ГЛАВА II

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение и примеры метрических пространств. Изометрия

Одним из важнейших понятий в математическом анализе является понятие предельного перехода; оно лежит в основе таких фундаментальных для анализа операций, как дифференцирование и интегрирование.

По определению последовательность вещественных чисел x_n имеет пределом число x, если расстояние между x_n и x, т. е. модуль разности $x - x_n$, стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, понятие предельного перехода основано на возможности измерять расстояние между точками вещественной оси. Точно так же понятие предельного перехода на плоскости или в многомерном пространстве основано на возможности измерять расстояние между точками в соответствующих множествах. Мы введем далее понятие метрического пространства; так будет названа совокупность объектов, для которых указаны взаимные «расстояния», удовлетворяющие некоторым естественным условиям. Наличие расстояний позволит ввести и изучить свойства предельного перехода «в чистом виде», т. е. независимо от природы элементов, участвующих в этом построении.

1. Определение. Произвольное множество M некоторых элементов («точек») $x, y, \ldots$ называется *метрическим пространством*, если: 1) имеется правило, которое позволяет для любых двух точек x, y построить число $\rho(x, y)$ («расстояние от x до y»), 2) это правило удовлетворяет следующим требованиям (аксиомам):

1) $\rho(y, x) = \rho(x, y)$ для любых x и y (симметрия расстояния);
2) $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$; $\rho(x, x) = 0$ для любого x;
3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для любых x, y, z (неравенство треугольника).

Примеры. *1.* Любое множество M на вещественной прямой R_1 является метрическим пространством с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$.

Точно так же множество M в плоскости R_2 или в трехмерном пространстве R_3 является метрическим пространством, если считать расстоянием между точками (для определенности — в R_3) $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ обычное геометрическое расстояние

$$\rho(x, y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+(\xi_3-\eta_3)^2}.$$

Неравенство треугольника (аксиома 3) здесь есть обычное геометрическое неравенство: третья сторона треугольника не больше суммы двух других сторон.

Аналогично в n-мерном пространстве R_n расстояние между точками $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ можно определить формулой

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2}, \tag{1}$$

поэтому любое множество M в n-мерном пространстве является метрическим пространством с расстоянием (1).

Выполнение аксиом 1 и 2 здесь очевидно. Для проверки выполнения аксиомы 3 применим неравенство Коши[1])

$$\left|\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right|\leqslant\sqrt{\sum_{j=1}^{n}a_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}b_j^2},$$

которое имеет место для любых чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.

Полагая в этом неравенстве $a_j=\xi_j-\eta_j$, $b_j=\eta_j-\zeta_j$, мы находим:

$$\rho^2(x, z)=\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\zeta_j)^2=\sum_{j=1}^{n}[(\xi_j-\eta_j)+(\eta_j-\zeta_j)]^2=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2+2\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)(\eta_j-\zeta_j)+\sum_{j=1}^{n}(\eta_j-\zeta_j)^2\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2+2\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\eta_j-\zeta_j)^2}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}(\eta_j-\zeta_j)^2=\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2}+\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\eta_j-\zeta_j)^2}\right)^2=$$
$$=[\rho(x, y)+\rho(y, z)]^2,$$

что и требуется.

---

[1]) Приведем доказательство этого неравенства. Обозначим $A=\sum a_j^2$, $B=\sum b_j^2$, $C=\sum a_jb_j$; нам нужно доказать, что

$$C^2\leqslant AB. \tag{*}$$

Это неравенство будет выполнено, если многочлен второй степени

$$P(\lambda)=A\lambda^2+2C\lambda+B$$

2. В задачах анализа, как правило, встречаются пространства, элементами которых являются функции (функциональные пространства).

Введение той или иной метрики в функциональных пространствах зависит от требований задачи. Когда имеется расстояние, то ясно, что близкими надо считать те элементы, расстояние между которыми мало. В анализе по большей части приходится начинать с обратного: по условиям задачи видно, какие элементы естественно считать близкими и соответственно этому каким образом следует вводить определение расстояния.

Например, часто бывает естественным считать непрерывные функции $x(t)$ и $y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ близкими, если мала величина $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$. Эту величину можно принять за определение расстояния между функциями $x(t)$ и $y(t)$; оно, очевидно, удовлетворяет аксиомам 1 — 3, и поэтому любое множество M непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, с введением расстояния по формуле

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \tag{2}$$

становится метрическим пространством.

3. В некоторых случаях (например, в вариационном исчислении), когда речь идет о функциях, имеющих производные до порядка k, естественно считать близкими такие элементы $x(t)$ и $y(t)$, у которых при всех значениях t близки не только значения самих функций, но и значения их производных до порядка k. Этому отвечает формула расстояния

$$\rho(x, y) = \\ = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \{ |x(t) - y(t)|, |x'(t) - y'(t)|, \ldots, |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)| \}. \tag{3}$$

Если взять некоторое множество функций $x(t)$, имеющих непрерывные производные до порядка k, то с введением расстояния по формуле (3) оно становится, очевидно, метрическим пространством.

4. В других случаях (например, в теории интегральных уравнений) естественно считать функции $x(t)$ и $y(t)$ близкими, если они близки в интегральном смысле, т. е. если мала величина

$$\int_a^b |x(t) - y(t)| \, dt.$$

не имеет различных вещественных корней. Но

$$P(\lambda) = \sum a_j^2 \lambda^2 + 2 \sum a_j b_j \lambda + \sum b_j^2 = \sum (a_j \lambda + b_j)^2,$$

так что многочлен $P(\lambda)$ может иметь не более одного вещественного корня $\lambda = -\frac{b_1}{a_1} = \ldots = -\frac{b_n}{a_n}$. Таким образом, неравенство (*) справедливо.

Здесь естественно ввести расстояние по формуле

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt. \qquad (4)$$

Очевидно, что аксиомы метрического пространства здесь также удовлетворяются.

5. Иногда бывает нужно определять близость между функциями с помощью интеграла не от первой, а от какой-либо другой, например p-й, степени разности между этими функциями; соответствующее расстояние может быть задано формулой

$$\rho^p(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt. \qquad (5)$$

При $p \geqslant 1$ это определение также удовлетворяет аксиомам метрического пространства. Правда, проверка выполнения аксиомы 3 (за исключением простых случаев $p = 1$ и $p = 2$) становится более сложной; мы ее приводить здесь не будем[1]).

Таким образом, определение метрического пространства представляется достаточно гибким, чтобы удовлетворить самым разнообразным конкретным запросам математического анализа. В дальнейшем на материале всего нашего курса мы убедимся в справедливости этого соображения.

Метрическое пространство *всех* непрерывных функций на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ с расстоянием, определенным по формуле (2), обозначается через $C(a, b)$. Метрическое пространство *всех* непрерывных функций на $[a, b]$, имеющих непрерывные производные до порядка k, с расстоянием, определенным по формуле (3), обозначается через $D_k(a, b)$; можно положить $D_0(a, b) \equiv C(a, b)$. Метрическое пространство всех непрерывных функций на $[a, b]$ с расстоянием (5) обозначается через $C_p(a, b)$.

2. Неравенство, выраженное аксиомой 3, можно обобщить на случай любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Именно имеет место следующее неравенство:

$$\rho(x_1, x_m) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \ldots + \rho(x_{m-1}, x_m).$$

Оно получается путем последовательного применения аксиомы 3:

$$\rho(x_1, x_m) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_m) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_3, x_m) \leqslant \ldots$$

Отметим следующее простое свойство расстояний, которое можно называть «*неравенством четырехугольника*»: для любых четырех

[1]) См. гл. IV, § 5, п. 3.

точек x, y, z, u метрического пространства

$$|\rho(x, z) - \rho(y, u)| \leqslant \rho(x, y) + \rho(z, u). \tag{1}$$

Геометрически это означает, что разность двух сторон четырехугольника не превосходит суммы двух других сторон. Доказательство вытекает из неравенств

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, u) + \rho(u, z),$$
$$\rho(y, u) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, z) + \rho(z, u),$$

если из первого вычесть $\rho(y, u)$, а из второго $\rho(x, z)$. При $z = u$ неравенство четырехугольника обращается во *второе неравенство треугольника*

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leqslant \rho(x, y), \tag{2}$$

которое также часто применяется.

3. В теории множеств существенную роль играло понятие *эквивалентности*. Два эквивалентных множества, т. е. два множества, находящихся во взаимно однозначном соответствии, с точки зрения чистой теории множеств были абсолютно равноправными, хотя бы они состояли из совершенно различных по природе элементов. После того как было установлено, например, что множество точек отрезка и множество непрерывных функций, заданных на этом отрезке, имеют одинаковую мощность, в теории множеств уже нет никакого смысла обращаться с этими множествами, как с различными.

Но если два рассматриваемых нами множества являются метрическими пространствами (и интересуют нас именно как таковые), то теоретико-множественной эквивалентности уже недостаточно для того, чтобы мы считали такие два пространства равноправными, так как метрические соотношения у них могут быть совершенно различными. Например, эквивалентные как множества метрические пространства точек отрезка $[a, b]$ и непрерывных функций на этом отрезке неодинаковы по метрике — хотя бы потому, что в первом пространстве взаимные расстояния между элементами ограничены постоянной $b - a$, а во втором — ничем не ограничены; можно указать и много других различий. Поэтому естественно ввести следующее определение:

Два метрических пространства называются *изометричными*, если между элементами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее расстояние между соответствующими парами элементов.

Иными словами, если M и M' — изометричные пространства и элементам x, y пространства M соответствуют элементы x', y' пространства M', то $\rho(x, y) = \rho(x', y')$.

Например, пространства $C(0, 1)$ и $C(0, 2)$ непрерывных функций на отрезках $[0, 1]$ и $[0, 2]$ соответственно являются изометричными.

Соответствие между их элементами можно установить по формуле

$$C(0,\ 1) \ni x(t) \leftarrow\rightarrow y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) \in C(0,\ 2).$$

Легко видеть, что это соответствие взаимно однозначно и сохраняет расстояния, что и требуется.

§ 2. Открытые множества

1. Совокупность всех точек x метрического пространства M, отстоящих от данной точки x_0 на расстоянии, меньшем заданной величины $r > 0$, так что

$$\rho(x,\ x_0) < r,$$

называется *шаром* (точнее, *открытым шаром*) радиуса r; точка x_0 есть *центр* этого шара. Совокупность всех точек x, удовлетворяющих неравенству

$$\rho(x,\ x_0) \leqslant r,$$

называется *замкнутым шаром* радиуса r. Наконец, точки, находящиеся точно на расстоянии r от точки x_0, так что

$$\rho(x,\ x_0) = r,$$

образуют *сферу* радиуса r с центром в x_0. Введем следующее важное определение.

Множество U в метрическом пространстве M называется *открытым множеством* или *областью,* если каждая точка x_0 множества U является *внутренней точкой* этого множества, т. е. входит в это множество вместе с некоторым открытым шаром (радиус которого, вообще говоря, зависит от точки x_0) с центром в точке x_0.

Так, открытый шар с центром в некоторой точке x_1

$$U = \{x : \rho(x,\ x_1) < r\}$$

есть открытое множество. Действительно, пусть $x_0 \in U$, так что $\rho(x_0,\ x_1) = \theta < r$. Рассмотрим шар U_0 с центром в точке x_0 радиуса $r_0 < r - \theta$; мы утверждаем, что шар U_0 целиком входит в шар U. Действительно, для любого $x \in U_0$ по неравенству треугольника

$$\rho(x,\ x_1) \leqslant \rho(x,\ x_0) + \rho(x_0,\ x_1) < r_0 + \theta < r - \theta + \theta = r,$$

что и требуется.

Операции с открытыми множествами. Объединение открытых множеств в любом числе есть, очевидно, тоже открытое множество.