по пути нам фактически пришлось использовать возможность произвольного выбора.

Теорема выбора была задолго до Цорна сформулирована Р. Цермело (1904) в форме аксиомы. Цермело вывел из «аксиомы выбора» теорему — на первый взгляд несколько парадоксальную — о том, что каждое множество может быть «вполне упорядочено». Для выяснения смысла этого результата сравним порядковые свойства трех линейно упорядоченных множеств: множества A_1 всех вещественных чисел, множества A_2 всех вещественных неотрицательных чисел и множества A_3 всех натуральных чисел. Множество A_1 не имеет первого (наименьшего) элемента. Множество A_2 имеет первый элемент 0, но не имеет непосредственно следующего. Множество A_3 имеет первый элемент 1, имеет непосредственно следующий за ним — 2 и т. д.

Термин «непосредственно следующий» можно заменить более определенным «наименьший из всех следующих». Мы называем линейно упорядоченное множество A *вполне упорядоченным*, если у каждого непустого подмножества $C \subset A$ есть наименьший элемент. Обозначим наименьший элемент вполне упорядоченного множества A через 1, непосредственно следующий за ним — через 2, далее — 3, 4 и т. д. Если множество A не является конечным, то этот процесс приведет нас к построению счетного подмножества $B = (1, 2, \ldots, n, \ldots)$. Возможно, что B не исчерпывает всего A, и тогда есть элемент, непосредственно следующий за B; мы обозначим его через ω. Непосредственно следующий элемент за $B + \omega$ мы обозначим через $\omega + 1$; следующие элементы естественно обозначить $\omega + 2$, $\omega + 3$, ... Далее появится элемент $\omega + \omega = 2\omega$, $3\omega, \ldots, \omega^2 = \omega \cdot \omega$ и т. д. Таким образом, определяется некоторая каноническая система нумерации элементов вполне упорядоченного множества. Но в пределах этой нумерации укладывается каждый раз только конечное или счетное подмножество, и трудно представить себе несчетное вполне упорядоченное множество. Теперь мы можем оценить эффектную формулировку теоремы Цермело:

В каждое множество A можно внести соотношение сравнения $\leqslant$ так, что оно окажется при этом вполне упорядоченным.

Наметим вывод теоремы Цермело из теоремы Цорна.

Пусть дано произвольное множество A. Рассмотрим совокупность $\mathfrak{A}$ тех подмножеств A, которые м о г у т б ы т ь вполне упорядочены. При этом, если данное подмножество $B \subset A$ может быть вполне упорядочено несколькими способами, оно входит в совокупность $\mathfrak{A}$ столько раз, сколько имеется способов его полного упорядочения. Совокупность $\mathfrak{A}$ не пуста, она содержит, например, все одноэлементные подмножества множества A. В совокупность $\mathfrak{a}$ введем частичную упорядоченность, считая, что $B_1 \leqslant B_2$, если $B_1 \subset B_2$ соотношение порядка на B_1 то же, что и на B_2, и все элементы $B_2 - B_1$ больше, чем любой элемент B_1 (так что B_1 является, так сказать, началом B_2). Проверим, что выполнено условие теоремы Цорна. Пусть имеется линейно упорядоченная система $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$. По предположению для всех элементов, входящих в множества системы $\mathfrak{A}_0$, имеется единое полное упорядочение. Оно будет иметься тем самым и на объединении B всех подмножеств, входящих в $\mathfrak{A}_0$. Это объединение B вместе с получившимся на нем отношением сравнения входит в $\mathfrak{A}_0$, и тем самым $\mathfrak{A}_0$ ограничено. По теореме Цорна $\mathfrak{A}$ содержит максимальный элемент A_0. Элемент A_0 есть некоторое подмножество множества A, допускающее полное упорядочение. Мы утверждаем, что $A_0 = A$; действительно, если бы имелся элемент $z \in A$, не входящий в A_0, то мы рассмотрели бы подмножество $A_0 + z$ и считали бы z следующим за всеми элементами A_0; но тогда A_0 не было бы максимальным вполне упорядоченным подмножеством. Таким образом, $A_0 = A$, и теорема доказана.

§ 2. Теоремы о линейных функционалах

Следующая теорема позволяет строить в линейных пространствах разнообразные линейные функционалы. «Комплексная» ее формулировка идет от Г. Хана (1927) (хотя сам Хан рассматривал только вещественные пространства), «вещественная», налагающая на функционал $p(x)$ меньше условий,— от С. Банаха (1929).

Теорема (Хан — Банах).

а) *Пусть в линейном вещественном пространстве E задан функционал, $p(x)$, удовлетворяющий условиям*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \text{ при } \lambda \geqslant 0. \tag{1}$$

Пусть, далее, на подпространстве $E_0 \subset E$ задан линейный функционал $f(x)$ удовлетворяющий неравенству

$$f(x) \leqslant p(x). \tag{2}$$

Утверждается, что в пространстве E существует линейный функционал $f^*(x)$, совпадающий на E_0 с $f(x)$ и всюду в E удовлетворяющий неравенству

$$f^*(x) \leqslant p(x). \tag{3}$$

Иными словами, функционал $f(x)$ может быть продолжен с E_0 на все E с сохранением неравенства (2).

б) *Пусть в линейном комплексном пространстве E задан функционал $p(x)$, удовлетворяющий условиям*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \text{ при любом комплексном } \lambda. \tag{1'}$$

Пусть, далее, на подпространстве $E_0 \subset E$ задан линейный функционал $f(x)$, удовлетворяющий неравенству

$$|f(x)| \leqslant p(x). \tag{2'}$$

Утверждается, что в пространстве E существует линейный функционал $f^*(x)$, совпадающий на E_0 с $f(x)$ и всюду в E удовлетворяющий неравенству

$$|f^*(x)| \leqslant p(x). \tag{3'}$$

Иными словами, функционал $f(x)$ может быть продолжен с E_0 на все E с сохранением неравенства (2').