способами, оно входит в совокупность $\mathfrak{A}$ столько раз, сколько имеется способов его полного упорядочения. Совокупность $\mathfrak{A}$ не пуста, она содержит, например, все одноэлементные подмножества множества A. В совокупность $\mathfrak{a}$ введем частичную упорядоченность, считая, что $B_1 \leqslant B_2$, если $B_1 \subset B_2$ соотношение порядка на B_1 то же, что и на B_2, и все элементы $B_2 - B_1$ больше, чем любой элемент B_1 (так что B_1 является, так сказать, началом B_2). Проверим, что выполнено условие теоремы Цорна. Пусть имеется линейно упорядоченная система $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$. По предположению для всех элементов, входящих в множества системы $\mathfrak{A}_0$, имеется единое полное упорядочение. Оно будет иметься тем самым и на объединении B всех подмножеств, входящих в $\mathfrak{A}_0$. Это объединение B вместе с получившимся на нем отношением сравнения входит в $\mathfrak{A}_0$, и тем самым $\mathfrak{A}_0$ ограничено. По теореме Цорна $\mathfrak{A}$ содержит максимальный элемент A_0. Элемент A_0 есть некоторое подмножество множества A, допускающее полное упорядочение. Мы утверждаем, что $A_0 = A$; действительно, если бы имелся элемент $z \in A$, не входящий в A_0, то мы рассмотрели бы подмножество $A_0 + z$ и считали бы z следующим за всеми элементами A_0; но тогда A_0 не было бы максимальным вполне упорядоченным подмножеством. Таким образом, $A_0 = A$, и теорема доказана.

§ 2. Теоремы о линейных функционалах

Следующая теорема позволяет строить в линейных пространствах разнообразные линейные функционалы. «Комплексная» ее формулировка идет от Г. Хана (1927) (хотя сам Хан рассматривал только вещественные пространства), «вещественная», налагающая на функционал $p(x)$ меньше условий,— от С. Банаха (1929).

Теорема (Хан — Банах).

а) *Пусть в линейном вещественном пространстве E задан функционал, $p(x)$, удовлетворяющий условиям*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \text{ при } \lambda \geqslant 0. \tag{1}$$

Пусть, далее, на подпространстве $E_0 \subset E$ задан линейный функционал $f(x)$ удовлетворяющий неравенству

$$f(x) \leqslant p(x). \tag{2}$$

Утверждается, что в пространстве E существует линейный функционал $f^*(x)$, совпадающий на E_0 с $f(x)$ и всюду в E удовлетворяющий неравенству

$$f^*(x) \leqslant p(x). \tag{3}$$

Иными словами, функционал $f(x)$ может быть продолжен с E_0 на все E с сохранением неравенства (2).

б) *Пусть в линейном комплексном пространстве E задан функционал $p(x)$, удовлетворяющий условиям*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \text{ при любом комплексном } \lambda. \tag{1'}$$

Пусть, далее, на подпространстве $E_0 \subset E$ задан линейный функционал $f(x)$, удовлетворяющий неравенству

$$|f(x)| \leqslant p(x). \tag{2'}$$

Утверждается, что в пространстве E существует линейный функционал $f^*(x)$, совпадающий на E_0 с $f(x)$ и всюду в E удовлетворяющий неравенству

$$|f^*(x)| \leqslant p(x). \tag{3'}$$

Иными словами, функционал $f(x)$ может быть продолжен с E_0 на все E с сохранением неравенства (2').

Доказательство. Элементы подпространства E_0 будем обозначать через y. Вначале мы покажем, что можно расширить функционал f с подпространства E_0 на подпространство E_1, имеющее на одно измерение больше, чем E_0.

Точнее говоря, мы сделаем следующее: возьмем произвольно вектор x_0, не принадлежащий E_0, и покажем, что можно построить линейный функционал $f_1(x)$, определенный на подпространстве E_1 всех линейных комбинаций векторов $y \in E$ и вектора x_0, так, что $f_1(x)$ будет совпадать на E_0 с $f(x)$ и будет ограниченным на E_1 тем же функционалом $p(x)$ (в комплексном случае — по модулю).

Построение будем производить вначале для вещественного случая. Мы определим функционал f_1, естественно по формуле

$$f_1(y) = f_1(y + \lambda x_0) = f(y) + \lambda f_1(x_0), \tag{4}$$

где число $f_1(x_0)$ подлежит определению, с тем, чтобы было выполнено условие (2). Условие (2) можно теперь записать в форме

$$f_1(y) = f(y) + \lambda f_1(x_0) \leqslant p(y + \lambda x_0). \tag{5}$$

При $\lambda > 0$ это неравенство можно записать в виде

$$f\left(\frac{y}{\lambda}\right) + f_1(x_0) \leqslant p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right)$$

или

$$f(y_1) + f_1(x_0) \leqslant p(y_1 + x_0), \quad y_1 = \frac{y}{\lambda}. \tag{6}$$

При $\lambda < 0$ мы положим $\mu = -\lambda > 0$; тогда мы получим

$$f(y) - \mu f_1(x_0) \leqslant p(y - \mu x_0),$$

или, деля на μ и обозначая $y_2 = \frac{y}{\mu}$,

$$f(y_2) - f_1(x_0) \leqslant p(y_2 - x_0). \tag{7}$$

Обратно, если число $f_1(x_0)$ при любых $y_1 \in E_0$ и $y_2 \in E_0$ удовлетворяет неравенствам (6) и (7), то удовлетворяется и неравенство (5) при любом $y \in E_0$ и любом λ. Неравенства (6), (7) можно записать в форме

$$f(y_2) - p(y_2 - x_0) \leqslant f_1(x_0) \leqslant p(y_1 + x_0) - f(y_1).$$

Мы видим, что решение поставленной задачи зависит от соотношения между числами

$$\alpha = \sup_{y_2 \in E_0} \{f(y_2) - p(y_2 - x_0)\}$$

и

$$\beta = \inf_{y_1 \in E_0} \{p(y_1 + x_0) - f(y_1)\}.$$

Если $\alpha \leqslant \beta$, то наша задача разрешима; если же оказалось бы, что $\alpha > \beta$, то величину $f_1(x_0)$, удовлетворяющую условию (2), найти было бы нельзя. Покажем, что в действительности всегда $\alpha \leqslant \beta$. Для этого нужно проверить, что при любых y_1 и y_2 из E_0 выполняется неравенство

$$f(y_2) - p(y_2 - x_0) \leqslant p(y_1 + x_0) - f(y_1),$$

или, что то же,

$$f(y_1) + f(y_2) \leqslant p(y_1 + x_0) + p(y_2 - x_0). \tag{8}$$

Покажем, что неравенство (8) на самом деле имеет место. Действительно, мы имеем

$$f(y_1)+f(y_2)=f(y_1+y_2)\leqslant p(y_1+y_2)=$$
$$=p(y_1+x_0+y_2-x_0)\leqslant p(y_1+x_0)+p(y_2-x_0),$$

что и требуется. Итак, искомое число $f_1(x_0)$ существует, а следовательно искомое продолжение функционала f возможно.

В комплексном случае мы разложим функционал $f(y)$ на вещественную и мнимую составляющие:

$$f(y)=g(y)+ih(y).$$

Функционалы $g(y)$ и $h(y)$ — вещественные линейные функционалы в пространстве E_0, рассматриваемом как вещественное пространство, и вместе с функционалом f ограничены тем же функционалом $p(x)$. Далее мы имеем

$$f(iy)=if(y)=g(iy)+ih(iy)=ig(y)-h(y),$$

откуда $h(y)=-g(iy)$ и, следовательно,

$$f(y)=g(y)-ig(iy).$$

По доказанному функционал $g(y)$ можно продолжить с сохранением неравенства (2′) на вещественное подпространство $E_{1/2}$ вещественных линейных комбинаций векторов $y\in E_0$ и вектора x_0, а затем — также с сохранением этого неравенства — на подпространство $E_1\supset E_{1/2}$ вещественных линейных комбинаций векторов $y\in E_0$, x_0 и ix_0. Положим на E_1

$$f(x)=g(x)-ig(ix).$$

Мы получим расширение функционала f с E_0 на E_1. Проверим, что он остается линейным функционалом в комплексном пространстве E_1. Достаточно проверить, что $f(ix)=if(x)$. Действительно,

$$f(ix)=g(ix)-ig(-x)=i[-ig(ix)-g(-x)]=i[g(x)-ig(ix)]=if(x).$$

Остается показать, что в E_1 для функционала f выполняется неравенство (3′). При заданном x_0 выберем вещественное число θ так, чтобы $e^{i\theta}f(x)$ было вещественным неотрицательным числом. Тогда $e^{i\theta}f(x)=f(e^{i\theta}x)=g(e^{i\theta}x)$ и, следовательно,

$$|f(x)|=|e^{i\theta}f(x)|=g(e^{i\theta}x)\leqslant p(e^{i\theta}x)=p(x),$$

что и требовалось.

Итак, всегда — в вещественном или комплексном случае — возможно распространить с выполнением неравенства (3) или (3′) заданный функционал с данного подпространства $E_0\neq E$ на некоторое более широкое E_1. Покажем, что существует распространение функционала f с выполнением соответствующего неравенства на все пространство E. Для этого используем теорему Цорна из § 1. Именно, рассмотрим совокупность $\mathfrak{A}$ тех подпространств пространства E, на которые искомое распространение возможно. При этом будем считать, что данное подпространство E_α входит в $\mathfrak{A}$ столько раз, сколькими способами возможно распространение функционала f на E_α. Все семейство $\mathfrak{A}$ можно частично упорядочить, считая $E_\alpha\leqslant E_\beta$, если $E_\alpha\subset E_\beta$ и значения функционала f, распространенного на E_α и на E_β, совпадают на подпространстве E_α. Пусть $\mathfrak{A}_0$ — линейно упорядоченное подсемейство в $\mathfrak{A}$. На объединении E_ω всех подпространств E_α, входящих в $\mathfrak{A}$, функционал f однозначно определен и удовлетворяет неравенству (3) или (3′). Следовательно, E_ω само входит в $\mathfrak{A}$ и, очевидно, является верхней границей для всех $E_\alpha\in\mathfrak{A}_0$. Тем самым $\mathfrak{A}_\alpha$ ограничено. Согласно теореме Цорна, в семействе $\mathfrak{A}$ есть максимальный элемент E^*. На подпространство E^* можно распространить линейный функционал f с выполнением неравенства (3) или (3′). Если бы было $E^* \neq E$, то по доказанному функционал f можно было бы распространить и на более широкое подпространство, что противоречило бы максимальности E^*. Итак, $E^* = E$, и теорема доказана.

Приведем теперь некоторые следствия из теоремы Хана — Банаха.

1. В качестве функционала $p(x)$ (в вещественном и в комплексном случае) можно взять норму элемента x или ее кратное. При этом получается, в частности, что *функционал, удовлетворяющий на подпространстве $E_0 \subset E$ неравенству*

$$|f(x)| \leqslant C\|x\|,$$

— следовательно, имеющий на подпространстве E_0 норму, не превосходящую C,— может быть продолжен на все пространство E с сохранением этой нормы. Это наиболее часто встречающееся следствие теоремы Хана — Банаха.

2. *Для каждого элемента $x_0 \neq 0$ нормированного пространства E существует линейный функционал f, определенный на всем E, имеющий норму* 1 *и такой, что $f(x_0) \neq 0$.* Действительно, полагая $f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$, мы получаем линейный функционал с нормой 1, определенный на одномерном подпространстве, порожденном элементом x_0. Продолжая его на все E с сохранением нормы, получим искомый функционал.

3. *Для всякого замкнутого подпространства $E_0 \neq E$ и элемента $x_0 \notin E_0$ существует линейный функционал f, имеющий норму* 1, *равный* 0 *на E_0 и такой, что $f(x_0) \neq 0$.*

Действительно, определим функционал f на подпространстве E_1, состоящем из всех векторов вида $x = y + \lambda x_0$ ($y \in E_0$, λ — любое число), формулой

$$f(x) = c\lambda,$$

где c — некоторая положительная постоянная. Мы имеем на E_1:

$$\|f\| = \sup_{y \in E_0} \frac{c|\lambda|}{\|y + \lambda x_0\|} = \sup_{y \in E_0} \frac{c}{\left\|\frac{y}{\lambda} + x_0\right\|} = \frac{c}{\inf\limits_{y \in E_0}\left\|\frac{y}{\lambda} + x_0\right\|} = \frac{c}{d},$$

где $d = \inf\limits_{y \in E_0}\left\|\frac{y}{\lambda} + x_0\right\|$ есть расстояние от элемента x_0 до подпространства E_0; d положительно, поскольку E_0 замкнуто. Мы видим, что, если положить $c = d$, мы получим на E_1 функционал с нормой 1. Продолжая его далее на все E с сохранением нормы, получим искомый функционал.

Замечание 1. Следствие 3 можно сформулировать еще и так: *для любого подпространства $E_0 \not\subset E$ и элемента x_0, не входящего в замыкание E_0, существует линейный функционал с нормой* 1, *равный* 0 *на E_0 и такой, что $f(x_0) \neq 0$.*

Замечание 2. Функционал $p(x)$, фигурирующий в комплексной формулировке теоремы Хана — Банаха, есть «почти» норма; он отличается от нормы тем, что может обращаться в нуль не только при $x \neq 0$, а и на целом многообразии. Мы будем называть такой функционал $p(x)$ *полунормой.* В вещественном случае функционал $p(x)$ по своим свойствам еще дальше от нормы; он может принимать даже и отрицательные значения.

Замечание 3. В некоторых построениях анализа теорема Хана — Банаха может быть применена с большой пользой. Например, при выводе общей формы линейного непрерывного функционала в пространстве $C(a, b)$ (гл. VI, § 7, п. 1), минуя рассуждения с продолжением функционала на более широкое пространство (этап I) мы могли бы прямо использовать эту теорему.

При этом легко проверяется, так же как и на этапе II, что получающаяся функция $F(\xi)=f[\chi_{[a,\xi]}(x)]$ имеет ограниченное изменение. Но непрерывность справа этой функции, обеспечивающая полную аддитивность меры, вообще говоря, не будет иметь места. Если для одного переменного это обстоятельство не является существенным, поскольку интегрирующую функцию всегда можно исправить в точках разрыва, сделав ее непрерывной справа (п. 2 § 6), то для нескольких переменных возможность такого исправления представляется значительно более сложной.

Рассмотрим некоторые факты, связанные с последовательностью линейных функционалов.

Теорема (Банах и Штейнгауз, 1927). *Если значения линейных функционалов $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ ограничены на каждом фиксированном элементе $x \in E$, то они равномерно ограничены на единичном шаре пространства E; иначе говоря, нормы функционалов $f_n(x)$ ограничены в совокупности.*

Доказательство. Если последовательность линейных функционалов $f_n(x)$ не ограничена в единичном шаре $\|x\| \leqslant 1$, то, очевидно, она не ограничена и в любом шаре $\|x\| \leqslant r$; более того, она не ограничена и в любом шаре $U(x_0, r)=\|x-x_0\| \leqslant r$, так как если бы для $x \in U(x_0, r)$ числа $f_n(x)$ и $f_n(x_0)$ были ограничены, то были бы ограничены и числа $f_n(x-x_0)= =f_n(x)-f_n(x_0)$, что уже невозможно, так как $x-x_0$ пробегает шар радиуса r с центром в начале. Заметив это, выберем в единичном шаре элемент x_1, $\|x_1\|<1$, на котором какой-то из функционалов f_n — обозначим его через f_1 — превосходит по модулю 1:

$$|f_1(x_1)|>1.$$

Так как f_1 — непрерывный функционал, то существует шар $\|x-x_1\| \leqslant r_1$, который целиком содержится в исходном шаре $\|x\| \leqslant 1$ и в котором выполняется неравенство

$$|f_1(x)|>1.$$

Внутри этого шара найдем элемент x_2 и функционал f_2 так, чтобы иметь

$$|f_2(x_2)|>2,$$

и затем выберем новый шар $\|x-x_2\| \leqslant r_2$, заключенный в предыдущем, во всех точках которого выполняется неравенство

$$|f_2(x)|>2.$$

Продолжая таким образом далее, получим последовательность вложенных друг в друга шаров с радиусами $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, стремящимися к нулю. В общей точке x_0 всех этих шаров (существующей в силу полноты пространства R и леммы § 5 гл. II) имеют место неравенства

$$|f_1(x_0)|>1, \quad |f_2(x_0)|>2, \ldots, \quad |f_n(x_0)|>n, \ldots,$$

т. е. числа $f_n(x_0)$ не ограничены, что противоречит условию теоремы.

Следствие. *Если последовательность линейных непрерывных функционалов $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ сходится при каждом $x \in E$, то предельный функционал $f(x)=\lim f_n(x)$ также является линейным и непрерывным.*

Действительно, линейные свойства функционала $f(x)$ получаются предельным переходом в равенстве $f_n(\alpha_x+\beta_y)=\alpha f_n(x)+\beta f_n(y)$; а из теоремы Банаха вытекает, что ограничены и значения этого функционала в единичном шаре.

Задачи. 1. На подпространстве E_0 линейного пространства E (без нормы) задан линейный функционал f. Доказать, что он допускает линейное продолжение на все пространство E.

Указание. Использовать схему доказательства теоремы Хана — Банаха (не заботясь о значении $f(x_0)$).

2. Показать, что в бесконечномерном нормированном пространстве существует всюду определенный линейный функционал, для которого

$$\sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \infty.$$

Указание. Изменить схему доказательства теоремы Хана — Банаха с тем, чтобы при каждом расширении «на одно измерение» норма функционала увеличивалась на единицу.

Начать с произвольного функционала, определенного на одномерном пространстве; после счетного числа расширений на одно измерение получится неограниченный функционал. Для дальнейшего расширения (до всего E) применить задачу 1.

3. Доказать полноту следующих пространств числовых (комплексных) последовательностей (с естественными линейными операциями):

а) пространства c_0 последовательностей, стремящихся к нулю:

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots), \qquad \lim \xi_n = 0,$$

с нормой

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|;$$

б) пространства l_1 последовательностей

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty,$$

с нормой

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|,$$

в) пространства m ограниченных числовых последовательностей

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots), \qquad \sup_n |\xi_n| < \infty,$$

с нормой

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|.$$

Примечание. Пространство c_0 есть замкнутое подмножество пространства m; при этом c_0 сепарабельно, а m — не сепарабельно (см. задачу 14 к § 3 гл. II), поскольку m обладает множеством элементов мощности континуум с взаимными расстояниями 1 (см. теорему 3 § 5 гл. I).

4. Найти общий вид линейных непрерывных функционалов (и указать их нормы) в пространствах c_0 и l_1 (задача 8 к § 9).

Указание. Обозначим $e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots)$; в указанных пространствах каждый элемент разлагается в ряд по e_n, сходящийся по норме пространства. Поэтому достаточно найти числа $f(e_n)$ и выяснить их свойства.

Отв. В пространстве c_0 линейный непрерывный функционал $f(x)$ задается элементом $\alpha \in l_1$, так что при $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \in c_0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n, \qquad \|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|.$$

В пространстве l_1 линейный непрерывный функционал $g(\alpha)$ задается элементом $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots) \in m$, так что при $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in l_1$

$$g(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \alpha_n, \qquad \|g\| = \sup_n |\eta_n|.$$

Примечание. Могло бы показаться, что и любой функционал на пространстве m можно было бы записать в форме

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\xi_n, \tag{9}$$

где β_n — фиксированная последовательность чисел и $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$. Но это не так. В следующей задаче мы увидим, что в пространстве m есть линейный функционал $f(x)$, который каждую сходящуюся последовательность $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ переводит в ее предел $\lim \xi_n$. Такой функционал не может иметь вид (9). Действительно, применяя (9) к элементу e_n, мы получили бы, что $f(e_n)=\beta_n=0$; отсюда $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n\xi_n\equiv 0$, что не имеет места, так как, например, $f(e)=1$, где $e=(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

5. На пространстве m всех ограниченных комплексных последовательностей $x=(\xi_0, \ldots, \xi_n, \ldots)$ с нормой $\|x\|=\sup_n|\xi_n|$ построить линейный функционал с нормой 1, переводящий каждую последовательность x в число ξ, заключенное в наименьшем выпуклом множестве, содержащем все предельные точки последовательности ξ_n (и, в частности, каждую сходящуюся последовательность — в ее предел).

Указание. Пусть $m_r \subset m$ означает совокупность вещественных последовательностей. Определить на m_r полунорму $p(x)=\overline{\lim}\,|\xi_n|$. Вещественный линейный функционал f, равный 1 на элементе $e=(1, 1, \ldots, 1 \ldots)$ и имеющий тем самым на подпространстве $\{\lambda e\}$ полунорму 1, продолжить на все m_r с сохранением полунормы. Используя равенства $|f(x)|\leqslant p(x)$, $f(x-\lambda e)=f(x)-\lambda$, проверить, что значение функционала $f(x)$ расположено между $\overline{\lim}\,\xi_n$ и $\underline{\lim}\,\xi_n$. Для комплексной последовательности $x+iy$ положить $f(x+iy)=f(x)+if(y)$ (проверить, что полученный функционал линейный). Его значение (комплексное число) лежит заведомо не правее вертикальной прямой, проходящей через самую правую предельную точку последовательности ξ_n. Заменяя x на $e^{i\theta}x$ и проводя аналогичное рассуждение, получить требуемое.

6 (Продолжение). Фиксируем элемент $\alpha=(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, для которого $\alpha_j\geqslant 0$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\alpha_j=1$. С помощью элемента α от ограниченной последовательности $x=(\xi_0, \ldots, \xi_n, \ldots)$ можно перейти к новой ограниченной последовательности $\alpha * x=(\eta_0, \ldots, \eta_n, \ldots)$, где $\eta_n=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\alpha_j\xi_{j+n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ Это действие будем называть *α-операцией.*

Показать, что все предельные точки последовательности $\alpha * x$ заключены в выпуклой оболочке множества всех предельных точек последовательности x.

Указание. Число η_n есть «среднее взвешенное» из чисел $\xi_{0+n}, \xi_{1+n}, \ldots$

7 (Продолжение). Пусть в условии задачи 6 условие $\alpha_j\geqslant 0$ заменено на условие $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\alpha_j|=A<\infty$ (числа α_j могут быть теперь любыми комплексными числами). Показать, что предельные точки последовательности $\alpha * x$ заключены в круге, концентрическом с кругом $Q(x)$, заключающим все предельные точки последовательности x, и радиусом в A раз больше радиуса круга $Q(x)$.

Указание. Достаточно рассмотреть случай, когда центр круга $Q(x)$ в начале координат.

Примечание. Будем говорить, что последовательность x имеет некоторое число ξ своим *α-пределом*, если последовательность $\alpha * x$ имеет число ξ своим обычным пределом.

Результат задач 6—7 показывает, что если последовательность x имеет обычный предел ξ, то она имеет и α-предел, равный ξ при любом выборе α; далее, α-предел, если он существует, сам заключен в A-растяжении круга $Q(x)$. В частности, $p(\alpha * x) \leqslant Ap(x)$.

8 (Продолжение). Улучшить конструкцию функционала f в задаче 5 так, чтобы каждая последовательность, имеющая α-предел (при заданном фиксированном α), переводилась функционалом f в значение этого предела.

Указание. Подпространство m_α последовательностей с нулевым α-пределом не содержит в замыкании по полунорме $p(x)$ элемента e, поскольку $Ap(e-x) \geqslant p(\alpha * (e-x)) = p(\alpha * e - \alpha * x) = p(e) = 1$. Положить $f(x) = 0$ на m_α, $f(e) = 1$ и продолжить с сохранением полунормы на все m.

9 (Продолжение). Улучшить конструкцию функционала f так, чтобы каждая последовательность, имеющая α-предел хотя бы при одном α, переводилась функционалом f в значение этого предела.

Указание. Если x имеет α-предел, а y имеет β-предел, то $x+y$ имеет γ-предел, где

$$\gamma_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \beta_{n-j}.$$

Поэтому совокупность m_0 всех элементов $x \in m$, имеющих нулевой α-предел при каком-нибудь α, есть подпространство.

Примечание. Существуют последовательности $x \in m$, не имеющие α-предела ни при каком α; например, этим свойством обладает последовательность $(1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, где промежутки, состоящие сплошь из нулей, неограниченно увеличиваются.

10 (Продолжение). Последовательность x называется *квазинулевой*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, $\alpha_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_j = 1$, такой, что $p(\alpha * x) < \varepsilon$.

Показать, что функционал f (задача 5) можно выбрать так, что для всякой квазинулевой последовательности будет $f(x) = 0$.

Указание. Квазинулевые последовательности образуют подпространство, и $e = (1, \ldots, 1, \ldots)$ не входит в его замыкание по полунорме $p(x)$.

11 (Продолжение). Всякая последовательность вида $\mu * x$, где $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_n, \ldots)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\mu_n| < \infty$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu_n = 0$, является квазинулевой.

Указание. Проверить, что утверждение справедливо для $\mu_0 = (1, -1, 0, 0, \ldots)$ и ее сдвигов. Представить произвольную квазинулевую последовательность μ в виде линейной комбинации μ_0, ее сдвигов и последовательности z с $p(z) < \varepsilon$.

12 (Продолжение). Показать, что функционал f, построенный в задаче 10, обладает свойством $f(\alpha * x) = f(x)$ для любого α.

Указание. Последовательность $x - \alpha * x$ является квазинулевой в силу результата задачи 11.

Примечание. В частности, при $\alpha = (0, 1, 0, \ldots)$ последовательность $\alpha * x$ есть сдвиг последовательности x; таким образом, значение функционала $f(x)$ не меняется при сдвиге последовательности x.

13. Если числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ таковы, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k \alpha_k$ сходится при каждом $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots) \in c_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$.

Указание. Из условия следует, что последовательность функционалов на $c_0 f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \alpha_k$ сходится для каждого элемента $x \in c_0$. Применить далее теорему Банаха — Штейнгауза и общий вид линейного функционала на c_0 (задача 4).

14. T-предел ограниченной последовательности. Пусть дана бесконечная матрица $T = (t_{jk}), j = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющая условиям:

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |t_{jk}| \leqslant C$, C не зависит от j;

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} t_{jk} = s_j, \quad \lim\limits_{j \to \infty} s_j = 1$;

(3) $\lim\limits_{j \to \infty} t_{jk} = 0$ при любом $k = 1, 2, \ldots$

(матрица Теплица). Пусть далее $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ — ограниченная последовательность. Составим последовательность Tx из чисел $t_j(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} t_{jk}\xi_k$; предел последовательности Tx, если он существует, называется *T-пределом* последовательности x. Показать, что:

а) если последовательность x сходится (в обычном смысле) к пределу ξ, то последовательность Tx также сходится к пределу ξ;

б) если произвольная матрица $T = (t_{jk})$ обладает тем свойством, что для любой сходящейся последовательности $x = \{\xi_n\}, \lim \xi_n = \xi$, числа $t_j(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} t_{jk}\xi_k$ существуют и также сходятся к ξ, то матрица T обладает свойствами (1) — (3).

Указание. а) Достаточно рассмотреть случай $\xi = 0$. б) Применяя матрицу T к элементу $(0, \ldots, 0, 1_k, 0, \ldots)$, получить (3). Применяя матрицу T к элементу $(1, \ldots, 1, \ldots)$, получить (2). Сходимость каждого из рядов (1) вывести из задачи 13. При этом функционалы $t_j(x)$ сходятся при каждом $x \in c_0$; в силу теоремы Банаха — Штейнгауза их нормы ограничены в совокупности, что дает (1).

15. Показать, что α-пределы (задачи 6—12) являются частным случаем T-пределов.

Отв. Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, то соответствующая матрица T имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|.$$

16. Построить матрицу Теплица T так, чтобы для $e = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ и $\hat{e} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ иметь $T\hat{e} = \hat{e} + e$.

Отв. Например:

$$T=\left\|\begin{array}{cccccccc} 1+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & & 0 & \dots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right\|.$$

Примечание. Наличие такой матрицы T показывает, что на пространстве m не существует линейного функционала f, обладающего свойствами $f(Tx)=f(x)$, $f(e)=1$; таким образом, результат задачи 12, относящейся к α-пределам, не может быть перенесен на T-пределы.

17. Доказать, что замкнутое подпространство пространства $L_1(-\infty, \infty)$, содержащее некоторую функцию $\varphi(x)\not\equiv 0$, все ее сдвиги и все их произведения на экспоненты $e^{ix\sigma}$, совпадает со всем пространством $L_1(-\infty, \infty)$.

Указание. Применить следствие 3 теоремы Хана — Банаха, общий вид линейного непрерывного функционала на L_1 и теорему единственности преобразования Фурье.