Соответствие между их элементами можно установить по формуле

$$C(0,\ 1) \ni x(t) \leftarrow\rightarrow y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) \in C(0,\ 2).$$

Легко видеть, что это соответствие взаимно однозначно и сохраняет расстояния, что и требуется.

§ 2. Открытые множества

1. Совокупность всех точек x метрического пространства M, отстоящих от данной точки x_0 на расстоянии, меньшем заданной величины $r > 0$, так что

$$\rho(x,\ x_0) < r,$$

называется *шаром* (точнее, *открытым шаром*) радиуса r; точка x_0 есть *центр* этого шара. Совокупность всех точек x, удовлетворяющих неравенству

$$\rho(x,\ x_0) \leqslant r,$$

называется *замкнутым шаром* радиуса r. Наконец, точки, находящиеся точно на расстоянии r от точки x_0, так что

$$\rho(x,\ x_0) = r,$$

образуют *сферу* радиуса r с центром в x_0. Введем следующее важное определение.

Множество U в метрическом пространстве M называется *открытым множеством* или *областью*, если каждая точка x_0 множества U является *внутренней точкой* этого множества, т. е. входит в это множество вместе с некоторым открытым шаром (радиус которого, вообще говоря, зависит от точки x_0) с центром в точке x_0.

Так, открытый шар с центром в некоторой точке x_1

$$U = \{x : \rho(x,\ x_1) < r\}$$

есть открытое множество. Действительно, пусть $x_0 \in U$, так что $\rho(x_0,\ x_1) = \theta < r$. Рассмотрим шар U_0 с центром в точке x_0 радиуса $r_0 < r - \theta$; мы утверждаем, что шар U_0 целиком входит в шар U. Действительно, для любого $x \in U_0$ по неравенству треугольника

$$\rho(x,\ x_1) \leqslant \rho(x,\ x_0) + \rho(x_0,\ x_1) < r_0 + \theta < r - \theta + \theta = r,$$

что и требуется.

Операции с открытыми множествами. Объединение открытых множеств в любом числе есть, очевидно, тоже открытое множество.

Пересечение открытых множеств в *конечном числе* также приводит к открытому множеству. Действительно, пусть точка x_0 принадлежит открытым множествам U_1, U_2, ..., U_m и входит в первое из них вместе с шаром радиуса r_1 (с центром в x_0), во второе — с шаром радиуса r_2 и т. д.; тогда шар с центром в x_0, радиуса $\min(r_1, \ldots, r_m)$, содержится в каждом из множеств $U_1, \ldots, U_m$ и, следовательно, содержится и в их пересечении.

Для бесконечного числа открытых множеств приведенное рассуждение не пройдет, так как минимум (точнее, точная нижняя грань) бесконечного числа положительных чисел может быть равным нулю. И действительно, пересечение бесконечного числа открытых множеств

$$U_n = \left\{ x : \rho(x, x_0) < \frac{1}{n} \right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

содержит только те точки x, для которых $\rho(x, x_0) = 0$, т. е., согласно аксиоме 1, только точку x_0; это пересечение не есть, таким образом, открытое множество.

2. На оси $-\infty < x < \infty$ всякий интервал (α, β) (ограниченный или неограниченный) есть, очевидно, открытое множество. Открытым множеством является также конечное или счетное объединение интервалов (α_ν, β_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots)$ без общих точек. Покажем, что *каждое открытое множество U на оси есть конечное или счетное объединение интервалов без общих точек.*

Рассмотрим произвольную точку $x \in U$. Согласно определению точка x входит в множество U вместе с некоторым шаром, т. е. вместе с некоторым интервалом оси, содержащим точку x. Мы построим сейчас наибольший интервал, содержащий точку x и содержащийся целиком в множестве U.

Обозначим через S множество точек, лежащих правее x и не принадлежащих U. Если S пусто, то вся полупрямая (x, ∞) входит в U. Если S не пусто, то оно обладает точной нижней гранью ξ. Эта точка ξ заведомо не входит в U, так как у любой точки множества U есть окрестность, целиком входящая в U и не содержащая тем самым ни одной точки множества S, а точка ξ, как точная нижняя грань множества S, в любой своей окрестности содержит точки из S. В частности, $\xi \neq x$. Очевидно также, что весь интервал (x, ξ) входит в U.

Аналогичное построение произведем слева от точки x; мы получим там содержащийся в U интервал (η, x), левый конец которого не входит в U (причем возможно, что этот интервал есть вся полупрямая $(-\infty, x)$).

Итак, по заданной точке $x \in U$ мы построили интервал (η, ξ), принадлежащий множеству U и такой, что его концы (из которых один или оба могут быть в бесконечности) уже не входят в множество U. Такого рода интервалы называются *составляющими интервалами открытого множества* U.

Если два составляющих интервала (η_1, ξ_1) и (η_2, ξ_2) имеют общую точку x_0, то они целиком совпадают; действительно, неравенство, например $\xi_1 < \xi_2$, невозможно, так как точка ξ_1, с одной стороны, как внутренняя точка интервала (x_0, ξ_2), должна принадлежать множеству U, а с другой стороны, как концевая точка интервала (x_0, ξ_1) она не может входить в U. Поэтому все множество U есть объединение составляющих интервалов, не имеющих попарно общих точек. Такое объединение не может быть более чем счетным, поскольку в каждом из составляющих интервалов множества U можно выбрать по рациональной точке, а рациональных точек — счетное множество. Тем самым наше утверждение полностью доказано.

Задачи. 1. Если множество E на прямой покрыто произвольной системой интервалов, то из нее можно выделить (не более чем счетную) подсистему, также покрывающую E.

Указание. Отметить те интервалы с рациональными концами, которые входят в интервалы покрытия, и оставить по одному из интервалов покрытия, содержащих данный отмеченный интервал.

2. Если множество E на плоскости покрыто произвольной системой кругов, то из нее можно выделить (не более чем счетную) подсистему, также покрывающую E.

Указание. См. задачу 1.

3. Говорят, что метрическое пространство M обладает *счетной базой*, если существует такая счетная система открытых множеств $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$, что для любой точки $x \in M$ и любой области U, содержащей точку x, найдется множество U_k такое, что $x \in U_k \subset U$. Показать, что теорема, аналогичная утверждениям задач 1 и 2, справедлива в любом метрическом пространстве со счетной базой.

4. Доказать, что множество E_0 внутренних точек любого множества E открыто (если не пусто).

5. Доказать, что совокупность всех открытых множеств на прямой имеет мощность континуума.

Указание. Использовать теорему 6 § 5 гл. I.

§ 3. Сходящиеся последовательности и замкнутые множества

1. Будем говорить, что последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ метрического пространства M *сходится к точке* x того же пространства, если

$$\lim_{\nu\to\infty} \rho(x, x_\nu) = 0,$$

иначе говоря, последовательность $x_1, x_2, \ldots$ сходится к x, если в любой шар с центром в точке x попадают все точки последовательности $x_1, x_2, \ldots$, начиная с некоторого номера.

Точка x называется *пределом* последовательности $x_1, x_2, \ldots; x_\nu, \ldots$ и обозначается $\lim x_\nu$.