члена $P_1(x)$, затем все корни многочлена $P_2(x)$ и т. д., мы получаем возможность занумеровать и все алгебраические числа, что и требовалось.

Задачи. 1. Доказать, что указанные ниже множества являются счетными:

а) Множество всех отрезков $a \leqslant x \leqslant b$ с рациональными концами a и b.

б) Множество всех конечно-звенных ломаных на плоскости с вершинами в рациональных точках.

2. Доказать, что следующие множества или конечны, или счетны:

а) Множество взаимно не пересекающихся интервалов на оси.

б) Множество замкнутых самопересекающихся линий в форме восьмерки (на плоскости), не имеющих попарно общих точек.

в) Множество точек разрыва монотонной функции.

г) Множество M вещественных положительных чисел при условии, что все конечные суммы $\sum x_j$, $x_j \in M$, ограничены фиксированным числом A.

Указания. а) В каждом из имеющихся интервалов можно выбрать по рациональной точке. б) Внутри каждой из двух половин восьмерки выбрать по точке с рациональными координатами. в) Интервалы разрыва $(f(c-0), f(c+0))$ монотонной функции $f(x)$ не пересекаются. г) Вне любого отрезка $[0, \varepsilon]$ может лежать лишь конечное число точек M.

Замечание. В. В. Грушин и В. П. Паламодов доказали аналогичные утверждения для множества непересекающихся фигур на плоскости, имеющих тройные точки (как у буквы Т), а также для множества непересекающихся фигур в пространстве, содержащих особые точки типа «кнопки» или участки типа «листа Мёбиуса».

3. Разложить множество натуральных чисел 1, 2, ... в счетную совокупность попарно не пересекающихся счетных множеств.

4. (Задача-шутка). I. Как-то в гости к математику X пришли его друзья братья N. В передней они сняли шляпы и повесили на вешалку. Когда они собрались уходить и стали надевать шляпы, оказалось, к величайшему конфузу хозяина, что одной шляпы не хватает. В переднюю за это время никто не заходил.

II. Когда братья N снова пришли в гости к X (в шляпах), они опять повесили шляпы на вешалку в переднюю. Когда они стали, уходя, надевать шляпы, одна шляпа оказалась лишней. Хозяин и гости твердо помнили, что до их прихода на вешалке не было ни одной шляпы.

III. В следующий раз гости надели шляпы и ушли, а хозяин, проводив гостей на улицу и вернувшись, обнаружил, что шляп на вешалке оказалось столько же, сколько было до ухода гостей.

IV. Наконец, в четвертый раз гости пришли без шляп, а уходя, воспользовались шляпами, оставшимися от прошлого посещения. Проводив гостей, хозяин опять увидел шляпы на вешалке, — столько же, сколько было до прихода гостей.

Как объяснить все эти парадоксальные события?

См. указание на стр. 23.

§ 5. Множества мощности континуума

Оказывается, что существуют бесконечные множества, элементы которых нельзя перенумеровать натуральными числами. Такие множества называются *несчетными*. Типичным примером несчетного множества является *континуум* — множество всех точек какого-либо отрезка.

Теорема 1 (Г. Кантор, 1874). *Множество всех точек отрезка* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *несчетно.*

Доказательство. Допустим, что, напротив, множество всех точек отрезка $[0, 1]$ счетно и все их можно расположить в последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Имея эту последовательность, построим следующим образом последовательность вложенных друг в друга отрезков.

Разделим отрезок $[0, 1]$ на три равные части. Где бы ни находилась точка x_1, она не может принадлежать одновременно всем трем отрезкам $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, и среди них можно указать такой, который не содержит точки x_1 (ни внутри, ни на границе); этот отрезок мы обозначим через Δ_1. Далее, обозначим через Δ_2 ту из трех равных частей отрезка Δ_1, на которой не лежит точка x_2. Когда таким образом будут построены отрезки $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n$, мы обозначим через Δ_{n+1} ту из трех равных третей отрезка Δ_n, на которой не лежит точка x_{n+1}, и т. д. Бесконечная последовательность отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ в силу известной теоремы анализа имеет общую точку ξ. Эта точка ξ принадлежит каждому из отрезков Δ_n и, следовательно, не может совпадать ни с одной из точек x_n. Но это показывает, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ не может исчерпывать всех точек отрезка $[0, 1]$, в противовес первоначальному предположению. Теорема доказана.

Мы видели, что все рациональные числа отрезка $[0, 1]$ составляют счетное множество. Остальные числа отрезка называются иррациональными; таковы, например, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\frac{\pi}{4}$ и т. д. Мы видим теперь, что иррациональных чисел «значительно больше», чем рациональных: точнее говоря, иррациональные числа образуют заведомо несчетное множество (иначе, если бы множество иррациональных чисел было счетным, то было бы счетным и множество всех чисел $0 \leqslant x \leqslant 1$, как объединение двух счетных множеств). Более того, так как алгебраические иррациональные числа (корни многочленов с рациональными коэффициентами) образуют также счетное множество (§ 4), то несчетное множество составляют числа, не являющиеся корнями многочленов с рациональными коэффициентами,— трансцендентные числа.

Между прочим, приведенное рассуждение доказывает и само существование трансцендентных чисел — нисколько не очевидное заранее.

Всякое множество, эквивалентное множеству всех точек отрезка $[0, 1]$, *называется множеством мощности континуума.*

Мы видели, что множества точек любого отрезка $[a, b]$, любого интервала (α, β) и, наконец, всей прямой $-\infty < x < \infty$ эквивалентны множеству точек отрезка $[0, 1]$ и, следовательно, все они имеют мощность континуума. Следующие теоремы позволяют указать новые широкие классы множеств мощности континуума.

Первая из теорем относится к любому бесконечному множеству:

Теорема 2. *Если к бесконечному множеству A добавить конечное или счетное множество B, то в сумме получится множество, эквивалентное исходному множеству A.*

Для доказательства выберем в множестве A произвольным образом счетное подмножество C, и пусть $D = A - C$. Имеем

$$A = D + C,$$
$$A + B = D + C + B.$$

Множества C и B счетны, поэтому и объединение $C + B$ — также счетное множество; существует, следовательно, взаимно однозначное отображение C на $C + B$. Используя это отображение (соответствие) и, кроме того, приведя в соответствие точкам множества D эти же самые точки, получим искомое взаимно однозначное соответствие между множествами A и $A + B$[1]).

Следствие 1. *Если из бесконечного множества Q выбросить конечное или счетное множество B, то остаток $A = Q - B$, если он представляет собой снова бесконечное множество, эквивалентен множеству Q.*

Это вытекает из равенства $Q = A + B$ в результате применения к множеству A только что доказанной теоремы.

Следствие 2. *Множество иррациональных чисел имеет мощность континуума; такую же мощность имеет и множество трансцендентных чисел.*

Прежде чем переходить к следующим теоремам, рассмотрим так называемую двоичную запись вещественных чисел.

Ограничимся вещественными числами, принадлежащими отрезку $[0, 1]$. Точка $\frac{1}{2}$ делит этот отрезок на две равные части, которые мы обозначим через $\Delta_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\Delta_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Отрезок Δ_0 делится на две равные части точкой $\frac{1}{4}$; мы обозначим их через $\Delta_{00} = \left[0, \frac{1}{4}\right]$ и $\Delta_{01} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Аналогично точка $\frac{3}{4}$ делит пополам отрезок Δ_1; положим $\Delta_{10} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, $\Delta_{11} = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Продолжая процесс деления пополам, получим восемь отрезков $\Delta_{000}, \Delta_{001}, \ldots, \Delta_{111}$ длины $\frac{1}{8}$, шестнадцать отрезков $\Delta_{0000}, \Delta_{0001}, \ldots, \Delta_{1111}$ длины $\frac{1}{16}$ и т. д. Граничные точки всех этих отрезков имеют вид $\frac{p}{2^q}$, где p и q — нату-

[1]) Эта теорема, между прочим, позволяет сделать вывод об эквивалентности отрезка и интервала без применения теоремы Бернштейна.

ральные числа; эти точки — образующие, очевидно, счетное множество, — называются двоично-рациональными. Остальные точки отрезка $[0, 1]$ называются двоично-иррациональными; их множество имеет мощность континуума. Совокупность всех отрезков построенной системы обозначим через Δ.

Для каждой точки $\xi \in [0, 1]$ можно указать последовательность отрезков системы Δ, вложенных друг в друга, имеющих длины, соответственно равные $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$, и содержащих точку ξ. Действительно, точка ξ принадлежит одному из отрезков Δ_0, Δ_1; если она принадлежит, например, Δ_0, то она принадлежит Δ_{00} или Δ_{01} и т. д. Таким образом, для всякой точки ξ получаем:

$$\Delta_{\varepsilon_1} \supset \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \supset \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \supset \ldots \supset \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n} \supset \ldots \ni \xi \tag{1}$$

(числа ε_n суть нули или единицы). Имея систему включений (1), мы можем сопоставить точке ξ последовательность из нулей и единиц:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n \ldots \tag{2}$$

Символ (2) определяет *двоичную запись* вещественного числа ξ.

По последовательности (2) само число ξ однозначно восстанавливается:

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}; \tag{3}$$

действительно, частичные суммы ряда (3) суть левые концы промежутков, участвующих во включениях (1); очевидно, что эти левые концы образуют монотонную (неубывающую) последовательность, сходящуюся к значению ξ.

Более того, можно с самого начала взять произвольную последовательность (2) из нулей и единиц и построить число ξ по формуле (3). Легко видеть, что это число ξ будет пересечением отрезков соответствующей системы (1). Таким образом, в наше построение вовлечены все возможные последовательности из нулей и единиц.

Если точка ξ не является двоично-рациональной, то все отрезки, участвующие во включениях (1), определяются ею однозначно. Если же ξ двоично-рациональна, то она является общим концом двух соседних равных отрезков системы Δ и на некотором шаге нашего процесса можно будет по произволу выбрать любой из них. Если мы возьмем правый, то все последующие отрезки придется брать левыми и все последующие числа в символе (2) будут равны единице. Если же мы возьмем левый отрезок, то все последующие отрезки придется брать правыми и все соответствующие числа в символе (2) будут равны нулю. Обратно, если в символе (2) все числа, начиная с некоторого места, нули или же единицы, то число ξ двоично-рационально, что вытекает непосредственно из формулы (3).

Итак, множество двоично-иррациональных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством последовательностей из нулей и единиц, содержащих бесконечное число как нулей, так и единиц; множество двоично-рациональных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством последовательностей, у которых все элементы, начиная с некоторого номера, нули, а также с множеством последовательностей, у которых все элементы, начиная с некоторого номера, единицы.

Теперь мы можем переходить к очередной теореме.

Теорема 3. *Множество всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц, имеет мощность континуума.*

Доказательство. Рассматриваемое множество есть объединение трех множеств: множества последовательностей, содержащих бесконечное число как нулей, так и единиц, множества последовательностей, содержащих лишь конечное число нулей, и множества последовательностей, содержащих лишь конечное число единиц. По доказанному первое из них эквивалентно множеству всех двоично-иррациональных чисел и имеет тем самым мощность континуума; два других множества, эквивалентные множеству двоично-рациональных чисел, счетны. В силу теоремы 1 само множество всех последовательностей из нулей и единиц имеет мощность континуума, что и требуется.

Теорема 4. *Множество всех возрастающих последовательностей натуральных чисел*

$$(0<)\, k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots \qquad (4)$$

имеет мощность континуума.

Доказательство. Каждой последовательности (4) можно сопоставить последовательность нулей и единиц, в которой единицы стоят на местах с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ и нули — на остальных местах. Очевидно, что такое сопоставление приводит к взаимно однозначному соответствию между множеством всех возрастающих последовательностей натуральных чисел и всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц. По доказанному второе множество имеет мощность континуума; вместе с ним и первое множество имеет мощность континуума, что и требовалось.

Теорема 5. *Множество всех последовательностей натуральных чисел*

$$m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots \qquad (5)$$

(не обязательно возрастающих) *имеет мощность континуума.*

Доказательство. Каждой последовательности натуральных чисел (5) можно сопоставить возрастающую последовательность

$$k_1 = m_1,\ k_2 = m_1 + m_2,\ \ldots,\ k_n = m_1 + m_2 + \ldots + m_n,\ \ldots$$

Очевидно, что такое сопоставление приводит к взаимно однозначному соответствию между множеством всех последовательностей натуральных чисел и множеством возрастающих последовательностей. Второе множество, как мы показали, имеет мощность континуума; следовательно, и первое имеет мощность континуума.

Теорема 6. *Множество Z всех последовательностей вещественных чисел*

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$$

имеет мощность континуума.

Доказательство. В силу теоремы 5 каждому значению ξ_n можно сопоставить последовательность натуральных чисел

$$\xi_n \to (p_{n1}, p_{n2}, \ldots, p_{nk}, \ldots)$$

и, следовательно, символу ξ можно сопоставить таблицу

$$\begin{matrix} p_{11} p_{12} & \ldots & p_{1k} & \ldots \\ p_{21} p_{22} & \ldots & p_{2k} & \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ p_{n1} p_{n2} & \ldots & p_{nk} & \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \end{matrix}$$

Но все элементы этой таблицы можно записать в простую последовательность (ср. § 4):

$$p_{11};\ p_{21},\ p_{22},\ p_{12};\ p_{31},\ p_{32},\ p_{33},\ p_{23},\ p_{13};$$
$$p_{41},\ p_{42},\ p_{43},\ p_{44},\ p_{34},\ p_{24},\ p_{14},\ \ldots$$

Таким образом, символу ξ сопоставляется последовательность натуральных чисел. Очевидно, что и, обратно, каждая последовательность натуральных чисел может быть получена этим путем из некоторого символа ξ. Мы видим, что совокупность всех символов ξ эквивалентна совокупности всех последовательностей натуральных чисел и, следовательно, по теореме 5 имеет мощность континуума.

Доказательство аналогичной теоремы проходит — с соответствующими упрощениями — и для случая, когда символ ξ определяется только конечным числом координат, а не счетным:

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Если считать, что каждая из координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$ пробегает вещественную ось, то мы получаем вывод, что *множество всех точек n-мерного пространства при любом n имеет мощность континуума.*

В частности, *множество всех комплексных чисел* (или, что то же, *множество точек плоскости*) *имеет мощность континуума.*

Замечание. Очевидно, нет никакой надобности считать каждую координату ξ_n именно вещественным числом: теорема полностью сохраняется, если координата ξ_n пробегает любое множество мощности континуума.

Теорема 7. *Множество $C(a, b)$ всех непрерывных функций $f(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$, имеет мощность континуума.*

Доказательство. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ — последовательность всех рациональных точек отрезка $[a, b]$. Поставим в соответствие каждой непрерывной функции $f(x)$ последовательность вещественных чисел — значений функции $f(x)$ в точках $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$:

$$f(x) \sim \{f(r_1), \quad f(r_2), \quad \ldots, \; f(r_n), \quad \ldots\} = \{f(r_n)\}.$$

При этом двум различным функциям $f(x)$ и $g(x)$ будут отвечать различные последовательности $\{f(r_n)\}$ и $\{g(r_n)\}$, поскольку две непрерывные функции, совпадающие во всех рациональных точках, совпадают и всюду. Таким образом, множество $C(a, b)$ всех непрерывных функций можно считать эквивалентным некоторой части множества всех числовых последовательностей. С другой стороны, множество всех числовых последовательностей имеет по теореме 5 мощность континуума и тем самым эквивалентно части множества $C(a, b)$, состоящей из постоянных. В силу теоремы Бернштейна (§ 3) множество $C(a, b)$ эквивалентно множеству всех числовых последовательностей и имеет вместе с ним мощность континуума.

Задачи. 1. Доказать, что множество всех непрерывных функций $f(x, y)$, определенных в квадрате $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, имеет мощность континуума.

2. Функция $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ называется функцией первого класса Бэра, если она есть предел последовательности непрерывных функций:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad f_n(x) \in C(a, b),$$

сходящейся в каждой точке отрезка. Доказать, что мощность множества всех функций первого класса Бэра равна мощности континуума.

Указание к задаче 4 § 4. Множество братьев N — счетное множество.

§ 6. Множества высших мощностей

Если множества A и B неэквивалентны, но одно из них, например A, эквивалентно некоторому подмножеству множества B, говорят, что множество B имеет *бо́льшую мощность*, чем множество A. Так, счетное множество имеет бо́льшую мощность, чем любое конечное, континуум — бо́льшую мощность, чем счетное множество.

Существуют множества более высокой мощности, чем мощность континуума. Более того, если имеется множество некоторой мощности, всегда можно построить множество большей мощности, пользуясь следующей теоремой: