Как правило, мы будем обозначать множества большими буквами A, B, C, ..., а их элементы — малыми буквами. Запись $a \in A$ (или $A \ni a$) означает, что a есть элемент множества A; запись $a \bar{\in} A$ (или $A \bar{\ni} a$) означает, что a не есть элемент множества A. Запись $A \subset B$ (или $B \supset A$) означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B; в этом случае множество A называют *подмножеством* множества B. Наиболее широким из подмножеств множества B является, очевидно, само множество B; наиболее узким — пустое множество. Любое из остальных подмножеств множества B фактически содержит элементы B, причем заведомо не все его элементы. Каждое из таких подмножеств называется *истинным* подмножеством. Знаки $\in$, $\ni$, $\subset$, $\supset$ называются *знаками включения*. Если имеют место включения $A \subset B$, $B \subset A$, то это означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B и, обратно, каждый элемент множества B является элементом множества A; таким образом, множества A и B состоят в данном случае из одних и тех же элементов и, значит, совпадают друг с другом. Этот факт записывается равенством $A = B$.

Существуют различные формы задания множеств. Наиболее простая состоит в указании всех элементов множества, например $A = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$. Иная, часто употребляемая форма состоит в указании свойств элементов множества; например, $A = \{x : x^2 - 1 < 0\}$ есть множество всех x, для которых выполняется указанное после двоеточия неравенство.

§ 2. Операции над множествами

Мы рассмотрим здесь три простые операции, которые можно производить над множествами: *объединение*, *пересечение* и *дополнение*.

Опишем сначала операцию объединения множеств. Пусть даны множества A, B, C, ... Рассмотрим совокупность всех элементов, каждый из которых принадлежит *хотя бы к одному* из множеств A, B, C, ... Эта совокупность есть новое множество, которое и называют *объединением* множеств A, B, C, ...

Так, объединение множества $A = \{6, 7, 8, \ldots\}$ (всех натуральных чисел, больших чем 5) и множества $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$ (всех натуральных чисел, делящихся на 3) есть множество

$$S = \{3, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$$

(всех натуральных чисел, за исключением 1, 2, 4 и 5).

Введем теперь операцию пересечения множеств. *Пересечением* множеств A, B, C, ... называется совокупность элементов, входящих *в каждое* из указанных множеств.

Так, в предыдущем примере пересечением множеств

$$A=\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots\},$$
$$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \ldots\}$$

является множество

$$D=\{6,\ 9,\ 12,\ \ldots\}.$$

Может оказаться, что множества A, B, C, ... не имеют ни одного общего элемента. Тогда их пересечение есть пустое множество; в этом случае говорят, что множества A, B, C, ... *не пересекаются*. Например, три числовых множества

$$A=\{1,\ 2\},\quad B=\{2,\ 3\},\quad C=\{1,\ 3\}$$

не пересекаются (хотя каждые два из них имеют общие элементы).

Участвовать в объединении и пересечении могут как конечные, так и бесконечные совокупности множеств. Например, можно построить объединение множеств точек всех прямых на плоскости, проходящих через заданную точку O. Этим объединением будет, очевидно, множество всех точек плоскости. Пересечением указанных множеств будет множество, состоящее из единственной точки O.

Объединение S множеств A, B, C, ... называют иногда *суммой* и записывают в форме $S=A+B+C+\ldots$; пересечение D называют *произведением* и обозначают $D=ABC\ldots$. Некоторые основания для таких «арифметических» наименований имеются. Например, для любых трех множеств A, B, C справедливо равенство

$$(A+B)\,C=AC+BC.$$

Приведем доказательство этого равенства, как простой, но типичный образец рассуждений о равенствах множеств.

Как мы говорили, два множества считаются равными, если каждый элемент одного из них есть в то же время элемент другого. Таким образом, мы должны показать, что каждый элемент x, входящий в $(A+B)\,C$ (левая часть), входит в $AC+BC$ (правая часть) и, обратно, каждый элемент y, входящий в $AC+BC$, входит и в $(A+B)\,C$. Пусть сначала x принадлежит $(A+B)\,C$. Будучи элементом пересечения множеств $A+B$ и C, элемент x должен входить в каждое из них; таким образом, мы имеем

$$x\in A+B \text{ и } x\in C.$$

Так как x входит в объединение A и B, то x непременно входит в одно из слагаемых, например в A. Но включения $x\in A$, $x\in C$ влекут за собой $x\in AC$, откуда $x\in AC+BC$. Если же x входит не в A, а в B, то таким же образом получаем $x\in BC$, $x\in AC+BC$, что и требовалось. Обратно, если y принадлежит сумме $AC+BC$, то y принадлежит одному из слагаемых, например $y\in BC$. Но тогда $y\in B$ и $y\in C$; далее, из $y\in B$ следует $y\in A+B$ и окончательно $y\in (A+B)\,C$.

Случай $y \in AC$ разбирается аналогично, чем доказательство и завершается.

Следует, однако, заметить, что далеко не все арифметические правила переносятся на операции с множествами. Например, для множеств A, B, C имеют место формулы

$$A+A=A,$$
$$AA=A,$$
$$A+BC=(A+B)(A+C),$$

уже непохожие на обычные арифметические равенства. Мы предлагаем читателю самостоятельно убедиться в справедливости этих формул.

Укажем еще на некоторые принятые обозначения для сумм и пересечений множеств. Для объединения множеств употребляются знаки $\sum$ и $\bigcup$, так что, например, запись

$$S=\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \text{ или } S=\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$$

означает объединение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$

Для пересечения множеств употребляются знаки $\prod$ и $\bigcap$, так что, например, записи

$$D=\prod_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \text{ или } D=\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$$

означают пересечение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$

Переходим теперь к операции дополнения.

Если множество B является подмножеством множества A, то совокупность всех элементов множества A, не принадлежащих B, называется *дополнением* множества B до множества A и обозначается CB или $A-B$[1]).

Отметим очевидную формулу

$$(A-B)+B=A.$$

Заметим, что для двух произвольных множеств A и B формула

$$(A+B)-B=A$$

вообще неверна; она верна только в случае, когда A и B не имеют общих элементов.

Из более сложных формул отметим следующую, которая часто будет далее встречаться:

$$C\sum_\nu B_\nu=\prod_\nu CB_\nu; \tag{1}$$

[1]) C — начальная буква слова «complement» — дополнение (франц.).

прочитать ее можно так: *дополнение к объединению некоторых множеств есть пересечение их дополнений.*

Докажем справедливость этой формулы. Пусть $x \in C\sum_\nu B_\nu$; тогда $x \overline{\in} \sum_\nu B_\nu$; это означает, что при любом ν $x \overline{\in} B_\nu$, т. е. $x \in CB_\nu$; но тогда $x \in \prod_\nu CB_\nu$. Обратно, если $x \in \prod_\nu CB_\nu$, то $x \in CB_\nu$ при любом ν, т. е. $x \overline{\in} B_\nu$ при любом ν; но тогда $x \overline{\in} \sum_\nu B_\nu$, т. е. $x \in C\sum_\nu B_\nu$, что и требовалось.

Применяя к обеим частям равенства (1) еще раз операцию C и обозначая $A_\nu = CB_\nu$, мы получим формулу

$$\sum_\nu CA_\nu = C\prod_\nu A_\nu, \tag{2}$$

т. е. *дополнение к пересечению некоторых множеств есть объединение их дополнений.*

Приведенные результаты можно соединить в форме общего правила: *символ дополнения C можно менять местом со знаками* Σ и Π, *при этом один из этих знаков переходит в другой.*

§ 3. Эквивалентность множеств

Мы желаем теперь установить правила, по которым можно было бы сравнивать различные множества *по запасу* элементов в них.

Для конечных множеств здесь никакой проблемы нет: пересчитывая элементы каждого из двух конечных множеств A и B, мы можем непосредственно выяснить, какое из этих множеств более богато элементами по сравнению с другим. Естественно называть конечные множества A и B эквивалентными, если число элементов в них одинаково. Это определение эквивалентности, однако, непосредственно не переносится на случай бесконечных множеств. Мы сейчас придадим ему другую форму, в которой перенесение на бесконечные множества уже станет возможным. Для этого заметим, что при установлении эквивалентности или неэквивалентности конечных множеств A и B на самом деле нет необходимости в пересчете элементов того и другого множества. Например, если множество A есть множество слушателей в аудитории, а B есть множество стульев в этой же аудитории, то вместо того, чтобы пересчитывать отдельно слушателей и отдельно стулья, можно предложить каждому слушателю занять один из свободных стульев, и тогда станет сразу ясно, без всяких подсчетов, эквивалентны ли указанные множества или нет.

Процедура, которая производится в указанном примере, описываемая абстрактным образом, есть *установление соответствия между множествами A и B.*