прочитать ее можно так: *дополнение к объединению некоторых множеств есть пересечение их дополнений.*

Докажем справедливость этой формулы. Пусть $x \in C\sum_{\nu} B_{\nu}$; тогда $x \overline{\in} \sum_{\nu} B_{\nu}$; это означает, что при любом ν $x \overline{\in} B_{\nu}$, т. е. $x \in CB_{\nu}$; но тогда $x \in \prod_{\nu} CB_{\nu}$. Обратно, если $x \in \prod_{\nu} CB_{\nu}$, то $x \in CB_{\nu}$ при любом ν, т. е. $x \overline{\in} B_{\nu}$ при любом ν; но тогда $x \overline{\in} \sum_{\nu} B_{\nu}$, т. е. $x \in C\sum_{\nu} B_{\nu}$, что и требовалось.

Применяя к обеим частям равенства (1) еще раз операцию C и обозначая $A_{\nu} = CB_{\nu}$, мы получим формулу

$$\sum_{\nu} CA_{\nu} = C\prod_{\nu} A_{\nu}, \qquad (2)$$

т. е. *дополнение к пересечению некоторых множеств есть объединение их дополнений.*

Приведенные результаты можно соединить в форме общего правила: *символ дополнения C можно менять местом со знаками* Σ и Π, *при этом один из этих знаков переходит в другой.*

§ 3. Эквивалентность множеств

Мы желаем теперь установить правила, по которым можно было бы сравнивать различные множества *по запасу* элементов в них.

Для конечных множеств здесь никакой проблемы нет: пересчитывая элементы каждого из двух конечных множеств A и B, мы можем непосредственно выяснить, какое из этих множеств более богато элементами по сравнению с другим. Естественно называть конечные множества A и B эквивалентными, если число элементов в них одинаково. Это определение эквивалентности, однако, непосредственно не переносится на случай бесконечных множеств. Мы сейчас придадим ему другую форму, в которой перенесение на бесконечные множества уже станет возможным. Для этого заметим, что при установлении эквивалентности или неэквивалентности конечных множеств A и B на самом деле нет необходимости в пересчете элементов того и другого множества. Например, если множество A есть множество слушателей в аудитории, а B есть множество стульев в этой же аудитории, то вместо того, чтобы пересчитывать отдельно слушателей и отдельно стулья, можно предложить каждому слушателю занять один из свободных стульев, и тогда станет сразу ясно, без всяких подсчетов, эквивалентны ли указанные множества или нет.

Процедура, которая производится в указанном примере, описываемая абстрактным образом, есть *установление соответствия между множествами A и B.*

Введем следующее важное определение. Если каждому элементу множества A каким-либо образом сопоставлен единственный элемент множества B, и при этом всякий элемент множества B оказывается сопоставленным одному и только одному элементу множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*. Множества A и B в этом случае и называются *эквивалентными*.

Это новое определение эквивалентности годится для любых множеств, не обязательно конечных; так, например, бесконечное множество A натуральных чисел $1, 2, \ldots$ эквивалентно множеству B целых отрицательных чисел $-1, -2, \ldots$, причем взаимно однозначное соответствие между множествами A и B устанавливается посредством правила: каждому числу $n \in A$ сопоставляется число $-n \in B$.

Точно так же множество натуральных чисел $1, 2, \ldots$ эквивалентно множеству всех четных положительных чисел $2, 4, \ldots$; соответствие между ними осуществляется по правилу $n \longrightarrow 2n$.

На этом примере мы видим, что множество может быть эквивалентно своему истинному подмножеству; ситуация такого рода, разумеется, может осуществляться лишь для бесконечных множеств.

Соотношение эквивалентности обозначается знаком $\sim$. Легко видеть, что это соотношение транзитивно: если $A \sim B$, а $B \sim C$, то $A \sim C$. Если два множества эквивалентны, то говорят также, что они «равномощны», «имеют одну и ту же мощность».

Множество точек отрезка $[0, 1]$ эквивалентно множеству точек

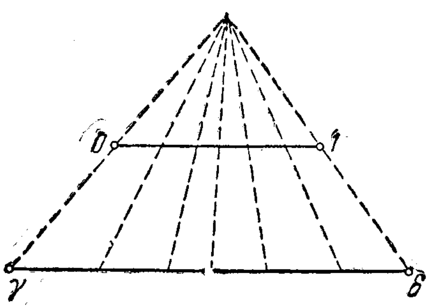

Рис. 2.

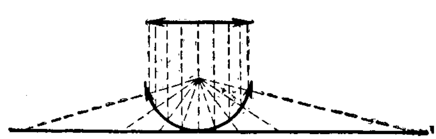

Рис. 3.

любого другого отрезка $[\gamma, \delta]$; соответствие осуществляется, например, с помощью центрального проектирования, как показано на рис. 2. Точно так же эквивалентны множества точек двух различных интервалов [1]).

Множество точек интервала эквивалентно множеству точек прямой (рис. 3).

[1]) *Отрезок* $[\alpha, \beta]$ определяется неравенствами $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ (концы включены!), *интервал* (α, β) — неравенствами $\alpha < x < \beta$ (концы не включены!).

Не так просто ответить на вопрос, эквивалентно ли множество точек отрезка множеству точек интервала.

Имеется следующая общая теорема, которая, в частности, содержит положительный ответ на этот вопрос:

Теорема (Ф. Бернштейн, 1898). *Если множество A эквивалентно части множества B, а множество B эквивалентно части множества A, то множества A и B эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим через B_1 часть множества B, эквивалентную множеству A, и через A_1 часть множества A, эквивалентную множеству B. Во взаимно однозначном соответствии $B \sim A_1$ элементы множества B_1 отвечают в A_1 некоторым элементам, совокупность которых мы обозначим через A_2. Мы имеем цепочку включений

$$A \supset A_1 \supset A_2,$$

причем $A_2 \sim A$, так как $A_2 \sim B_1$, $B_1 \sim A$. Если мы докажем, что $A \sim A_1$, то теорема будет доказана (так как $A_1 \sim B$). При взаимно однозначном отображении A на A_2 множество $A_1 \subset A$ переходит в некоторое множество $A_3 \subset A_2$, множество $A_2 \subset A_1$ переходит в некоторое множество $A_4 \subset A_3$, множество $A_3 \subset A_2$ переходит в некоторое множество $A_5 \subset A_4$ и т. д. Кроме того,

множество $A - A_1$ переходит в $A_2 - A_3$,
множество $A_1 - A_2$ переходит в $A_3 - A_4$,
множество $A_2 - A_3$ переходит в $A_4 - A_5$

и т. д.

Отсюда следует, что множества

$$A - A_1,\ A_2 - A_3,\ A_4 - A_5,\ A_6 - A_7 \text{ и т. д.}$$

попарно эквивалентны; объединение множеств без общих точек

$$(A - A_1) + (A_2 - A_3) + (A_4 - A_5) + \ldots$$

эквивалентно объединению

$$(A_2 - A_3) + (A_4 - A_5) + (A_6 - A_7) + \ldots$$

Обозначим через D пересечение множеств A, A_1, A_2, ... Имеют место следующие равенства:

$$A = D + (A - A_1) + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \ldots \quad (1)$$
$$A_1 = D + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + (A_3 - A_4) + \ldots \quad (2)$$

Докажем первое равенство. Пусть $a \in A$; покажем, что a входит в правую часть равенства (1). В самом деле, если a входит в каждое из множеств A_1, $A_2, \ldots$, то $a \in D$, и утверждение доказано. Если же a не принадлежит какому-либо из A_n, то пусть A_k — первое из таких множеств, так что заведомо $a \in A_{k-1}$; но тогда $a \in A_k - A_{k-1}$ и, следовательно, входит в правую часть (1). Обратно, если a входит в правую часть (1), то, очевидно, $a \in A$, так как каждое из слагаемых правой части есть подмножество множества A.

Точно так же доказывается равенство (2).

Равенства (1) и (2) можно записать в виде

$$A = [D + (A_1 - A_2) + (A_3 - A_4) + \ldots] + [(A - A_1) + (A_2 - A_3) + \ldots], \quad (3)$$
$$A_1 = [D + (A_1 - A_2) + (A_3 - A_4) + \ldots] + [(A_2 - A_3) + (A_4 - A_5) + \ldots]. \quad (4)$$

В правых частях обоих равенств в первой квадратной скобке стоит одно и то же множество, а во второй квадратной скобке — соответственно множества, эквивалентность которых была доказана выше. Теперь легко установить эквивалентность множеств A и A_1. Именно, поставим в соответствие каждой точке множества $D+(A_1-A_2)+(A_3-A_4)+\ldots\subset A$ эту же точку в множестве A_1; далее, каждой точке a множества $(A-A_1)+(A_2-A_3)+\ldots$ сопоставим ту точку множества $(A_2-A_3)+\ldots$, которая отвечает точке a в силу установленной выше эквивалентности этих множеств. Равенства (3) и (4) показывают, что при этом сопоставлении исчерпываются все элементы множеств A и A_1. Таким образом, между множествами A и A_1 существует взаимно однозначное соответствие, что и требуется.

Используя теорему Бернштейна, легко проверить, что множества точек отрезка и интервала равномощны. Действительно, заданный отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит подмножество, эквивалентное множеству точек заданного интервала (γ, δ) (любой внутренний к $[\alpha, \beta]$ интервал), а заданный интервал (γ, δ) содержит подмножество, эквивалентное множеству точек заданного отрезка $[\alpha, \beta]$ (любой внутренний отрезок). Применяя теорему Бернштейна, получаем, что $[\alpha, \beta]\sim(\gamma, \delta)$, что и требовалось.

§ 4. Счетные множества

Определение. Множество, эквивалентное множеству всех натуральных чисел, 1, 2, ..., называют *счетным множеством*.

Можно сказать иначе: множество счетно, если все его элементы можно занумеровать всеми натуральными числами. Приведем несколько простых теорем о счетных множествах.

1. *Всякое бесконечное подмножество B счетного множества A также счетно.* Действительно, элементы B можно заново перенумеровать по порядку их следования в A (причем, поскольку B бесконечно, придется для нумерации использовать все натуральные числа).

2. *Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств есть счетное множество.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай двух множеств. Пусть имеются счетные множества $A=(a_1, a_2, \ldots)$ и $B=(b_1, b_2, \ldots)$. Выпишем в одну строку все элементы обоих этих множеств по следующему правилу:

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ \ldots$$

Теперь все эти элементы можно заново перенумеровать по порядку следования в строке. Элемент, встречающийся два раза (т. е. такой, который входит и в A, и в B), естественно, приобретает номер в первый раз, а во второй раз пропускается. В результате каждый элемент объединения A и B получит свой номер, что и требуется.

Так, множество всех целых чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ счетно, как объединение двух счетных множеств $1, 2, 3, \ldots$ и $0, -1, -2, \ldots$