В частности, *множество всех комплексных чисел* (или, что то же, *множество точек плоскости*) *имеет мощность континуума.*

Замечание. Очевидно, нет никакой надобности считать каждую координату ξ_n именно вещественным числом: теорема полностью сохраняется, если координата ξ_n пробегает любое множество мощности континуума.

Теорема 7. *Множество $C(a, b)$ всех непрерывных функций $f(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$, имеет мощность континуума.*

Доказательство. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ — последовательность всех рациональных точек отрезка $[a, b]$. Поставим в соответствие каждой непрерывной функции $f(x)$ последовательность вещественных чисел — значений функции $f(x)$ в точках $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$:

$$f(x) \sim \{f(r_1), \quad f(r_2), \ \ldots, \ f(r_n), \ \ldots\} = \{f(r_n)\}.$$

При этом двум различным функциям $f(x)$ и $g(x)$ будут отвечать различные последовательности $\{f(r_n)\}$ и $\{g(r_n)\}$, поскольку две непрерывные функции, совпадающие во всех рациональных точках, совпадают и всюду. Таким образом, множество $C(a, b)$ всех непрерывных функций можно считать эквивалентным некоторой части множества всех числовых последовательностей. С другой стороны, множество всех числовых последовательностей имеет по теореме 5 мощность континуума и тем самым эквивалентно части множества $C(a, b)$, состоящей из постоянных. В силу теоремы Бернштейна (§ 3) множество $C(a, b)$ эквивалентно множеству всех числовых последовательностей и имеет вместе с ним мощность континуума.

Задачи. **1.** Доказать, что множество всех непрерывных функций $f(x, y)$, определенных в квадрате $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, имеет мощность континуума.

2. Функция $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ называется функцией первого класса Бэра, если она есть предел последовательности непрерывных функций:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad f_n(x) \in C(a, b),$$

сходящейся в каждой точке отрезка. Доказать, что мощность множества всех функций первого класса Бэра равна мощности континуума.

Указание к задаче 4 § 4. Множество братьев N — счетное множество.

§ 6. Множества высших мощностей

Если множества A и B неэквивалентны, но одно из них, например A, эквивалентно некоторому подмножеству множества B, говорят, что множество B имеет *бóльшую мощность*, чем множество A. Так, счетное множество имеет бóльшую мощность, чем любое конечное, континуум — бóльшую мощность, чем счетное множество.

Существуют множества более высокой мощности, чем мощность континуума. Более того, если имеется множество некоторой мощности, всегда можно построить множество большей мощности, пользуясь следующей теоремой:

Теорема (Г. Кантор, 1878). *Пусть дано множество A, и B есть совокупность всех подмножеств множества A. Утверждается, что мощность множества B заведомо больше мощности множества A.*

Доказательство. Предположим, что существует взаимно однозначное соответствие между множествами A и B, иными словами, что каждому *элементу* x множества A взаимно однозначно сопоставлено некоторое *подмножество* A_x этого множества. Элемент x может принадлежать подмножеству A_x или не принадлежать; первая возможность осуществляется, например, для подмножества A_x, совпадающего со всем множеством A, вторая — для пустого подмножества. Элементы первого типа назовем «хорошими», элементы второго типа — «плохими». Соберем все плохие элементы x, т. е. не принадлежащие соответствующим подмножествам A_x, и пусть Z означает их совокупность. В силу взаимно однозначного соответствия между подмножествами множества A и его элементами подмножеству Z отвечает некоторый элемент ζ. Исследуем две возможности: ζ или хороший элемент, или плохой. Если ζ — хороший элемент, то он принадлежит соответствующему подмножеству, т. е. $\zeta \in Z$. Но Z по построению состоит из плохих элементов, так что первая возможность исключается. Если ζ — плохой элемент, то он не принадлежит соответствующему подмножеству: $\zeta \overline{\in} Z$. Но Z по построению содержит *все* плохие элементы; поэтому и вторая возможность исключается.

Мы получили противоречие: ζ не может быть ни хорошим, ни плохим элементом. Следовательно, исходная посылка — эквивалентность множества A и множества B всех подмножеств A — неверна, эти множества не эквивалентны. Так как само множество A, очевидно, эквивалентно части множества B (состоящей из одноэлементных подмножеств), то мы делаем вывод, что множество B имеет бóльшую мощность, чем множество A. Теорема доказана.

Примеры. 1. Легко подсчитать, что конечное множество, содержащее n элементов, имеет ровно 2^n различных подмножеств (включая пустое).

2. Множество всех подмножеств счетного множества совпадает, очевидно, с множеством всех последовательностей различных натуральных чисел и имеет, следовательно, мощность континуума.

3. Множество всех подмножеств континуума можно реализовать как некоторое множество функций, определенных на отрезке $[0, 1]$. Именно подмножеству A этого отрезка сопоставляется функция $f_A(x)$, равная 1 при $x \in A$ и 0 при $x \overline{\in} A$ (характеристическая функция множества A). Множество всех таких функций имеет, следовательно, мощность бóльшую, чем мощность континуума. И подавно, множество *всех* функций на отрезке $[a, b]$ имеет мощность выше мощности континуума. Напомним, что множество непрерывных функций на отрезке имеет мощность континуума (§ 5, теорема 7).

Заключительное замечание. Основные идеи теории множеств были сформулированы впервые в конце XIX века в работах Георга Кантора (нем. математик, 1845—1918) и с тех пор проникли в самые разные области математики, в значительной мере завершив формирование ее языка. Для более подробного ознакомления можно рекомендовать книги Ф. Хаусдорфа «Теория множеств» (ОНТИ, Москва — Ленинград, 1937) и A. Fraenkel'я «Foundation of Set Theory» (Amsterdam, 1958).