ГЛАВА I
МНОЖЕСТВА

§ 1. Множества, подмножества, включения

Когда рассматривают несколько каких-нибудь объектов («элементов»), употребляют такие слова, как «совокупность», «собрание», «множество». Например, можно говорить о множестве студентов в аудитории, о множестве песчинок на пляже, о множестве вершин многоугольника или о множестве его сторон. Указанные примеры обладают тем свойством, что в каждом из них соответствующее множество состоит *из определенного числа элементов* (которое, может быть, практически и нелегко установить). Такие множества мы будем называть *конечными*.

В математике часто приходится иметь дело с совокупностями, состоящими не из конечного числа объектов; простейшими примерами служат множество всех натуральных чисел 1, 2, 3, ... и множество всех точек отрезка. Такие множества мы будем называть *бесконечными*. К числу множеств мы причисляем и *пустое множество* — множество, не содержащее ни одного элемента.

Так, например, как видно на рис. 1, множество вещественных корней уравнения $\frac{\sin x}{x}=b$ бесконечно при $b=0$ (оно состоит в этом случае из всех

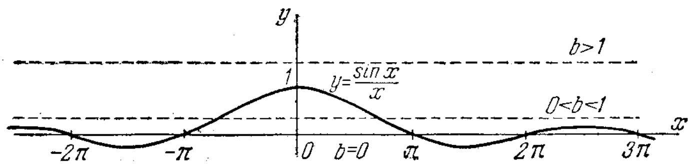

Рис. 1.

значений $x=0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ...), конечно, но не пусто при $0<|b|\leqslant 1$ (можно подсчитать для каждого b, сколько именно корней оно имеет) и пусто при $|b|>1$ (все значения функции $\frac{\sin x}{x}$ по модулю не превосходят 1, и уравнение $\frac{\sin x}{x}=b$ при $|b|>1$ вовсе не имеет корней).

Как правило, мы будем обозначать множества большими буквами A, B, C, ..., а их элементы — малыми буквами. Запись $a \in A$ (или $A \ni a$) означает, что a есть элемент множества A; запись $a \overline{\in} A$ (или $A \overline{\ni} a$) означает, что a не есть элемент множества A. Запись $A \subset B$ (или $B \supset A$) означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B; в этом случае множество A называют *подмножеством* множества B. Наиболее широким из подмножеств множества B является, очевидно, само множество B; наиболее узким — пустое множество. Любое из остальных подмножеств множества B фактически содержит элементы B, причем заведомо не все его элементы. Каждое из таких подмножеств называется *истинным* подмножеством. Знаки $\in$, $\ni$, $\subset$, $\supset$ называются *знаками включения*. Если имеют место включения $A \subset B$, $B \subset A$, то это означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B и, обратно, каждый элемент множества B является элементом множества A; таким образом, множества A и B состоят в данном случае из одних и тех же элементов и, значит, совпадают друг с другом. Этот факт записывается равенством $A = B$.

Существуют различные формы задания множеств. Наиболее простая состоит в указании всех элементов множества, например $A = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$. Иная, часто употребляемая форма состоит в указании свойств элементов множества; например, $A = \{x : x^2 - 1 < 0\}$ есть множество всех x, для которых выполняется указанное после двоеточия неравенство.

§ 2. Операции над множествами

Мы рассмотрим здесь три простые операции, которые можно производить над множествами: *объединение*, *пересечение* и *дополнение*.

Опишем сначала операцию объединения множеств. Пусть даны множества A, B, C, ... Рассмотрим совокупность всех элементов, каждый из которых принадлежит *хотя бы к одному* из множеств A, B, C, ... Эта совокупность есть новое множество, которое и называют *объединением* множеств A, B, C, ...

Так, объединение множества $A = \{6, 7, 8, \ldots\}$ (всех натуральных чисел, больших чем 5) и множества $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$ (всех натуральных чисел, делящихся на 3) есть множество

$$S = \{3, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$$

(всех натуральных чисел, за исключением 1, 2, 4 и 5).

Введем теперь операцию пересечения множеств. *Пересечением* множеств A, B, C, ... называется совокупность элементов, входящих в *каждое* из указанных множеств.