В правых частях обоих равенств в первой квадратной скобке стоит одно и то же множество, а во второй квадратной скобке — соответственно множества, эквивалентность которых была доказана выше. Теперь легко установить эквивалентность множеств A и A_1. Именно, поставим в соответствие каждой точке множества $D+(A_1-A_2)+(A_3-A_4)+\ldots \subset A$ эту же точку в множестве A_1; далее, каждой точке a множества $(A-A_1)+(A_2-A_3)+\ldots$ сопоставим ту точку множества $(A_2-A_3)+\ldots$, которая отвечает точке a в силу установленной выше эквивалентности этих множеств. Равенства (3) и (4) показывают, что при этом сопоставлении исчерпываются все элементы множеств A и A_1. Таким образом, между множествами A и A_1 существует взаимно однозначное соответствие, что и требуется.

Используя теорему Бернштейна, легко проверить, что множества точек отрезка и интервала равномощны. Действительно, заданный отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит подмножество, эквивалентное множеству точек заданного интервала (γ, δ) (любой внутренний к $[\alpha, \beta]$ интервал), а заданный интервал (γ, δ) содержит подмножество, эквивалентное множеству точек заданного отрезка $[\alpha, \beta]$ (любой внутренний отрезок). Применяя теорему Бернштейна, получаем, что $[\alpha, \beta] \sim (\gamma, \delta)$, что и требовалось.

§ 4. Счетные множества

Определение. Множество, эквивалентное множеству всех натуральных чисел, 1, 2, ..., называют *счетным множеством*.

Можно сказать иначе: множество счетно, если все его элементы можно занумеровать всеми натуральными числами. Приведем несколько простых теорем о счетных множествах.

1. *Всякое бесконечное подмножество B счетного множества A также счетно.* Действительно, элементы B можно заново перенумеровать по порядку их следования в A (причем, поскольку B бесконечно, придется для нумерации использовать все натуральные числа).

2. *Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств есть счетное множество.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай двух множеств. Пусть имеются счетные множества $A=(a_1, a_2, \ldots)$ и $B=(b_1, b_2, \ldots)$. Выпишем в одну строку все элементы обоих этих множеств по следующему правилу:

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ \ldots$$

Теперь все эти элементы можно заново перенумеровать по порядку следования в строке. Элемент, встречающийся два раза (т. е. такой, который входит и в A, и в B), естественно, приобретает номер в первый раз, а во второй раз пропускается. В результате каждый элемент объединения A и B получит свой номер, что и требуется.

Так, множество всех целых чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ счетно, как объединение двух счетных множеств $1, 2, 3, \ldots$ и $0, -1, -2, \ldots$

Совершенно аналогичным образом теорема доказывается в случае трех, четырех или вообще любого конечного числа счетных множеств. В случае счетной совокупности счетных множеств, например для совокупности множеств

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots\}, \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_k &= \{a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}, \ldots\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

изменение будет только в том, что правило для записывания всех элементов всех этих множеств в одну строку придется применить несколько более хитрое, например:

$$a_{11};\ a_{21},\ a_{22},\ a_{12};\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{23},\ a_{13};\ a_{41},\ a_{42},\ a_{43},\ a_{44},\ a_{34},\ a_{24},\ a_{14};\ \ldots$$

в остальном же доказательство не изменяется.

3. *Множество всех рациональных чисел (т. е. чисел вида $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа) счетно.*

Действительно, множество всех рациональных чисел есть объединение следующих счетных множеств:

1) множества A_1 всех целых чисел $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

2) множества A_2 всех дробей вида $\frac{n}{2}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

3) множества A_3 всех дробей вида $\frac{n}{3}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

. . . .

k) множества A_k всех дробей вида $\frac{n}{k}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

. . . .

Множества $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ составляют счетную совокупность множеств; так как каждое из них счетно, то в силу п. 2 и их объединение счетно, что и утверждалось.

4. *Если $A=(a_1, \ldots, a_k, \ldots)$ и $B=(b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ — счетные множества, то множество всех пар (a_k, b_n) $(k, n=1, 2, \ldots)$ также является счетным.*

Действительно, множество всех этих пар распадается в счетную совокупность счетных множеств

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_n), \ldots\}, \\ A_2 &= \{(a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_n), \ldots\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_k &= \{(a_k, b_1), (a_k, b_2), \ldots, (a_k, b_n), \ldots\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

и в силу п. 2 является счетным множеством.

Этому примеру можно придать геометрический смысл: паре (a_k, b_n) отвечает точка на плоскости с координатами a_k, b_n; мы видим, в частности, что множество всех точек плоскости, имеющих обе рациональные координаты, счетно.

5. *Множество всех многочленов* $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ (*любых степеней*) *с рациональными коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *счетно*. Множество всех многочленов указанного вида есть объединение счетной совокупности множеств A_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где A_n означает множество многочленов степени $\leqslant n$. Поэтому, имея в виду теорему п. 2, достаточно показать, что каждое из множеств A_n счетно. При $n = 0$ речь идет о счетности множества самих рациональных чисел, которая установлена в п. 3. Далее будем действовать по индукции: предположим, что доказана счетность множества A_n, и докажем счетность множества A_{n+1}.

Каждый элемент множества A_{n+1} можно записать в виде

$$Q(x) + a_{n+1} x^{n+1},$$

где $Q(x)$ — многочлен степени $\leqslant n$ с рациональными коэффициентами, т. е. элемент множества A_n, и a_{n+1} — рациональное число.

Множество многочленов $Q(x)$ по предположению счетно, и множество чисел a_{n+1} также счетно. Таким образом, каждому элементу множества A_{n+1} можно сопоставить пару $(Q(x), a_{n+1})$, каждая из составляющих которой пробегает счетное множество значений. В силу п. 4 множество A_{n+1} также счетно, что и требовалось.

Замечание. Разумеется, в данном случае несущественно, что мы рассматривали именно многочлены, т. е. линейные комбинации степеней x. Можно было бы рассматривать линейные комбинации, например, тригонометрических или иных функций. Можно вообще вместо многочлена $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ с рациональными коэффициентами рассматривать комплекс $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, каждая координата которого — элемент некоторого счетного множества; приведенное выше доказательство по сути дела показывает, что множество всех таких комплексов также есть счетное множество.

6. *Множество всех алгебраических чисел* (*т. е. корней многочленов с рациональными коэффициентами*) *счетно*.

Согласно п. 5 все многочлены с рациональными коэффициентами мы можем занумеровать натуральными числами, так что эти многочлены будут образовывать последовательность

$$P_1(x), \; P_2(x), \; \ldots, \; P_n(x), \; \ldots$$

Но каждый из указанных многочленов имеет некоторое конечное число корней. Выписывая в одну строку сначала все корни многочлена $P_1(x)$, затем все корни многочлена $P_2(x)$ и т. д., мы получаем возможность занумеровать и все алгебраические числа, что и требовалось.

Задачи. 1. Доказать, что указанные ниже множества являются счетными:

а) Множество всех отрезков $a \leqslant x \leqslant b$ с рациональными концами a и b.

б) Множество всех конечно-звенных ломаных на плоскости с вершинами в рациональных точках.

2. Доказать, что следующие множества или конечны, или счетны:

а) Множество взаимно не пересекающихся интервалов на оси.

б) Множество замкнутых самопересекающихся линий в форме восьмерки (на плоскости), не имеющих попарно общих точек.

в) Множество точек разрыва монотонной функции.

г) Множество M вещественных положительных чисел при условии, что все конечные суммы $\sum x_j$, $x_j \in M$, ограничены фиксированным числом A.

Указания. а) В каждом из имеющихся интервалов можно выбрать по рациональной точке. б) Внутри каждой из двух половин восьмерки выбрать по точке с рациональными координатами. в) Интервалы разрыва $(f(c-0),\ f(c+0))$ монотонной функции $f(x)$ не пересекаются. г) Вне любого отрезка $[0, \varepsilon]$ может лежать лишь конечное число точек M.

Замечание. В. В. Грушин и В. П. Паламодов доказали аналогичные утверждения для множества непересекающихся фигур на плоскости, имеющих тройные точки (как у буквы Т), а также для множества непересекающихся фигур в пространстве, содержащих особые точки типа «кнопки» или участки типа «листа Мёбиуса».

3. Разложить множество натуральных чисел 1, 2, ... в счетную совокупность попарно не пересекающихся счетных множеств.

4. (Задача-шутка). I. Как-то в гости к математику X пришли его друзья братья N. В передней они сняли шляпы и повесили на вешалку. Когда они собрались уходить и стали надевать шляпы, оказалось, к величайшему конфузу хозяина, что одной шляпы не хватает. В переднюю за это время никто не заходил.

II. Когда братья N снова пришли в гости к X (в шляпах), они опять повесили шляпы на вешалку в переднюю. Когда они стали, уходя, надевать шляпы, одна шляпа оказалась лишней. Хозяин и гости твердо помнили, что до их прихода на вешалке не было ни одной шляпы.

III. В следующий раз гости надели шляпы и ушли, а хозяин, проводив гостей на улицу и вернувшись, обнаружил, что шляп на вешалке оказалось столько же, сколько было до ухода гостей.

IV. Наконец, в четвертый раз гости пришли без шляп, а уходя, воспользовались шляпами, оставшимися от прошлого посещения. Проводив гостей, хозяин опять увидел шляпы на вешалке, — столько же, сколько было до прихода гостей.

Как объяснить все эти парадоксальные события?

См. указание на стр. 23.

§ 5. Множества мощности континуума

Оказывается, что существуют бесконечные множества, элементы которых нельзя перенумеровать натуральными числами. Такие множества называются *несчетными*. Типичным примером несчетного множества является *континуум* — множество всех точек какого-либо отрезка.