ство U. Такого рода интервалы называются *составляющими интервалами открытого множества* U.

Если два составляющих интервала (η_1, ξ_1) и (η_2, ξ_2) имеют общую точку x_0, то они целиком совпадают; действительно, неравенство, например $\xi_1 < \xi_2$, невозможно, так как точка ξ_1, с одной стороны, как внутренняя точка интервала (x_0, ξ_2), должна принадлежать множеству U, а с другой стороны, как концевая точка интервала (x_0, ξ_1) она не может входить в U. Поэтому все множество U есть объединение составляющих интервалов, не имеющих попарно общих точек. Такое объединение не может быть более чем счетным, поскольку в каждом из составляющих интервалов множества U можно выбрать по рациональной точке, а рациональных точек — счетное множество. Тем самым наше утверждение полностью доказано.

Задачи. 1. Если множество E на прямой покрыто произвольной системой интервалов, то из нее можно выделить (не более чем счетную) подсистему, также покрывающую E.

Указание. Отметить те интервалы с рациональными концами, которые входят в интервалы покрытия, и оставить по одному из интервалов покрытия, содержащих данный отмеченный интервал.

2. Если множество E на плоскости покрыто произвольной системой кругов, то из нее можно выделить (не более чем счетную) подсистему, также покрывающую E.

Указание. См. задачу 1.

3. Говорят, что метрическое пространство M обладает *счетной базой*, если существует такая счетная система открытых множеств $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$, что для любой точки $x \in M$ и любой области U, содержащей точку x, найдется множество U_k такое, что $x \in U_k \subset U$. Показать, что теорема, аналогичная утверждениям задач 1 и 2, справедлива в любом метрическом пространстве со счетной базой.

4. Доказать, что множество E_0 внутренних точек любого множества E открыто (если не пусто).

5. Доказать, что совокупность всех открытых множеств на прямой имеет мощность континуума.

Указание. Использовать теорему 6 § 5 гл. I.

§ 3. Сходящиеся последовательности и замкнутые множества

1. Будем говорить, что последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ метрического пространства M *сходится к точке* x того же пространства, если

$$\lim_{\nu\to\infty} \rho(x, x_\nu) = 0,$$

иначе говоря, последовательность $x_1, x_2, \ldots$ сходится к x, если в любой шар с центром в точке x попадают все точки последовательности $x_1, x_2, \ldots$, начиная с некоторого номера.

Точка x называется *пределом* последовательности $x_1, x_2, \ldots; x_\nu, \ldots$ и обозначается $\lim x_\nu$.

Нетрудно показать, что элемент x определяется при этом *однозначно*. Действительно, если бы мы имели соотношения

$$\lim_{\nu\to\infty} \rho(x, x_\nu)=0, \quad \lim_{\nu\to\infty} \rho(y, x_\nu)=0,$$

то для заданного $\varepsilon>0$ мы могли бы указать номер N, начиная с которого выполнялись бы неравенства

$$\rho(x, x_\nu)<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(y, x_\nu)<\frac{\varepsilon}{2} \quad (\nu\geqslant N)$$

и, следовательно, по неравенству треугольника

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, x_\nu)+\rho(y, x_\nu)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Так как в полученном неравенстве ε произвольно мало, то

$$\rho(x, y)=0,$$

откуда в силу аксиомы 2

$$x=y,$$

что и требуется.

Примеры. *1.* Пусть метрическое пространство M лежит в n-мерном пространстве R_n (§ 1, пример 1), так что расстояние между точками $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $y=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ задано формулой

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum(\xi_j-\eta_j)^2}.$$

Выясним, что́ означает сходимость последовательности

$$x_\nu=(\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}, \ldots, \xi_n^{(\nu)}) \quad (\nu=1, 2, \ldots)$$

к точке

$$x=(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Так как

$$\rho(x, x_\nu)=\sqrt{\sum(\xi_j-\xi_j^{(\nu)})^2},$$

то $\rho(x, x_\nu)$ стремится к нулю при $\nu\longrightarrow\infty$ тогда и только тогда, когда *все числовые последовательности* $\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}, \ldots, \xi_n^{(\nu)}$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ при $\nu\longrightarrow\infty$ сходятся соответственно к пределам $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Кратко это выражают так: сходимость в R_n есть сходимость по всем координатам.

2. Сходимость последовательности функций $x_\nu(t)\in C(a, b)$ к функции $x(t)$ означает, что при $\nu\longrightarrow\infty$

$$\rho(x, x_\nu)=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-x_\nu(t)|\longrightarrow 0.$$

В анализе такая сходимость называется *равномерной сходимостью.*

3. Сходимость последовательности функций $x_\nu(t)$ из пространства $C_p(a, b)$ к функции $x(t)$ означает, что при $\nu \to \infty$

$$\rho^p(x, x_\nu) = \int_a^b |x(t) - x_\nu(t)|^p dt \to 0.$$

В анализе такая сходимость называется *сходимостью в среднем порядка p* или просто сходимостью в среднем, если p фиксировано.

Всякая равномерно сходящаяся последовательность функций, очевидно, сходится также и в среднем при любом p.

Но легко построить последовательность функций, сходящуюся в среднем при любом p и не сходящуюся равномерно. Пусть, например, функция $x_\nu(t)$, вообще заключенная между нулем и единицей, отлична от нуля только в интервале Δ_ν длины, меньшей $\frac{1}{\nu}$, и достигает в этом интервале значения 1. Очевидно, что

$$\int_a^b x_\nu^p(t)\, dt < \frac{1}{\nu},$$

так что последовательность $x_\nu(t)$ при $\nu \to \infty$ *в среднем стремится к нулю*. Но $\max x_\nu(t) = 1$ для любого ν, так что последовательность $x_\nu(t)$ *не сходится к нулю равномерно*. Можно проверить, что эта последовательность ни к какой функции не сходится равномерно. Более того, интервалы Δ_ν можно выбрать так, что эта последовательность вообще не будет сходиться ни при одном значении t.

Лемма. *Если $x_\nu \to x$, $y_\nu \to y$, то $\rho(x_\nu, y_\nu) \to \rho(x, y)$.* (Иначе говоря, *расстояние есть непрерывная функция своих аргументов.*)

Доказательство. По неравенству четырехугольника (§ 1, п. 2)

$$|\rho(x, y) - \rho(x_\nu, y_\nu)| \leqslant \rho(x, x_\nu) + \rho(y, y_\nu).$$

Эта величина стремится к нулю при $\nu \to \infty$, что и требуется.

2. Точка x метрического пространства M называется *предельной* для множества $F \subset M$, если существует последовательность $x_1, x_2, \ldots$ (различных) точек F, сходящаяся к точке x.

Другое определение предельной точки, очевидно эквивалентное вышеприведенному, гласит: точка x есть предельная точка множества F, если в любом шаре с центром в точке x имеются точки множества F (отличные от точки x).

Множество $F \subset M$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Примеры. *1.* Отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ замкнут на вещественной прямой, а полуинтервал $a \leqslant x < b$ не замкнут, так как его предельная точка b не принадлежит ему.

2. В любом метрическом пространстве шар

$$U=\{x:\rho(x,\ x_0)\leqslant r\}$$

есть замкнутое множество (поэтому он и называется замкнутым шаром).

Действительно, возьмем любую точку x_1, не принадлежащую шару U, так что $\rho(x_1,\ x_0)=r_1>r$. Мы утверждаем, что в шаре с центром в точке x_1 и радиусом $\frac{1}{2}(r_1-r)$ нет точек шара U: если бы такая точка нашлась, то, обозначив ее через z, мы имели бы

$$\rho(x_0,\ x_1)\leqslant\rho(x_0,\ z)+\rho(x_1,\ z)\leqslant r+\frac{1}{2}(r_1-r)<\frac{1}{2}r_1$$

в противоречие с построением. Поэтому точка x_1 не может быть предельной точкой для множества U.

Замкнутые множества в метрическом пространстве M тесно связаны с открытыми множествами этого пространства. Именно имеет место теорема:

Теорема. *Множество U, дополнительное в метрическом пространстве M к замкнутому множеству F, всегда открыто. Множество F, дополнительное к открытому множеству U, всегда замкнуто.*

Доказательство. Пусть F — замкнутое множество и U — его дополнение; покажем, что U открыто. Рассмотрим произвольную точку $x_0\in U$; мы должны показать, что имеется шар, определяемый неравенством вида

$$\rho(x,\ x_0)<r,$$

целиком входящий в множество U.

Допуская противное, мы должны предположить, что в любом шаре с центром в точке x_0 имеются точки множества F. Но тогда, согласно второму определению предельной точки, x_0 есть предельная точка множества F. Так как F замкнуто, то мы должны были бы иметь $x_0\in F$, что противоречит предположению $x_0\in U$. Итак, U открыто.

Переходим ко второй половине теоремы. Пусть U открыто и F — его дополнение; покажем, что F замкнуто. Любая точка x_0, принадлежащая U, входит в U вместе с некоторым шаром, и поэтому не может быть предельной точкой множества F. Таким образом, предельные точки множества F могут быть только в самом F, и, следовательно, F замкнуто. Теорема доказана.

Вспоминая п. 2 § 2, мы получаем общее описание всех замкнутых множеств на прямой $-\infty<x<\infty$: *каждое замкнутое множество на прямой получается удалением конечной или счетной совокупности интервалов без общих точек.* Выбрасываемые интервалы, которые служат составляющими интервалами дополнительного открытого множества, называются *смежными интервалами* данного замкнутого множества.

Используя известные свойства открытых множеств в метрическом пространстве и найденную только что связь между открытыми и замкнутыми множествами, мы можем утверждать, что *объединение замкнутых множеств в конечном числе и пересечение замкнутых множеств в любом числе суть снова замкнутые множества.*

Действительно, пусть даны замкнутые множества F_ν (ν пробегает некоторую совокупность индексов), и пусть $U_\nu = CF_\nu$ — дополнительные открытые множества. По формуле (1) § 2 гл. I мы имеем:

$$C\sum_\nu F_\nu = \prod_\nu CF_\nu = \prod U_\nu.$$

Если ν пробегает конечную совокупность индексов, то $\prod U_\nu$, согласно § 2, есть открытое множество; поэтому дополнительное к $\prod U_\nu$ множество $\sum F_\nu$ замкнуто. Далее, по формуле (2) § 2 гл. I

$$C\prod_\nu F_\nu = \sum_\nu CF_\nu = \sum_\nu U_\nu.$$

Множество $\sum U_\nu$ всегда открыто; поэтому его дополнение $\prod F_\nu$ всегда замкнуто, что и требовалось.

3. Множество A, расположенное в метрическом пространстве M, называется *всюду плотным в* M, если всякая точка $b \in M$ есть предел последовательности точек $a_n \in A$ (не обязательно различных). Иными словами, A всюду плотно в M, если в любом шаре с центром в точке $b \in M$ имеется точка $a \in A$.

Так, множество рациональных точек всюду плотно на оси $-\infty < x < \infty$. Каждая непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, согласно известной теореме Вейерштрасса, может быть представлена как предел равномерно сходящейся последовательности многочленов; таким образом, множество всех многочленов всюду плотно в пространстве $C(a, b)$.

Свойство «всюду плотности» обладает своеобразной «транзитивностью»: *если множество A всюду плотно в пространстве M, а M в свою очередь всюду плотно в более широком пространстве P, то A, рассматриваемое как подмножество P, всюду плотно в P.* Действительно, поскольку M всюду плотно в P, для данной точки $x \in P$ и данного $\varepsilon > 0$ мы можем найти такую точку $b \in M$, что $\rho(b, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, далее, поскольку A всюду плотно в M, мы можем указать такую точку $a \in A$, что $\rho(a, b) < \frac{\varepsilon}{2}$. По неравенству треугольника $\rho(a, x) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, x) < \varepsilon$; таким образом, в шаре радиуса ε с центром в любой точке $x \in P$ имеется точка $a \in A$, что и требовалось.

Пример. Покажем, что совокупность тригонометрических многочленов $T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ составляет всюду плотное множество в пространстве $C_p(-\pi, \pi)$. Из анализа известно, что всякая непрерывная функция $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$, обладающая кусочно-непрерывной производной и удовлетворяющая условию $f(-\pi) = f(\pi)$, разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

сходящийся равномерно, т. е. по метрике пространства $C(-\pi, \pi)$ и тем самым по метрике $C_p(-\pi, \pi)$.

Таким образом, тригонометрические многочлены образуют всюду плотное множество A в совокупности M указанных непрерывных функций. Далее, любая непрерывная функция $\varphi(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, удовлетворяющая условию $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, есть предел равномерно сходящейся последовательности функций $f_n(x)$ из M, например кусочно-линейных и совпадающих с $\varphi(x)$ в точках $\frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n)$. Наконец, любая непрерывная функция $g(x)$ есть предел последовательности непрерывных функций $\varphi_n(x)$ с $\varphi_n(-\pi) = \varphi_n(\pi)$, сходящейся в метрике пространства $C_p(-\pi, \pi)$; например, можно положить $\varphi_n(x) = g(x)$ при $|x| \leqslant \pi - \frac{1}{n}$, $\varphi_n(-\pi) = \varphi_n(\pi) = 0$, а в оставшихся промежутках $\left(-\pi, -\pi + \frac{1}{n}\right)$ и $\left(\pi - \frac{1}{n}, \pi\right)$ доопределить $\varphi_n(x)$ по линейному закону. В силу указанной транзитивности мы получаем, что множество тригонометрических многочленов всюду плотно в пространстве $C_p(\pi, -\pi)$, что и требовалось.

4. Пусть дано произвольное подмножество A метрического протранства M; обозначим через $\bar{A}$ множество, состоящее из всех точек множества A и всех предельных точек множества A (не входящих в A). Если A — замкнутое множество, то $\bar{A} = A$; и обратно, если $\bar{A}$ совпадает с A, то все предельные точки множества A входят в A и, следовательно, A замкнуто. Множество $\bar{A}$ в общем случае называется *замыканием* множества A. Из определения замыкания легко следует, что данная точка $b \in M$ принадлежит множеству $\bar{A}$ тогда и только тогда, когда в любом шаре с центром в точке b найдется точка a, принадлежащая A (возможно, совпадающая с b). В частности, очевидно, что A всюду плотно в своем замыкании; и обратно, если A всюду плотно в некотором множестве Q, то $Q \subset \bar{A}$.

Используя последнее замечание, покажем, что ***замыкание произвольного множества $A \subset M$ всегда является замкнутым множеством.***

Иными словами, замыкание $\overline{\overline{A}}$ множества $\overline{A}$ совпадает с самим множеством $\overline{A}$. Мы знаем по условию, что A всюду плотно в $\overline{A}$ и $\overline{A}$ всюду плотно в $\overline{\overline{A}}$; поэтому A всюду плотно в $\overline{\overline{A}}$ и, следовательно, $\overline{\overline{A}}$ входит в замыкание A, т. е. $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$; но это и означает, что $\overline{A}$ замкнуто.

Заметим далее, что всякое замкнутое множество F, содержащее множество A, должно содержать и все предельные точки множества A и, следовательно, все множество $\overline{A}$. Так как по доказанному множество $\overline{A}$ замкнуто, то оно может быть охарактеризовано теперь как *наименьшее замкнутое множество, содержащее множество* A.

Примеры. *1.* Замыкание множества A всех рациональных точек на вещественной прямой есть совокупность всех (рациональных и иррациональных) точек этой прямой.

2. Замыкание в пространстве $C(a, b)$ множества всех многочленов $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ совпадает со всем пространством $C(a, b)$.

З а д а ч и. 1. Множество предельных точек любого множества A обозначим через A'. Построить на прямой множество A так, чтобы $A'' = (A')'$ было не пустым, а A''' — пустым.

2. Доказать, что множество A' (см. задачу 1) замкнуто, каково бы ни было A.

3. Известно, что A' счетно. Доказать, что A счетно (A — на прямой).

4. Доказать, что результат задачи 3 остается справедливым в любом метрическом пространстве со счетной базой (§ 2, задача 3).

5. Точка x на прямой называется *точкой конденсации* несчетного множества A, если в любой окрестности точки x имеется несчетное множество точек множества A. Доказать, что у всякого несчетного множества A имеются точки конденсации; более того, почти все его точки, кроме, может быть, счетного множества, являются точками конденсации.

У к а з а н и е. Точку, не являющуюся точкой конденсации множества A, можно покрыть интервалом, с рациональными концами, содержащим самое большее счетное множество точек множества.

6. Проверить, что результат задачи 5 сохраняется в любом метрическом пространстве со счетной базой.

7. Доказать, что множество M точек в плоскости, расположенных на единичной окружности Γ с центром в начале координат и имеющих полярные углы $1, 2, \ldots, n, \ldots$, всюду плотно на Γ.

У к а з а н и е. Если дуга $\Delta_0 \subset \Gamma$ не содержит точек множества M, то дуги $\Delta_1 = \Delta - 1$, $\Delta_2 = \Delta - 2$ и т. д. также не содержат его точек. Дуги Δ_0, Δ_1, Δ_2, ... равной длины, находясь на окружности Γ, не могут не пересекаться. Если, например, дуга Δ_k пересекается с дугой Δ_{k+m}, то объединение дуг Δ_k, Δ_{k+m}, Δ_{k+2m} покрывает всю окружность Γ, что невозможно.

8. Величина

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

называется расстоянием от точки x до множества A. Доказать, что для замкнутого множества A соотношения

$$\rho(x, A)=0, \qquad x \in A,$$

эквивалентны; если же A не замкнуто, то они не эквивалентны.

9. Доказать, что для любого множества A совокупность точек x, для которых $\rho(x, A)<\varepsilon$, открыта. С другой стороны, показать на примере, что совокупность точек y, для которых $\rho(y, A) \leqslant \varepsilon$, не обязана быть замкнутой, даже если A замкнуто.

Указание. Рассмотреть в пространстве $C(a, b)$ множество $A=\left\{x: \sin nx+\varepsilon+\frac{1}{n}\right\}$ и точку $\varphi_0(x) \equiv 0$.

10. Доказать, что всякое замкнутое множество F на прямой есть пересечение счетного множества открытых множеств. То же для метрического пространства со счетной базой.

Указание. Положить $U_n=\left\{x: \rho(x, F)<\frac{1}{n}\right\}$.

11. Даны два непересекающихся замкнутых множества F_1 и F_2. Построить непересекающиеся открытые множества U_1 и U_2 так, чтобы $U_1 \supset F_1$, $U_2 \supset F_2$ и U_1 и U_2 не пересекались.

Указание. Положить $U_1=\bigcup\limits_{x \in F_1}\left\{y: \rho(x, y)<\frac{1}{2} \rho(x, F_2)\right\}$, аналогично U_2.

12. Доказать, что всякое открытое множество есть объединение счетного множества замкнутых множеств (на прямой или в пространстве со счетной базой).

13. Доказать, что проекция плоского замкнутого ограниченного множества на прямую есть замкнутое множество.

Существенно ли предположение ограниченности?

Указание. В качестве примера рассмотреть проекцию равнобочной гиперболы на асимптоту.

14. Метрическое пространство M называется *сепарабельным*, если в нем имеется счетное множество A, плотное в M (так что замыкание A совпадает со всем M). Показать, что наличие счетной базы равносильно сепарабельности.

15. Доказать, что пространства $C(a, b)$ и $D_m(a, b)$ сепарабельны.

Указание. В качестве счетного всюду плотного множества можно взять совокупность многочленов с рациональными коэффициентами.

§ 4. Полные пространства

1. Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ точек метрического пространства M называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что для $\nu>N$ и $\mu>N$ выполняется неравенство

$$\rho(x_\nu, x_\mu) \leqslant \varepsilon.$$

Кратко мы будем писать в таких случаях:

$$\lim_{\nu, \mu \rightarrow \infty} \rho(x_\nu, x_\mu)=0.$$

Например, любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.